И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 514.76

Х. ХОПТЕРИЕВ, Е. ПАВЛОВ

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ, СНАБЖЕННЫЕ B-МЕТРИКОЙ, И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Для одиннадцати классов почти контактных многообразий, снабженных B-метриками, рассматриваются условия интегрируемости их контактных распределений.

1. Введение

Многообразие M нечетной размерности $2n+1$ называется почти контактным, если структурная группа касательного расслоения может быть редуцирована до группы $I \times U(n)$, где $U(n)$ — унитарная группа. Это эквивалентно заданию (φ,ξ,η)-структуры на M [3]

$$\eta(\xi)=1, \quad \varphi^2=-I+\eta\otimes\xi, \quad \varphi(\xi)=0, \quad \eta\circ\varphi=0.$$

В каждом касательном пространстве многообразия M 1-форма η определяет гиперплоскость, таки образом, η определяет $2n$-мерное распределение на M. Это распределение называется контактным.

Если на почти контактном многообразии M задана метрика g (риманова или псевдориманова), согласованная с (φ,ξ,η)-структурой следующим образом:

$$g(\varphi x,\varphi y)=-g(x,y)+\eta(x)\eta(y), \quad (x,\, y \text{ любые}),$$

то такое многообразие обозначаем (M,g,φ,ξ,η) и называем специальным контактным метрическим многообразием. Когда не возникает недоразумений, для обозначения такого многообразия используем один символ M. Символом G_M обозначаем подгруппу вещественного представления группы $I\times U(n)$, сохраняющую метрику g.

Контактные метрические многообразия такого типа были рассмотрены в [2] А. Крищунайте намного раньше, чем в [1]. В [2] она изучала гиперповерхности в биаффинном пространстве и доказала, что на гиперповерхности биаффинного пространства возникает (φ,ξ,η)-структура и что эта (φ,ξ,η)-структура интегрируема тогда и только тогда, когда гиперповерхность является бицилиндром. В [1] вместо термина “бицилиндр” используется термин “времениподобная сфера”.

Условие согласованности метрики g с (φ,ξ,η)-структурой можно записать в виде

$$g(\varphi x,y)=g(x,\varphi y), \tag{1}$$

что означает чистоту метрики g относительно аффинора φ.

В [1] введено тензорное поле

$$F(x,y,z)=g((\nabla_x\varphi)y,z),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда научных исследований Пловдивского университета.

где ∇ — риманова связность тензора g. Тензорное поле F имеет следующие свойства:

$$\begin{gathered}F(x,y,z)=F(x,z,y),\\ F(x,\varphi y,\varphi z)=F(x,y,z)-\eta(y)F(x,\xi,z)-\eta(z)F(x,y,\xi),\\ F(x,\xi,\xi)=0.\end{gathered}\tag{2}$$

С помощью поля F определяются одиннадцать классов многообразий следующим образом. Пусть V — вещественное векторное пространство, $\dim V=\dim M$. Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{F}$, состоящее из всех тензоров типа $(0,3)$, которые имеют такие же свойства, как тензор F. Тогда $\mathcal{F}$ можно разложить в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathcal{F}_\alpha$, которые инвариантны относительно действия группы G_M, действующей в каждом слое TM. Говорят, что многообразие M принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$ (или $M\in\mathcal{F}_\alpha$), если F принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$ в каждой точке $p\in M$.

Особую роль в определении классов $\mathcal{F}_\alpha$ и некоторых доказательствах играют 1-формы θ, θ^* и ω. Если $(e_1,e_2,\ldots,e_{2n+1})$ — координатные векторные поля для некоторой локальной координатной системы на M, то

$$g_{ij}=g(e_i,e_j),\quad g^{ik}\cdot g_{kj}=\delta^i_j$$

и

$$\theta(z)=g^{ij}\cdot F(e_i,e_j,z),\quad \theta^*(z)=g^{ij}\cdot F(e_i,\varphi e_j,z),\quad \omega(z)=F(\xi,\xi,z).$$

Форма ω будет использована в п. 4.

Характеристические условия принадлежности многообразия M классам $\mathcal{F}_\alpha$ задаются следующим образом: для произвольных $x,y,z\in V$

$$\mathcal{F}_1\ :\quad F(x,y,z)=\frac{1}{2n}\{g(x,\varphi y)\theta(\varphi z)+g(x,\varphi z)\theta(\varphi y)-g(\varphi x,\varphi y)\theta(hz)-g(\varphi x,\varphi z)\theta(hy)\},$$

где $h=-\varphi^2$;

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2\ :&\quad F(\xi,y,z)=F(x,\xi,z)=0,\\
&\quad F(x,y,\varphi z)+F(y,z,\varphi x)+F(z,x,\varphi y)=0,\quad \theta=0;\\
\mathcal{F}_3\ :&\quad F(\xi,y,z)=F(x,\xi,z)=0,\\
&\quad F(x,y,z)+F(y,z,x)+F(z,x,y)=0;\\
\mathcal{F}_4\ :&\quad F(x,y,z)=-\frac{\theta(\xi)}{2n}\{\eta(y)g(\varphi x,\varphi z)+\eta(z)g(\varphi x,\varphi y)\};\\
\mathcal{F}_5\ :&\quad F(x,y,z)=-\frac{\theta^*(\xi)}{2n}\{\eta(y)g(\varphi x,z)+\eta(z)g(\varphi x,y)\};\\
\mathcal{F}_6\ :&\quad F(x,y,z)=-F(\varphi x,\varphi y,z)-F(\varphi x,y,\varphi z)=\\
&\quad\quad =-F(y,z,x)+F(z,x,y)-2F(\varphi x,\varphi y,z),\\
&\quad \theta(\xi)=\theta^*(\xi)=0;\\
\mathcal{F}_7\ :&\quad F(x,y,z)=-F(\varphi x,\varphi y,z)-F(\varphi x,y,\varphi z)=-F(y,z,x)-F(z,x,y);\\
\mathcal{F}_8\ :&\quad F(x,y,z)=F(\varphi x,\varphi y,z)+F(\varphi x,y,\varphi z)=-F(y,z,x)+F(z,x,y)+2F(\varphi x,\varphi y,z);\\
\mathcal{F}_9\ :&\quad F(x,y,z)=F(\varphi x,\varphi y,z)+F(\varphi x,y,\varphi z)=-F(y,z,x)-F(z,x,y);\\
\mathcal{F}_{10}\ :&\quad F(x,y,z)=\eta(x)F(\xi,\varphi y,\varphi z);\\
\mathcal{F}_{11}\ :&\quad F(x,y,z)=\eta(x)\{\eta(y)\omega(z)+\eta(z)\omega(y)\};\\
\mathcal{F}_0\ :&\quad F(x,y,z)=0\ \text{ или }\ \nabla\varphi=0.
\end{aligned}$$

Очевидно, класс $\mathcal{F}_0$ лежит в остальных классах $\mathcal{F}_a$.

Для того чтобы почти контактное многообразие принадлежало классу $W_1 = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(\xi, y, z) = F(x, \xi, z) = F(x, y, \xi) = 0 \tag{3}$$

(см. предложения 3.5 и 3.6 в [1]).

2. Основной результат

Контактные распределения на специальных контактных метрических многообразиях, которые принадлежат классам $\mathcal{F}_7$ и $\mathcal{F}_8$, не являются интегрируемыми. Распределения во всех остальных классах интегрируемы. Контактные метрические многообразия, принадлежащие классам $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_{10}$, являются локально приводимыми римановыми многообразиями.

3. Обозначения

Через x, y, z обозначим произвольные касательные векторные поля многообразия M. На $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ возникают два ортогональных распределения: $H = \{x; \eta(x) = 0\}$ и $V = \{x; x = \lambda\xi\}$. Определены проекторы $h : T_pM \to H$, $h = I - \eta \otimes \xi = -\varphi^2$, и $m : T_pM \to V$, $m = \eta \otimes \xi$. Рассматривается тензорное поле $f = h - m = -I - 2\varphi^2$. Так как $f^2 = I$, то из (1) следует

$$g(fx, y) = g(x, fy). \tag{4}$$

Таким образом, имеем структуру почти произведения на $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$.

Пусть ∇ — риманова связность метрики g. Определим тензор $G(x, y, z) = g((\nabla x f)y, z)$. Пусть $\mathcal{N}$ — тензор кручения поля f: $\mathcal{N}(x, y, z) = [fx, fy] + [x, y] - f[fx, y] - f[x, fy]$.

4. Контактные распределения

Лемма 1. $G(x, y, z) = -2[F(x, \varphi y, z) + F(x, y, \varphi z)]$.

Доказательство. Так как $\nabla\varphi^2 = \nabla\varphi \circ \varphi + \varphi \circ \nabla\varphi$, то в силу (1)

$$G(x, y, z) = g((\nabla_x(-I - 2\varphi^2))y, z) = \\ = -2g((\nabla_x\varphi) \circ \varphi y, z) - 2g(\varphi \circ (\nabla_x\varphi)y, z) = -2[F(x, \varphi y, z) + F(x, y, \varphi z)]. \quad \square$$

Лемма 2.

$$g(N(x, y), z) = 4[F(\varphi^2 x, \varphi y, z) + F(\varphi^2 x, y, \varphi z) - F(x, \varphi y, \varphi^2 z) + F(x, y, \varphi z) - \\ - F(\varphi^2 y, \varphi x, z) - F(\varphi^2 y, x, \varphi z) + F(y, \varphi x, \varphi^2 z) - F(y, x, \varphi z)].$$

Доказательство. Воспользуемся формулой $[x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x$, которая верна для симметрической линейной связности, и запишем $N(x, y)$ в эквивалентной форме

$$N(x, y) = (\nabla_{fx} f)y - (\nabla_{fy} f)x + (f \circ \nabla_y f)x - (f \circ \nabla_x f)y.$$

Из (4) следует

$$g(N(x, y), z) = G(fx, y, z) - G(fy, x, z) - G(y, x, fz) - G(x, y, fz).$$

Применяя лемму 1, получим

$$g(N(x, y), z) = -2[F(fx, \varphi y, z) + F(fx, y, \varphi z) - F(fy, \varphi x, z) + F(fy, x, \varphi z) + \\ + F(y, \varphi x, fz) + F(y, x, (f \circ \varphi)z) - F(x, \varphi y, fz) - F(x, y, (f \circ \varphi)z)].$$

Так как $f = -I - 2\varphi^2$ и $\varphi^3 = -\varphi$, то

$$g(N(x,y),z) = -2[-F(x,\varphi y,z) - 2F(\varphi^2 x,\varphi y,z) - F(x,y,\varphi z) - 2F(\varphi^2 x,y,\varphi z) + \\ + F(y,\varphi x,z) + 2F(\varphi^2 y,\varphi x,z) + F(y,x,\varphi z) + 2F(\varphi^2 y,x,\varphi z) - \\ - F(y,\varphi x,z) - 2F(y,\varphi x,\varphi^2 z)F(y,x,\varphi z) - 2F(y,x,\varphi^3 z) + \\ + F(x,\varphi y,z) + 2F(x,\varphi y,\varphi^2 z) + F(x,y,\varphi z) + 2F(x,y,\varphi^3 z)],$$

что и доказывает лемму. $\square$

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$\mathrm{Alt}(x,y)[K(x,y,z,\dots)] = K(x,y,z,\dots) - K(y,x,z,\dots).$$

Теорема 1. *Если многообразие принадлежит одному из классов $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_{10}$ и $\mathcal{F}_{11}$, то контактное распределение многообразия интегрируемо.*

Доказательство. Будем пользоваться соответствующей характеристикой класса $\mathcal{F}_a$ и применять лемму 2.

При $M \in \mathcal{F}_1$ имеем

$$\frac{n}{2} g(N(x,y),z) = \mathrm{Alt}(x,y)[g(\varphi^2 x,\varphi^2 y)\theta(\varphi z)] + \\ + g(\varphi^3 x,\varphi^2 y)\theta(\varphi^2 z) + g(\varphi^2 x,\varphi y)\theta(\varphi^2 z) + g(\varphi^3 x,\varphi y)\theta(\varphi^3 z) - \\ - g(x,\varphi^2 y)\theta(\varphi^3 z) - g(\varphi x,\varphi^2 y)\theta(\varphi^4 z) + g(x,\varphi y)\theta(\varphi^2 z) + g(\varphi x,\varphi y)\theta(\varphi^3 z)] = 0$$

в силу симметрии по x, y.

Если $M \in \mathcal{F}_2$, то, поскольку $\mathcal{F}_2 \subset W_1$, формулу (3) можно применить для тензорного поля F. При этом нужно вычислить каждый член в сумме леммы 2. Например,

$$F(\varphi^2 x,\varphi y,z) = -F(x,\varphi y,z) + \eta(x)F(\xi,\varphi y,z) = -F(x,\varphi y,z).$$

После этого выражение леммы 2 принимает вид

$$g(N(x,y),z) = 4\,\mathrm{Alt}(x,y)[-F(x,\varphi y,z) - F(x,y,\varphi z) + F(x,\varphi y,z) + F(x,y,\varphi z)] = 0.$$

Случай $M \in \mathcal{F}_3$ проверяется таким же образом, как и предыдущий.

Пусть $M \in \mathcal{F}_4$. Так как $\eta \circ \varphi = 0$, имеем

$$\frac{n}{2} g(N(x,y),z) = -\theta(\xi)\,\mathrm{Alt}(x,y)[g(\varphi^3 x,\varphi^2 y)\eta(z)] = 0.$$

Пусть $M \in \mathcal{F}_5$. Случай проверяется таким же образом, как $M \in \mathcal{F}_4$.

Пусть $M \in \mathcal{F}_{10}$ Так как $F(x,y,z) = \eta(x)F(\xi,\varphi y,\varphi z)$, то $F(x,y,\xi) = F(x,\xi,z) = 0$. Тогда из (2) имеем $F(x,\varphi y,\varphi z) = F(x,y,z)$ и, следовательно, $F(x,\varphi y,\varphi^2 z) = F(x,y,\varphi z)$. Применим лемму 2 и получим

$$g(N(x,y),z) = 4\,\mathrm{Alt}(x,y)[F(x,y,\varphi z) - F(x,\varphi y,\varphi^2 z)] = 0,$$

т. к. $F(\varphi^2 x,u,\nu) = \eta(\varphi^2 x)F(\xi,u,\nu) = 0$.

Если $M \in \mathcal{F}_{11}$, то из характеристических равенств класса $\mathcal{F}_{11}$ следует $F(\varphi^2 x,u,\nu) = 0$. Применим лемму 2 и получим

$$g(N(x,y),z) = 4\,\mathrm{Alt}(x,y)[F(x,y,\varphi z) - F(x,\varphi y,\varphi^2 z)] = 4\,\mathrm{Alt}(x,y)[\eta(x)\eta(y)\omega(\varphi z)] = 0.$$

Следовательно, для всех случаев имеем $N = 0$. $\square$

Лемма 3. $(d\eta)(x,y) = F(x,\varphi y,\xi) - F(y,\varphi x,\xi)$.

Доказательство. Используем следующие равенства: $g(\xi, \nabla_x \xi) = 0$, $g(\varphi^2 x, \xi) = 0$, $\nabla\varphi^2 = \nabla\varphi \circ \varphi + \varphi \circ \nabla\varphi$, $\eta(x) = g(\xi, x)$, а также тождество $x(g(y,z)) - g(\nabla_x y, z) - g(y, \nabla_x z) = 0$. Тогда имеем

$$(\nabla_x \eta)y = x(\eta(y)) - \eta(\nabla_x y) = x(\eta(y)) - g(\nabla_x y, \xi) = g(y, \nabla_x \xi). \tag{5}$$

С другой стороны, используя условие (1), получим

$$g((\nabla_x \varphi^2)y, \xi) = g((\nabla_x \varphi)\varphi y, \xi) + g((\nabla_x \varphi)y, \varphi\xi) = g((\nabla_x \varphi)\varphi y, \xi). \tag{6}$$

Тогда из (5) и (6) имеем

$$\begin{aligned} F(x, \varphi y, \xi) = g((\nabla_x \varphi)\varphi y, \xi) = g((\nabla_x \varphi^2)y, \xi) = g(\nabla_x(\varphi^2 y) - \varphi^2(\nabla_x y), \xi) = g(\nabla_x(\varphi^2 y), \xi) = \\ = x(g(\varphi^2 y, \xi)) - g(\varphi^2 y, \nabla_x \xi) = g(y - \eta(y)\xi, \nabla_x \xi) = g(y, \nabla_x \xi) = (\nabla_x \eta)y. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$(d\eta)(x, y) = (\nabla_x \eta)y - (\nabla_y \eta)x = F(x, \varphi y, \xi) - F(y, \varphi x, \xi). \quad \square$$

Теорема 2. $(d\eta)(x, y) = 0$, *если* $x, y \in H$ *и многообразие принадлежит хотя бы одному из классов* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_{10}$ *и* $\mathcal{F}_{11}$.

Доказательство. Используем лемму 3.

$M \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$. Из леммы 3 и (3) имеем $d\eta = 0$.

$M \in \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$. Из характеристических условий получим

$$F(x, \varphi y, \xi) = \frac{-\theta(\xi)}{2n} g(\varphi x, \varphi^2 y) \quad \text{и} \quad F(y, \varphi x, \xi) = \frac{-\theta(\xi)}{2n} g(\varphi y, \varphi^2 x).$$

Из (1) следует $d\eta = 0$.

$M \in \mathcal{F}_{10}$. Из характеристических уравнений этого класса получим

$$(d\eta)(x, y) = \eta(x)F(\xi, \varphi^2 y, \varphi\xi) - \eta(y)F(\xi, \varphi^2 x, \varphi\xi) = 0.$$

$M \in \mathcal{F}_{11}$. Из характеристических уравнений этого класса получим

$$F(x, \varphi y, \xi) = \eta(x)\omega(\varphi y) \quad \text{и} \quad F(y, \varphi x, \xi) = \eta(y)\omega(\varphi x).$$

Если $x, y \in H$, то $\eta(x) = \eta(y) = 0$, следовательно, $(d\eta)(x, y) = 0$. $\square$

Утверждение теоремы 2 эквивалентно утверждению теоремы 1, т. к. по теореме Фробениуса распределение H, заданное формой η, интегрируемо тогда и только тогда, когда $d\eta$ обращается в нуль на H.

Теорема 3. *Римановы многообразия классов* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3$ *и* $\mathcal{F}_{10}$ *приводимы.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\nabla f = 0$.

Пусть $M \in \mathcal{F}_1$ (либо $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3$). Из характеристического свойства (3) следует, что условие (2) можно записать в эквивалентной форме $F(x, \varphi y, \varphi z) = F(x, y, z)$. Отсюда получим $F(x, \varphi^2 y, \varphi z) = F(x, \varphi y, z)$. Тогда в силу леммы 1

$$\begin{aligned} G(x, y, z) = g((\nabla_x f)y, z) = -2[F(x, \varphi^2 y, \varphi z) + F(x, y, \varphi z)] = \\ = -2[-F(x, y, \varphi z) + \eta(y)F(x, \xi, \varphi z) + F(x, y, \varphi z)] = 0, \end{aligned}$$

следовательно, $\nabla f = 0$.

При $M \in \mathcal{F}_{10}$ сделаем замену $z \to \varphi z$ во втором уравнении (2). Получим

$$F(x, \varphi y, \varphi^2 z) = F(x, y, \varphi z) - \eta(y)F(x, \xi, \varphi z),$$

что можно записать в эквивалентной форме

$$F(x, \varphi y, z) + F(x, y, \varphi z) = \eta(z)F(x, \varphi y, \xi) + \eta(y)F(x, \xi, \varphi z).$$

С другой стороны, из характеристического уравнения для $\mathcal{F}_{10}$ следует $F(x,y,\xi) = F(x,\xi,y) = 0$. Поэтому лемма 1 запишется в эквивалентной форме

$$g((\nabla_x f)y,z) = -2[\eta(z)F(x,\varphi y,\xi) + \eta(y)F(x,\xi,\varphi z)] = 0, \quad \text{т. е.} \quad \nabla f = 0. \quad \square$$

Следствие. Если $M \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3$, то локально M будет являться декартовым произведением интегрального многообразия на одномерное многообразие. Так как на интегральном многообразии φ индуцирует комплексную структуру, то из (1) следует, что интегральное многообразие будет B-многообразием.

Лемма 4. *Если многообразие принадлежит одному из классов $\mathcal{F}_6$, $\mathcal{F}_7$, $\mathcal{F}_8$, $\mathcal{F}_9$, то*

$$g(N(x,y),z) = -4\eta(z)d\eta(x,y).$$

Доказательство. $F(\xi,y,z) = 0$ для всех случаев. Так как $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$, то

$$F(\varphi^2 x, yz) = -F(x,y,z).$$

Используя лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} g(N(x,y),z) &= 4\operatorname{Alt}(x,y)[-F(x,\varphi y,z) - F(x,y,\varphi z) - F(x,\varphi y,\varphi^2 z) + F(x,y,\varphi z) = \\ &= 4\operatorname{Alt}(x,y)[-F(x,\varphi y,z) + F(x,\varphi y,z) - \eta(z)F(x,\varphi y,\xi)] = \\ &= -4\eta(z)[F(x,\varphi y,\xi) - F(y,\varphi x,\xi)] = -4\eta(z)(d\eta)(x,y). \end{aligned}$$

В конце этой цепи равенств применена лемма 3. $\square$

Лемма 5. *Если многообразие принадлежит классу $\mathcal{F}_7$ (либо $\mathcal{F}_8$), то*

$$(d\eta)(x,y) = 2F(x,\varphi y,\xi).$$

Доказательство. Пусть $M \in \mathcal{F}_7$. Тогда характеристическими условиями будут

$$\begin{aligned} &\text{i.} \quad F(x,y,z) = -F(\varphi x,\varphi y,z) - F(\varphi x,y,\varphi z), \\ &\text{ii.} \quad F(x,y,z) = -F(y,z,x) - F(z,x,y), \\ &\phantom{\text{ii.}} \quad F(\xi,y,z) = 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену $y \to \varphi y$, $z \to \xi$ и $x \to \varphi y$, $z \to \xi$, $y \to x$ соответственно в ii и i и получим

$$\begin{aligned} F(x,\varphi y,\xi) &= -F(\varphi y,\xi,x) - F(\xi,x,\varphi y) = -F(\varphi y,x,\xi), \\ F(\varphi y,x,\xi) &= -F(\varphi^2 y,\varphi x,\xi) = F(y,\varphi x,\xi) - \eta(y)F(\xi,\varphi x,\xi) = F(y,\varphi x,\xi). \end{aligned}$$

После сравнения результатов имеем $F(x,\varphi y,\xi) = -F(y,\varphi x,\xi)$. Далее, применяя лемму 3, получим

$$(d\eta)(x,y) = F(x,\varphi y,\xi) - F(y,\varphi x,\xi) = 2F(x,\varphi y,\xi).$$

Пусть $M \in \mathcal{F}_8$. Тогда характеристическими условиями будут

$$\begin{aligned} &\text{i.} \quad F(x,y,z) = F(\varphi x,\varphi y,z) + F(\varphi x,y,\varphi z), \\ &\text{ii.} \quad F(x,y,z) = -F(y,z,x) + F(z,x,y) + 2F(\varphi x,\varphi y,z), \\ &\phantom{\text{ii.}} \quad F(\xi,y,z) = 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену $x \to \varphi x$ и $z \to \xi$ соответственно в i и ii. Получим

$$\begin{aligned} F(\varphi x,y,\xi) &= F(\varphi^2 x,\varphi y,\xi) = -F(x,\varphi y,\xi), \\ F(\varphi x,y,\xi) &= -F(y,\xi,\varphi x) + 2F(\varphi^2 x,\varphi y,\xi) = -F(y,\varphi x,\xi) - 2F(x,\varphi y,\xi). \end{aligned}$$

Отсюда $F(y,\varphi x,\xi) = -F(x,\varphi y,\xi)$. Далее применим лемму 3: $(d\eta)(x,y) = 2F(x,\varphi y,\xi)$. $\square$

Теорема 4. *Если многообразие принадлежит классу $\mathcal{F}_6$ (либо $\mathcal{F}_9$), то контактное распределение интегрируемо.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathcal{F}_6$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{i.}\quad & F(x,y,z) = -F(\varphi x,\varphi y,z) - F(\varphi x,y,\varphi z),\\ \text{ii.}\quad & F(x,y,z) = -F(y,z,x) + F(z,x,y) - 2F(\varphi x,\varphi y,z),\\ & F(\xi,y,z) = 0. \end{aligned}$$

Сделав замену $y \to \varphi y$, $z \to \xi$ соответственно в i и ii, получим

$$\begin{aligned} & F(x,\varphi y,\xi) = -F(\varphi x,\varphi^2 y,\xi) = F(\varphi x,y,\xi),\\ & F(x,\varphi y,\xi) = -F(\varphi y,\xi,x) - 2F(\varphi x,\varphi^2 y,\xi) = -F(\varphi y,x,\xi) + 2F(\varphi x,y,\xi). \end{aligned}$$

После сравнения результатов имеем $F(\varphi y,x,\xi) = F(\varphi x,y,\xi)$, что можно записать в эквивалентной форме $F(x,\varphi y,\xi) = F(y,\varphi x,\xi)$. Далее, после применения леммы 3 получим $d\eta = 0$.

Если $M \in \mathcal{F}_9$, то

$$\begin{aligned} \text{i.}\quad & F(x,y,z) = F(\varphi x,\varphi y,z) + F(\varphi x,y,\varphi z),\\ \text{ii.}\quad & F(x,y,z) = -F(y,z,x) - F(z,x,y),\\ & F(\xi,y,z) = 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену $y \to \varphi y$ и $z \to \xi$ соответственно в i и ii. Получим

$$\begin{aligned} & F(x,\varphi y,\xi) = F(\varphi x,\varphi^2 y,\xi) = -F(\varphi x,y,\xi),\\ & F(x,\varphi y,\xi) = -F(\varphi y,\xi,x) = -F(\varphi y,x,\xi). \end{aligned}$$

После сравнения результатов имеем $F(\varphi x,y,\xi) = F(\varphi y,x,\xi)$, что можно записать в эквивалентной форме $F(x,\varphi y,\xi) = F(y,\varphi x,\xi)$. Применяя лемму 3, получим $d\eta = 0$. □

Теорема 5. *Если многообразие принадлежит классу $\mathcal{F}_7$ (либо $\mathcal{F}_8$) и контактное распределение интегрируемо, то $F = 0$.*

Доказательство. Из леммы 5 имеем $F(x,\varphi y,\xi) = 0$. Сделаем замену $y \to \varphi y$ и получим

$$F(x,y,\xi) = 0. \tag{7}$$

С другой стороны, в [1] доказано, что векторные пространства соответствующих классов $\mathcal{F}_7$ и $\mathcal{F}_8$ являются подпространствами векторного пространства W_2, которое имеет характеристическое свойство $W_2 = \{F \mid P_2F = F\}$, где

$$(P_2F)(x,y,z) = \eta(y)F(hx,\xi,hz) + \eta(z)F(hx,hy,\xi).$$

Тогда из условия $M \in \mathcal{F}_7$ (либо $\mathcal{F}_8$) в силу (7) следует

$$F(x,y,z) = \eta(y)F(hx,\xi,hz) + \eta(z)F(hx,hy,\xi) = 0 \quad \text{или} \quad \nabla\varphi = 0. \quad \square$$

Следствие. Если проекция тензора F на векторное пространство $\mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8$ отлична от нуля, то контактное распределение не будет интегрируемым.

Пример. Времениподобная сфера S была рассмотрена в [1] в пространстве $\mathbb{R}^{2n+2} = \{p^1,\dots,p^{n+1};\ q^1,\dots,q^{n+1} \mid p^i,\ q^i \in \mathbb{R}\}$ как риманово многообразие над полем комплексных чисел с комплексной структурой J. Метрика определена следующим образом:

$$g(a,a) = -\delta_{ij}\lambda^i\lambda^j + \delta_{ij}\mu^i\mu^j,$$

где $a = \lambda^i\frac{\partial}{\partial p^i} + \mu^i\frac{\partial}{\partial q^i}$. Было доказано, что на этой сфере возникает почти контактная структура, согласованная с метрикой сферы, как указано в введении. Эта сфера — многообразие типа $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5$.

В $\mathbb{R}^4$ рассмотрим трехмерную сферу с радиус-вектором

$$Z = (\operatorname{ch} u\cdot\cos\nu,\ \operatorname{ch} u\cdot\sin\nu,\ \operatorname{sh} u\cdot\cos w,\ \operatorname{sh} u\cdot\sin\nu).$$

Тогда

$$\xi = JZ = (-\operatorname{sh} u \cdot \cos w,\ -\operatorname{sh} u \cdot \sin \nu,\ \operatorname{ch} u \cdot \cos \nu,\ \operatorname{ch} u \cdot \sin \nu)$$

является структурным векторным полем на сфере S. Векторные поля

$$V_1 = \frac{\partial Z}{\partial u} = (\operatorname{sh} u \cdot \cos \nu,\ \operatorname{sh} u \cdot \sin \nu,\ \operatorname{ch} u \cdot \cos w,\ \operatorname{ch} u \cdot \sin w),$$
$$V_2 = \frac{\partial Z}{\partial \nu} = (-\operatorname{ch} u \cdot \sin \nu,\ \operatorname{ch} u \cdot \cos \nu,\ 0,\ 0),$$
$$V_3 = \frac{\partial Z}{\partial w} = (0,\ 0,\ -\operatorname{sh} u \cdot \sin w,\ \operatorname{sh} u \cdot \cos w)$$

линейно независимы на S и

$$g(V_1, JZ) = \operatorname{ch}(2u) \cdot \cos(\nu - w), \quad g(V_2, JZ) = -\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2u) \cdot \sin(\nu - w), \quad g(V_3, JZ) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2u) \cdot \sin(\nu - w).$$

Пусть $A = V_2 + V_3$ и $B = \operatorname{th}(2u)V_1 + \operatorname{ctg}(\nu - w)(V_2 - V_3)$. Для A и B имеем $g(A, \xi) = g(B, \xi) = 0$, следовательно, A и B определяют почти контактное распределение на S. Так как

$$[A, B] = \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial w}\right) \operatorname{ctg}(\nu - w)[V_2, V_3] = 0,$$

то это распределение интегрируемо.

Литература

1. Ganchev G., Mihova V., Gribachev K. *Almost-contact manifolds with B-metric* // Math. Balkanica. New ser. – 1993. – V. 7. – P. 261–276.
2. Крищунайте А.Л. *Почти контактные структуры на гиперповерхностях в четырехмерном центральном и биаффинном пространстве эллиптического и гиперболического типа* // Лит. матем. сб. – 1968. – Т. 7. – № 3. – С. 422–437.
3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Пробл. геометрии. – М., 1979. – Т. 9. – 247 с.

Пловдивский университет
(*Болгария*)

Поступила
30.06.2000