И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 1 (500)

УДК 517.988:519.677

Э.М. ВИХТЕНКО, Р.В. НАММ

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПОЛУКОЭРЦИТИВНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ, ОСНОВАННОМ НА МЕТОДЕ ИТЕРАТИВНОЙ ПРОКСИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В работе исследуются вариационные неравенства в механике, в которых условие строгой коэрцитивности (сильной выпуклости) соответствующего минимизируемого функционала выполняется лишь на подпространствах конечной коразмерности исходного гильбертова пространства. К такого рода полукоэрцитивным вариационным неравенствам сводится ряд важных с практической точки зрения задач механики сплошных сред, например, контактная задача теории упругости в случае, когда одно из контактируемых тел не закреплено ([1], с. 112; [2], с. 274).

Полукоэрцитивные вариационные неравенства в механике допускают одну общую абстрактную схему, которая позволяет построить и обосновать для решения таких неравенств методы, основанные на итеративной проксимальной регуляризации.

Итак, пусть заданы два гильбертовых пространства V, H, причем $H \subset V$, H_1 — конечномерное подпространство в H, $Q_1 : H \to H_1$ — ортопроектор, $Q_2 = I - Q_1$, где I — тождественный оператор.

Предположим далее, что задан выпуклый, конечнозначный функционал $\gamma : H \to R$, обладающий свойством

$$\gamma(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \le \lambda\gamma(v_1) + (1-\lambda)\gamma(v_2) - \delta\lambda(1-\lambda)\|Q_2v_1 - Q_2v_2\|_H^2, \quad 0 \le \lambda \le 1. \tag{1}$$

Свойство (1), как нетрудно видеть, означает, что функционал γ обладает свойством сильной выпуклости на подпространстве $H_2 \equiv Q_2H$ с константой $\delta > 0$.

Предположим, что величина $|||u|||_H^2 \equiv \|Q_2u\|_H^2 + \|u\|_V^2$ эквивалентна $\|u\|_H^2$.

Рассматривается экстремальная задача

$$\gamma(u) \ \to \ \min, \quad u \in G, \tag{2}$$

где G — выпуклое замкнутое множество в H. Для решения задачи (2) рассмотрим метод итеративной проксимальной регуляризации:

а) задаем произвольный элемент $u^0 \in H$;

б) обозначая $\overline{u}^{k+1} = \arg\min\limits_{u\in G}\{\gamma(u) + \|u - u^k\|_V^2\}$, определяем u^{k+1} по критерию

$$\|u^{k+1} - \overline{u}^{k+1}\|_H \le \varepsilon_{k+1},$$

где $\{\varepsilon_k\}$ — заданная последовательность положительных чисел.

Ниже будет показано, что регуляризирующая добавка $\|u - u^k\|_V^2$ к функционалу $\gamma(u)$ порождает сильно выпуклый на H функционал $\psi_{k+1} = \gamma(u) + \|u - u^k\|_V^2$. Это обстоятельство обеспечивает при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ существование и единственность элемента $\overline{u}^{k+1}$ и позволяет применять эффективные численные методы для поиска приближенных решений u^{k+1}.

Отметим, что аналогичная схема итеративной prox-регуляризации рассмотрена в [3], но для функционалов, представимых в виде $\gamma(u) = \gamma_1(Q_1u) + \gamma_2(Q_2u)$, где γ_1 — выпуклый на $H_1 \equiv Q_1H$, а γ_2 — сильно выпуклый на $H_2 \equiv Q_2H$ функционалы. Такие функционалы входят в множество функционалов, обладающих свойством (1), однако не исчерпывают их. В частности, к этому классу не относятся негладкие функционалы, возникающие в задачах, учитывающих трение на границе области.

Теорема. *Пусть*

1) *множество* $G^* = \{u \in G : \gamma(u) = \min_{v \in V} \gamma(v)\}$ *непусто;*

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$.

Тогда последовательность $\{u^k\}$ *сходится к некоторому элементу* $u^* \in G^*$ *в норме* H.

Доказательство. Покажем, что функционал $\psi_{k+1}(u) = \gamma(u) + \|u - u^k\|_V^2$ является сильно выпуклым на H. Действительно,

$$\begin{gathered}\psi_{k+1}(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) = \gamma(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) + \|\lambda(u_1 - u^k) + (1-\lambda)(u_2 - u^k)\|_V^2 = \\ = \gamma(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) + \lambda\|u_1 - u^k\|_V^2 + (1-\lambda)\|u_2 - u^k\|_V^2 - \lambda(1-\lambda)\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq \\ \leq \lambda\gamma(u_1) + (1-\lambda)\gamma(u_2) - \delta\lambda(1-\lambda)\|Q_2u_1 - Q_2u_2\|_H^2 + \lambda\|u_1 - u^k\|_V^2 + \\ +(1-\lambda)\|u_2 - u^k\|_V^2 - \lambda(1-\lambda)\|u_1 - u_2\|_V^2 = \\ = \lambda\psi_{k+1}(u_1) + (1-\lambda)\psi_{k+1}(u_2) - \delta\lambda(1-\lambda)\|Q_2u_1 - Q_2u_2\|_H^2 - \lambda(1-\lambda)\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq \\ \leq \lambda\psi_{k+1}(u_1) + (1-\lambda)\psi_{k+1}(u_2) - \min\{1,\delta\}\lambda(1-\lambda)(\|Q_2u_1 - Q_2u_2\|_H^2 + \|u_1 - u_2\|_V^2) = \\ = \lambda\psi_{k+1}(u_1) + (1-\lambda)\psi_{k+1}(u_2) - \min\{1,\delta\}\lambda(1-\lambda)\|u_1 - u_2\|_H^2,\end{gathered}$$

откуда вытекает сильная выпуклость функционала ψ_{k+1} на H. Тем самым элементы $\overline{u}^k$, $k = 1, 2, \ldots$, существуют и единственны [1].

Ниже символами $(\cdot,\cdot)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ будем обозначать скалярные произведения в H и V соответственно. Так как $\overline{u}^{k+1}$ есть точка минимума функционала ψ_{k+1} на множестве G, то из теоремы о субдифференциале суммы выпуклых функций ([4], с. 35) вытекает существование такого элемента $b \in \partial\gamma(\overline{u}^{k+1})$ ($\partial\gamma(\overline{u}^{k+1})$ — субдифференциал функционала γ в точке $\overline{u}^{k+1}$), что

$$0 \leq (b, u - \overline{u}^{k+1}) + 2\langle \overline{u}^{k+1} - u^k, u - \overline{u}^{k+1}\rangle \quad \forall u \in G. \tag{3}$$

Возьмем $u = u^*$, где u^* — произвольный элемент G^*. Имеем

$$\begin{gathered}\gamma(\lambda u^* + (1-\lambda)\overline{u}^{k+1}) \leq \lambda\gamma(u^*) + (1-\lambda)\gamma(\overline{u}^{k+1}) - \delta\lambda(1-\lambda)\|Q_2u^* - Q_2\overline{u}^{k+1}\|_H^2, \\ \gamma(\overline{u}^{k+1} + \lambda(u^* - \overline{u}^{k+1})) - \gamma(\overline{u}^{k+1}) \leq \lambda(\gamma(u^*) - \gamma(\overline{u}^{k+1})) - \delta\lambda(1-\lambda)\|Q_2u^* - Q_2\overline{u}^{k+1}\|_H^2, \\ (b, u - \overline{u}^{k+1}) \leq \frac{\gamma(\overline{u}^{k+1} + \lambda(u^* - \overline{u}^{k+1})) - \gamma(\overline{u}^{k+1})}{\lambda} \leq \gamma(u^*) - \gamma(\overline{u}^{k+1}) - \delta(1-\lambda)\|Q_2u^* - Q_2\overline{u}^{k+1}\|_H^2.\end{gathered}$$

Из (3) вытекает

$$2\langle \overline{u}^{k+1} - u^k, \overline{u}^{k+1} - u^*\rangle \leq \gamma(u^*) - \gamma(\overline{u}^{k+1}) - \delta\|Q_2u^* - Q_2\overline{u}^{k+1}\|_H^2.$$

По теореме косинусов имеем

$$2\langle u^* - \overline{u}^{k+1}, u^k - \overline{u}^{k+1}\rangle = \|u^* - \overline{u}^{k+1}\|_V^2 + \|u^k - \overline{u}^{k+1}\|_V^2 - \|u^k - u^*\|_V^2.$$

Тем самым

$$\|u^* - \overline{u}^{k+1}\|_V^2 + \|u^k - \overline{u}^{k+1}\|_V^2 - \|u^k - u^*\|_V^2 \leq \gamma(u^*) - \gamma(\overline{u}^{k+1}) - \delta\|Q_2u^* - Q_2\overline{u}^{k+1}\|_H^2,$$

откуда

$$\begin{aligned}\|u^* - \overline{u}^{k+1}\|_V^2 + \delta\|Q_2u^* - Q_2\overline{u}^{k+1}\|_H^2 + \|u^k - \overline{u}^{k+1}\|_V^2 + \gamma(\overline{u}^{k+1}) - \gamma(u^*) \leq \|u^k - u^*\|_V^2 \leq \\ \leq \|u^k - u^*\|_V^2 + \delta\|Q_2u^* - Q_2\overline{u}^{k+1}\|_H^2.\end{aligned} \tag{4}$$

Введем в H новое скалярное произведение

$$[u, v] \equiv \langle u, v\rangle + \delta(Q_2u, Q_2v)$$

и соответствующую норму $\langle\langle\cdot\rangle\rangle_H$, которая, как легко видеть, связана с $|||\cdot|||_H$ соотношением эквивалентности

$$\min\{1,\delta\}|||u|||_H^2 \le \langle\langle u\rangle\rangle_H^2 \le \max\{1,\delta\}|||u|||_H^2.$$

Из (4) вытекает

$$\langle\langle u^* - \overline{u}^{k+1}\rangle\rangle_H \le \langle\langle u^* - u^k\rangle\rangle_H.$$

Так как

$$\langle\langle u^* - \overline{u}^{k+1}\rangle\rangle_H = \langle\langle u^* - u^{k+1} + u^{k+1} - \overline{u}^{k+1}\rangle\rangle_H \ge$$
$$\ge \langle\langle u^* - u^{k+1}\rangle\rangle_H - \langle\langle u^{k+1} - \overline{u}^{k+1}\rangle\rangle_H \ge \langle\langle u^* - u^{k+1}\rangle\rangle_H - C\varepsilon_{k+1},$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, то

$$\langle\langle u^* - u^{k+1}\rangle\rangle_H - C\varepsilon_{k+1} \le \langle\langle u^* - u^k\rangle\rangle_H. \tag{5}$$

Суммируя по k от 1 до n, имеем

$$\langle\langle u^* - u^{n+1}\rangle\rangle_H - \langle\langle u^* - u^1\rangle\rangle_H \le C\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k+1}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{k+1}$ сходится, то последовательность $\{u^k\}$ ограничена в H. Тогда в H ограничена и последовательность $\{\overline{u}^k\}$.

Снова оцениваем $\langle\langle u^* - u^{k+1}\rangle\rangle_H$. Имеем

$$\langle\langle u^* - \overline{u}^{k+1}\rangle\rangle_H^2 = \langle\langle u^* - u^{k+1} + u^{k+1} - \overline{u}^{k+1}\rangle\rangle_H^2 = \langle\langle u^{k+1} - \overline{u}^{k+1}\rangle\rangle_H^2 +$$
$$+ 2[u^{k+1} - \overline{u}^{k+1}, u^* - u^{k+1}] + \langle\langle u^{k+1} - u^*\rangle\rangle_H^2 \ge \langle\langle u^{k+1} - u^*\rangle\rangle_H^2 - \widetilde{C}\varepsilon_{k+1},$$

где $\widetilde{C} > 0$ — некоторая постоянная. Из неравенства (4) вытекает

$$\|u^k - \overline{u}^{k+1}\|_V^2 + \gamma(\overline{u}^{k+1}) - \gamma(u^*) - \widetilde{C}\varepsilon_{k+1} \le \langle\langle u^k - u^*\rangle\rangle_H^2 - \langle\langle u^{k+1} - u^*\rangle\rangle_H^2.$$

Суммируя по k от 1 до $S-1$, имеем

$$\sum_{k=1}^{S-1}\big(\gamma(\overline{u}^{k+1}) - \gamma(u^*)\big) + \sum_{k=1}^{S-1}\|u^k - \overline{u}^{k+1}\|_V^2 - \widetilde{C}\sum_{k=1}^{S-1}\varepsilon_{k+1} \le \langle\langle u^1 - u^*\rangle\rangle_H^2 - \langle\langle u^S - u^*\rangle\rangle_H^2.$$

Отсюда вытекает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\big(\gamma(\overline{u}^{k+1}) - \gamma(u^*)\big)$ сходится и, следовательно, $\{\overline{u}^k\}$ есть минимизирующая последовательность, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty}\gamma(\overline{u}^k) = \gamma(u^*)$.

Из последовательности $\{\overline{u}^k\}$ в силу ее ограниченности в H можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{\overline{u}^{k_j}\}$. Пусть $\widetilde{u}$ — ее слабый предел. Так как G — выпуклое замкнутое множесто в H, то G слабо замкнуто в H. Значит, $\widetilde{u} \in G$. Функционал γ выпуклый и конечнозначный, следовательно, непрерывный на H. Тогда γ слабо полунепрерывный снизу, т. е. $\lim\limits_{j\to\infty}\gamma(\overline{u}^{k_j}) \ge \gamma(\widetilde{u})$. Значит, $\gamma(\widetilde{u}) = \min\limits_{v\in G}\gamma(v)$. Поэтому $\widetilde{u} \in G^*$. В силу того, что u^* — произвольный элемент из G^*, можно считать $u^* = \widetilde{u}$, т. е. $\{\overline{u}^{k_j}\}$ слабо сходится к u^* в H.

Для $0 < \lambda < 1$ имеем

$$\gamma(\lambda\overline{u}^k + (1-\lambda)u^*) \le \lambda\gamma(\overline{u}^k) + (1-\lambda)\gamma(u^*) - \delta\lambda(1-\lambda)\|Q_2(\overline{u}^k - u^*)\|_H^2,$$
$$\delta\lambda(1-\lambda)\|Q_2(\overline{u}^k - u^*)\|_H^2 \le \lambda\gamma(\overline{u}^k) + (1-\lambda)\gamma(u^*) - \gamma(\lambda\overline{u}^k + (1-\lambda)u^*),$$
$$\delta\lambda(1-\lambda)\|Q_2(\overline{u}^k - u^*)\|_H^2 \le \lambda(\gamma(\overline{u}^k) - \gamma(u^*)) + \gamma(u^*) - \gamma(u^* + \lambda(\overline{u}^k - u^*)).$$

Так как $\gamma(u^*) - \gamma(u^* + \lambda(\overline{u}^k - u^*)) \le 0$, то

$$\delta\lambda(1-\lambda)\|Q_2(\overline{u}^k - u^*)\|_H^2 \le \lambda(\gamma(\overline{u}^k) - \gamma(u^*)).$$

Делим последнее неравенство на $\lambda > 0$ и устремляем λ к нулю, тогда

$$\delta \|Q_2(\overline{u}^k - u^*)\|_H^2 \le \gamma(\overline{u}^k) - \gamma(u^*).$$

Так как $\{\overline{u}^k\}$ — минимизирующая последовательность, то

$$\|Q_2(\overline{u}^k - u^*)\|_H^2 \to 0, \quad k \to \infty.$$

Таким образом, последовательность $\{Q_2\overline{u}^{k_j}\}$ сильно сходится к Q_2u^* в H, откуда следует слабая сходимость $\{Q_1\overline{u}^{k_j}\}$ к Q_1u^*. Так как H_1 — конечномерное подпространство в H, то $\{Q_1\overline{u}^{k_j}\}$ сильно сходится к Q_1u^* в H. Тогда и подпоследовательность $\{u^{k_j}\}$ сходится сильно к u^*. Покажем, что и вся последовательность $\{u^{k_j}\}$ сходится сильно к u^* в H. Суммируя неравенство (5) по r от k_j до k, считая, что $k+1 > k_j$, получим

$$\langle\langle u^{k+1} - u^* \rangle\rangle_H \le \langle\langle u^{k_j} - u^* \rangle\rangle_H + \sum_{r=k_j}^{k} \varepsilon_r.$$

Устремляя j к бесконечности с сохранением соотношения $k_j < k+1$, получим

$$\lim_{k\to\infty} \langle\langle u^k - u^* \rangle\rangle_H = 0$$

или

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u^*\|_H = 0. \qquad \square$$

Пример. Задача теории упругости с заданным трением.

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей Γ. Для вектора перемещений $u = (u_1, u_2)$ определим тензор

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i,j = 1,2.$$

При фиксированном разбиении $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_f$ и фиксированных функциях $a_{ijpl} \in L_\infty(\Omega)$ $(i,j,p,l = 1,2;\ a_{ijpl} = a_{jipl} = a_{plij})$, $F \in [L_2(\Omega)]^2$, $P \in [L_2(\Gamma_1)]^2$, $T \in [L_2(\Gamma_f)]^2$, $g \in L_\infty(\Gamma_f)$, $g > 0$ на Γ_f требуется найти минимум функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega a_{ijpl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{pl}(u)\,d\Omega - \int_\Omega F_i u_i\,d\Omega - \int_{\Gamma_1} P_i u_i\,d\Gamma - \int_{\Gamma_f} T_n u_n\,d\Gamma + \int_{\Gamma_f} g|u_t|\,d\Gamma$$

на пространстве $[W_2^1(\Omega)]^2$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Здесь $u_n = u \cdot n$, $u_t = u - u_n \cdot n$, $T_n = T \cdot n$ (n — единичный вектор внешней нормали к Γ).

Ядро R билинейной формы $a(u,v) = \int\limits_\Omega a_{ijpl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{pl}(u)\,d\Omega$ состоит из вектор-функций $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, где $\rho_1(x) = a_1 - bx_2$, $\rho_2 = a_2 + bx_1$, и его размерность равна трем.

В предположении, что существует константа $\alpha_0 > 0$, при которой

$$a_{ijpl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{pl}(u) \ge \alpha_0\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u),$$

данная задача разрешима, если при любом ненулевом векторе $\rho \in R$ справедливо неравенство [2]

$$\int_{\Gamma_f} g|\rho_f|\,d\Gamma - |L(\rho)| > 0.$$

Однако, по-видимому, остается открытым вопрос о единственности решения. В частном случае единственность решения исследована в [5].

На множестве $[W_2^1(\Omega)]^2$ определим скалярное произведение следующим образом:

$$(u,v) = \left(\int_\Omega u_i\,d\Omega\right)\left(\int_\Omega v_i\,d\Omega\right) + \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,d\Omega.$$

При таком выборе скалярного произведения квадратичная форма $a(u,v)$ строго коэрцитивна на ортогональном дополнении к множеству R ([6], с. 121), т. е. существует такая постоянная $\omega > 0$, что

$$a(u,u) \geq \omega \|u\|^2 \quad \forall u \in R^{\perp}.$$

Тем самым минимизируемый функционал удовлетворяет свойству (1), если $H_1 \equiv R$, $H_2 \equiv R^{\perp}$.

Возьмем в качестве пространства V абстрактной схемы пространство $[L_2(\Omega)]^2$. Тогда предположение, что величина $|||u|||_H^2 \equiv \|Q_2 u\|_H^2 + \|u\|_V^2$ эквивалентна норме $\|u\|_H^2$, является следствием неравенства Корна [6].

Метод итеративной проксимальной регуляризации для решения задачи теории упругости с заданным трением на основе конечноэлементной аппроксимации вспомогательных задач вида

$$J(u) + \|u - u^{k+1}\|_V^2$$

впервые был применен в [7]. Однако в данной статье не рассматривалась общая схема исследования и обоснование метода проводилось для конкретного функционала $J(u)$. Исследования по применению метода для решения негладких вариационных неравенств можно найти в [8], [9].

Литература

1. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. *Решение вариационных неравенств в механике.* – М.: Мир, 1986. – 270 с.
2. Kikuchi N., Oden T. *Contact problem in elasticity: a study of variational inequalities and finite element method.* – Philadelphia: SIAM, 1988. – 495 p.
3. Каплан А.А. *Об устойчивости методов решения задач выпуклого программирования и вариационных неравенств* // Тр. ин-та матем. СО АН СССР. Модели и методы оптимизации. – 1988. – Т. 10. – С. 132–159.
4. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 399 с.
5. Намм Р.В. *О единственности гладкого решения в статической задаче с трением по закону Кулона и двусторонним контактом* // ПММ. – 1995. – Т. 59. – № 2. – С. 330–335.
6. Фикера Г. *Теоремы существования в теории упругости.* – М.: Мир, 1974. – 159 с.
7. Золотухин А.Я., Намм Р.В. *Метод решения негладких полукоэрцитивных вариационных неравенств, основанный на методе пошаговой prox-регуляризации* // Тр. НИИ матем.-информац. основ обучения Новосиб. ун-та. Актуальн. проблемы современ. матем. – 1997. – Т. 3. – С. 68–74.
8. Золотухин А.Я., Намм Р.В., Пачина А.В. *Приближенное решение вариационной задачи Мосолова и Мясникова с трением на границе по закону Кулона* // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2001. – Т. 4. – № 2. – С. 163–177.
9. Намм Р.В., Сачков С.А. *Об устойчивом методе решения задачи Мосолова и Мясникова с трением на границе, основанном на схеме двойственности* // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2002. – Т. 5. – № 4. – С. 351–365.

Хабаровский государственный технический университет

Поступила 03.06.2003