ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

УДК 517.988

А.Л. АГЕЕВ, Т.В. АНТОНОВА

О ЗАДАЧЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ

1. Введение и постановка задачи

При решении многих прикладных задач необходимо не просто найти искомую функцию, а выделить характеристики ее особенностей (тип, положение и т.д.). По видимому, первоначально такого рода задачи возникли в спектроскопии (ссылки на литературу см. в [1]–[3]). Некоторые постановки задач и ссылки на дополнительные источники можно найти, например, в недавно вышедших монографиях [4]–[5].

Далее рассматривается случай одномерной функции x, имеющей конечное число разрывов первого рода (предполагается, что вне разрывов функция обладает достаточной гладкостью, число и положения разрывов неизвестны). Нас будет интересовать определение по приближенно заданной функции x_δ числа разрывов и приближенное определение для каждого из разрывов положения и величины скачка. Задача аппроксимации разрывов и другие задачи выделения характеристик особенностей решения некорректно поставленных задач теоретически изучались в цикле работ [6]–[7] (см. также [8]). В этих работах был сконструирован алгоритм, для которого получены теоретические оценки точности аппроксимации положения разрывов и величин скачков.

Для обоснования работоспособности алгоритма и получения оценок точности в этих работах было введено ограничение снизу на близость точек разрыва между собой. Следует отметить, что введение условий такого рода необходимо, чтобы гарантировать работоспособность любого алгоритма выделения разрывов. Хорошо известно, что в практических расчетах также возникает ограничение на минимальное расстояние между разрывами. Если положения особенностей ближе некоторого порога, то количество особенностей определяется неправильно и существенно падает точность аппроксимации их положения (уровень погрешности фиксирован). На практике этот порог чаще всего определяют с помощью методических численных расчетов.

Теоретическое исследование этой проблемы проводилось в [1]–[3]. В статистической постановке рассматривалось решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода по определению функции x, являющейся конечной суммой δ-функций (каждая из них может быть умножена на свою константу). Был введен порог, получивший название *разрешающая способность прибора*, и разработаны методы его вычисления. Эта величина оценивает снизу минимальное расстояние, на котором в принципе возможно решить “задачу разделения близких пиков” с помощью любого алгоритма для рассматриваемого уравнения.

В данной работе для произвольного алгоритма выделения разрывов вводится понятие порога разделимости (минимальное расстояние, на котором алгоритм восстанавливает число разрывов и их положение). Также разрабатывается аппарат его оценки сверху и исследуется алгоритм выделения разрывов из [6]. Основная теорема данной статьи по формулировке совпадает с теоремой 1 из [6], но в ней существенным образом ослаблено априорное условие на близость положения разрывов. Вместо условия $\min\limits_{k\neq j}|s_k - s_j| > h$, где s_k есть положения разрывов точной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00099).

функции x, а h — константа, вводится условие $\min\limits_{k\neq j}|s_k - s_j| > h(\delta) = (3/\pi)\delta^{0,5}$, где δ — уровень погрешности задания исходных данных. Тем самым установлена оценка сверху для порога разделимости.

Заметим, что ослабление этого условия потребовало существенного усовершенствования техники проведения оценок, по сравнению с работами [6]–[8]. Главная техническая трудность, преодоленная в этой работе, заключается в явном исследовании поведения всех констант, возникающих в оценках, в зависимости от h. Также отметим, что разработанная технология проведения оценок обобщается на широкий класс алгоритмов выделения особенностей и на случай изолированных особенностей различных типов. При этом функция x может, в частности, являться решением линейного интегрального уравнения типа свертки.

2. Алгоритм решения, оценка порога разделимости

Предполагается, что $x, x_\delta \in L_2(-\infty,\infty)$, $\|x - x_\delta\|_{L_2} \leq \delta$, уровень погрешности δ известен. Кроме того, предполагается, что функция x удовлетворяет следующим условиям, в формулировке которых L — натуральное число, d, $\Delta^{\min}$, h — известные положительные вещественные константы:

1) x имеет конечное (неизвестное) число разрывов первого рода l, $0 < l < L$ в точках $\{s_k\}_1^l$;
2) величины скачков Δ_k и положения s_k удовлетворяют неравенствам

$$0 < \Delta^{\min} \leq \min\{|\Delta_k| : k = 1, 2, \ldots, l\},$$
$$d \geq \max\{|s_k| : k = 1, 2, \ldots, l\};$$

3) вне точек разрыва функция непрерывно дифференцируема, и в каждой точке разрыва существуют левые и правые конечные пределы производной; $\|x\|_{W_2^1}$ ограничена.

Относительно условия 3) поясним, что, поскольку x имеет разрывы, то $\|x\|_{W_2^1}$ понимается как сумма норм W_2^1 функции x на интервалах, ограниченных $\pm\infty$ и точками s_k ($k = 1, 2, \ldots, l$). Заметим также, что без ограничения общности в условии 3) можно считать $\|x\|_{W_2^1} \leq 1$, что и будем далее делать на протяжении всей работы.

Ясно, что кроме условий 1)–3) на функцию x необходимо наложить дополнительное условие (разрывы находятся не слишком близко один от другого)

$$\min_{k\neq j}|s_k - s_j| > h, \tag{1}$$

т. к. разрывы, расположенные слишком близко, в условиях шума не могут быть разделены. Пусть Π — некоторый метод выделения разрывов, т. е. алгоритм, который по функции x_δ определяет количество разрывов l; приближения к положениям разрывов $\{s_k^\delta\}_1^l$ и приближения к величинам скачков $\{\Delta_k^\delta\}_1^l$.

Определение. При заданном δ назовем *порогом разделимости* для метода Π минимально возможное число $\widehat{h} = \widehat{h}(\delta) > 0$ такое, что на классе функций 1)–3) при условии (1) для $h = \widehat{h}$ метод Π определяет число разрывов l и аппроксимирует положения особенностей с точностью, меньшей $\widehat{h}$.

Порог разделимости зависит от δ и для исследуемого в данной работе метода стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Перед тем как выписать алгоритм выделения разрывов, введем некоторые обозначения. Пусть $\delta = 0$ (индекс δ при этом будем опускать: $x_\delta = x$). Используем преобразование Фурье функции x

$$\widehat{x}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\exp(-izs)ds.$$

В этом случае обратное преобразование Фурье будет определяться формулой $x(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(z)\exp(izs)dz$.

Введем [7] функцию

$$x^B(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-B}^{B} \widehat{x}(z)\exp(izs)dz, \quad B > 0.$$

В [7] показано, что для функции x, удовлетворяющей условиям 1)–3), для всех $s \neq s_k$ $(k = 1, 2, \dots, l)$ имеет место представление

$$x^B(s) = x(s) + \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \Phi(B, s - s_k) + \alpha_0^B(s), \tag{2}$$

где $\Phi(B, s) = -\frac{\operatorname{sign} s}{\pi} \int\limits_{B|s|}^{\infty} \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi$, $\sup\limits_s |\alpha_0^B(s)| \leq A_0/B^{0,5}$, A_0 — константа, определяемая условиями 1)–3).

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию: $\psi^B(s) = x^{2B}(s) - x^B(s)$. Используя представление (2) и обозначая $\phi^B(s) = \Phi(2B, s) - \Phi(B, s)$, имеем

$$\psi^B(s) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \phi^B(s - s_k) + \alpha^B(s), \tag{3}$$

где $\phi^B(s) = -\frac{\operatorname{sign} s}{\pi} \int\limits_{B|s|}^{2B|s|} \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi$, $\sup\limits_s |\alpha^B(s)| \leq 2A_0/B^{0,5}$.

Изучим свойства функции ϕ^B. Известна

Лемма 1 ([7]). *Пусть $h > 0$ и $B \geq (3/(\pi h))^2$. Тогда для всех s таких, что $|s| \geq h/3$, справедлива оценка $|\phi^B(s)| \leq 2/B^{0,5}$.*

Функция $\phi^B(s)$ имеет много точек локального экстремума. Глобальный максимум достигается в точке $s_\phi^{\max} = \pi/(3B)$; положим $a = \phi^B(s_\phi^{\max})$.

Напомним, что $h \leq \min\limits_{k\neq j} |s_k - s_j|$. Рассмотрим функцию ψ^B на отрезке $[s_1 - h/3, s_1 + h/3]$. Используя выражение (3) и лемму 1, имеем

$$\psi^B(s) = \Delta_1 \phi^B(s - s_1) + \alpha_{(1)}^B(s),$$

где $s \in [s_1 - h/3, s_1 + h/3]$ и $\sup\limits_{|s - s_1| \leq h/3} |\alpha_{(1)}^B(s)| \leq A_1/B^{0,5}$, A_1 — константа.

Через $s_{\phi,1}^{\max}$ и $s_\psi^{\max}$ обозначим точки глобального максимума функций $\phi^B(s - s_1)$ и ψ^B. Поскольку $s_{\phi,1}^{\max} = s_1 + \pi/(3B)$, то для определения приближения к точке s_1 нужно получить оценки близости точек $s_{\phi,1}^{\max}$, $s_\psi^{\max}$.

Известны также три леммы.

Лемма 2 ([8]). *Пусть точка $s_\psi^{\max}$ принадлежит отрезку $[s_1 - h/3, s_1 + h/3]$. Тогда существует положительная константа A_2 такая, что для всех $B > \widehat{B}_2 = \max\{5\pi/(4h), A_2\}$ имеем*

$$s_\psi^{\max} \in [s_{\phi,1}^{\max} - \pi/(12B), s_{\phi,1}^{\max} + \pi/(12B)].$$

Лемма 3 ([7]). *Пусть точка $s_\psi^{\max} \in [s_1 - h/3, s_1 + h/3]$. Тогда для всех $B > \widehat{B}_2$ имеет место оценка $|s_1 - \widetilde{s}_1| \leq \widetilde{C}_1/B^{1,25}$ ($\widetilde{C}_1$ — константа), где $\widetilde{s}_1 = s_\psi^{\max} - \pi/(3B)$ для $\Delta_1 > 0$ или $\widetilde{s}_1 = s_\psi^{\max} + \pi/(3B)$ для $\Delta_1 < 0$.*

Введем $\widetilde{\Delta}_1 = \psi^B(s_\psi^{\max})/a$, где $a = \phi^B(\pi/(3B))$.

Лемма 4 ([7]). *Пусть точка* $s_\psi^{\max} \in [s_1 - h/3, s_1 + h/3]$ *и* $\Delta_1 > 0$. *Тогда для всех* $B > \pi/h$, *имеем оценку* $|\Delta_1 - \widetilde{\Delta}_1| \le \widetilde{C}_2/B^{0,5}$ ($\widetilde{C}_2$ *— константа*).

Выпишем алгоритм определения точек разрыва и величин скачка.

Поскольку задача восстановления функции является некорректной задачей, то в качестве регуляризованного решения выберем функцию

$$x_\delta^B(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} \widehat{x}_\delta(z) \exp(izs) dz,$$

где B — параметр регуляризации (дальше удобно считать, что $B > 1$).

Введем функцию $\psi_\delta^B(s) = x_\delta^{2B}(s) - x_\delta^B(s)$. Выпишем процедуру, в которой вычисляется приближение к положению разрыва с максимальной величиной скачка по заданной функции ψ_δ^B. Напомним, что $d \ge \max\{|s_k| : k = 1, 2, \dots, l\}$, $0 < \Delta^{\min} \le \max\{|\Delta_k| : k = 1, 2, \dots, l\}$.

Процедура $\Pi s(\psi_\delta^B)$.

1. Найти $s_\psi^{\max}$ — точку максимума функции ψ_δ^B на отрезке $[-2d, 2d]$. (Если функция ψ_δ^B принимает максимальное значение в нескольких точках, то в качестве $s_\psi^{\max}$ можно выбрать любую из них.)
2. Найти $s_\psi^{\min}$ — точку, в которой функция ψ_δ^B принимает наименьшее значение на отрезке $[s_\psi^{\max} - \pi/B, s_\psi^{\max} + \pi/B]$.
3. Если $s_\psi^{\min} < s_\psi^{\max}$, то $\widetilde{s} = s_\psi^{\max} - \pi/(3B)$. Иначе $\widetilde{s} = s_\psi^{\max} + \pi/(3B)$.

Выпишем алгоритм аппроксимации точек разрыва и величин скачка.

Алгоритм П. Положим $\psi_1^B(s) = \psi_\delta^B(s)$, $k = 1$. В цикле: используя процедуру $\Pi s(\psi_k^B)$, находим приближение к положению разрыва $s_k^\delta = \widetilde{s}$. Вычисляем

$$\Delta_k^\delta = \operatorname{sign}(\psi_k^B(s_k^\delta + \pi/(3B)))\psi_k^B(s_\psi^{\max})/a.$$

Если выполняется условие $|\Delta_k^\delta| > \Delta^{\min}/2$, то считаем, что аппроксимация k-й точки разрыва получена, заменим k на $k+1$,

$$\psi_k^B(s) = \psi_{k-1}^B(s) - \Delta_{k-1}^\delta \phi^B(s - s_{k-1}^\delta),$$

и возвращаемся к началу цикла. Иначе считаем, что на предыдущем шаге найдены все точки разрыва, полагаем $m = k - 1$. Процесс завершен.

Заменим условие (1) на условие

$$\min_{k \ne j} |s_k - s_j| > h(\delta). \tag{1'}$$

Положим в условии (1′) $h(\delta) = (3/\pi)\delta^{0,5}$. Таким образом, при каждом δ эта функция будет мажорировать порог разделимости в нашей задаче. Формулировка следующей теоремы отличается от формулировки теоремы 1 из [6] только заменой условия (1) на условие (1′).

Теорема. *Пусть функция* x *удовлетворяет условиям* 1)–3). *Тогда существуют такие константы* C_1, C_2 *и достаточно малое* $\overline{\delta} > 0$, *что при любом фиксированном* $\delta < \overline{\delta}$, $B = \delta^{-1}$ *и при выполнении условия* (1′), *действуя согласно алгоритму* П, *будем иметь*

1) $m = l$,
2) *для найденных приближений* s_k^δ, Δ_k^δ $(k = 1, 2, \dots, l)$ *положений точек разрыва* s_k *и величин скачков* Δ_k

$$|s_k - s_k^\delta| \le C_1\delta^{1,25}, \quad |\Delta_k - \Delta_k^\delta| \le C_2\delta^{0,5}.$$

Доказательство. Сначала установим условия на параметр B с выделением зависимости $B = B(h)$. Далее, пользуясь связью параметра B с уровнем погрешности δ, определим функцию $h(\delta)$ из условия (1′).

Ограничимся доказательством случая $l=2$. Случай произвольного l исследуется аналогично. Для определенности будем считать $\Delta_k > 0$, $k=1,2$. Используя разложение (3), запишем функцию ψ_1^B следующим образом: $\psi_1^B(s) = \sum\limits_{k=1}^{l} \Delta_k \phi(B, s-s_k) + \alpha^B(s) + \Delta\psi_\delta^B(s)$, где

$$\sup_s |\alpha^B(s)| \le 2A_0/B^{0,5}, \tag{4}$$

$$\Delta\psi_\delta^B(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{-2B}^{2B}(\widehat{x}_\delta - \widehat{x})\exp(izs)dz - \int_{-B}^{B}(\widehat{x}_\delta - \widehat{x})\exp(izs)dz\Big).$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и выбирая параметр $B=\delta^{-1}$, имеем

$$|\Delta\psi_\delta^B(s)| \le \sqrt{2/\pi}/B^{0,5}. \tag{5}$$

Согласно лемме 1 для всех $B > (3/(\pi h))^2$, для всех s таких, что $|s-s_2| \ge h/3$, справедлива оценка $|\phi^B(s-s_2)| \le 2/B^{0,5}$. Следовательно, $\psi_1^B(s) = \Delta_1\phi^B(s-s_1) + \alpha_{(1)}^B(s)$, где $\sup\limits_{|s-s_1|\le h/3} |\alpha_{(1)}^B(s)| \le \overline{A}_1/B^{0,5}$, $\overline{A}_1$ — константа.

Согласно алгоритму находим точку $s_\psi^{\max}$. Поскольку для всех s, не принадлежащих множеству $\bigcup\limits_{k=1}^{2}[s_k - h/3, s_k + h/3]$, имеем оценку $|\psi^B(s)| \le \widetilde{A}_1/B^{0,5}$, где $\widetilde{A}_1$ — константа, всегда можно считать, что для достаточно большого B точка $s_\psi^{\max}$ принадлежит отрезку $[s_1 - h/3, s_1 + h/3]$. Если $s_\psi^{\max} \in [s_2 - h/3, s_2 + h/3]$, то достаточно сменить нумерацию точек разрыва. Тогда в силу леммы 3 для $B > \widehat{B}_2 = \max\{5\pi/(4h), A_2\}$ имеет место оценка

$$|s_1 - s_1^\delta| \le \overline{C}_1/B^{1,25} = \overline{C}_1\delta^{1,25}.$$

Очевидно, знак Δ_1^δ совпадает со знаком $\psi_1^B(s_1^\delta + \pi/(3B))$. Оценку близости Δ_1^δ и Δ_1 получаем по лемме 4. Таким образом,

$$|\Delta_1 - \Delta_1^\delta| \le \overline{C}_2/B^{0,5} = \overline{C}_2\delta^{0,5}.$$

Перейдем к определению положения второго разрыва. Согласно алгоритму

$$\psi_2^B(s) = \psi_1^B(s) - \Delta_1^\delta\phi^B(s-s_1^\delta) = \Delta_2\phi^B(s-s_2) + \alpha^B(s) + \Delta\psi_\delta^B(s) + \\ + \Delta_1\phi^B(s-s_1) - \Delta_1^\delta\phi^B(s-s_1^\delta). \tag{6}$$

Покажем, что функция ψ_2^B принимает максимальное значение на отрезке $[s_2 - h/3, s_2 + h/3]$. Сначала оценим разность двух последних слагаемых в правой части (6) для всех s. Имеем

$$|\Delta_1\phi^B(s-s_1) - \Delta_1^\delta\phi^B(s-s_1^\delta)| \le |\Delta_1 - \Delta_1^\delta|\,|\phi^B(s-s_1)| + |\Delta_1^\delta|\,|\phi^B(s-s_1) - \phi^B(s-s_1^\delta)|.$$

Для второго слагаемого в правой части этого выражения по формуле Лагранжа имеем

$$|\phi^B(s-s_1) - \phi^B(s-s_1^\delta)| \le |s_1 - s_1^\delta|\,|[\phi^B]'(s-\theta)|, \quad \theta \in (s_1, s_1^\delta).$$

Поскольку $|s_1 - s_1^\delta| \le \overline{C}_1/B^{1,25}$, $|\Delta_1^\delta - \Delta_1| \le \overline{C}_2/B^{0,5}$, функция ϕ^B ограничена, а $|[\phi^B]'(s-\theta)| \le (2/\pi)B$, то

$$|\Delta_1\phi^B(s-s_1) - \Delta_1^\delta\phi^B(s-s_1^\delta)| \le A_2/B^{0,25}.$$

Используя лемму 1 и оценки (4), (5), при достаточно больших значениях параметра B получаем оценку для (6) на отрезке $[s_2 - h/3, s_2 + h/3]$

$$|\psi_2^B(s)| \le \widetilde{A}_2/B^{0,25}, \quad \widetilde{A}_2 \ \text{— константа.}$$

Теперь оценим снизу модуль функции ψ_2^B в окрестности точки s_2. Сначала оценим сверху второе слагаемое в (6). Потребуем, чтобы для всех s таких, что $|s-s_2| \le h/3$ имело место неравенство

$|s - s_1^\delta| \geq h/3$. Для этого достаточно выбрать $B > (3\overline{C}_1/h)^{4/5}$. Тогда согласно лемме 1 имеем $|\phi^B(s - s_1^\delta)| \leq 2/B^{0,5}$. Значит,

$$\max_{|s-s_2|\leq h/3} |\psi_2^B(s)| \geq a\Delta^{\min} - \frac{\overline{A}_2}{B^{0,5}}, \quad \overline{A}_2 \text{ — константа.}$$

Таким образом, начиная с некоторого достаточно большого B, функция ψ_2^B принимает максимальное значение на отрезке $[s_2 - h/3, s_2 + h/3]$. Кроме того, из последних оценок получаем $\psi_2^B(s) = \Delta_2\phi^B(s - s_2) + \alpha_{(2)}^B(s)$, где $\sup\limits_{|s-s_2|\leq h/3} |\alpha_{(2)}^B(s)| \leq \overline{A}_2/B^{0,5}$.

Следовательно, для s_2^δ и Δ_2^δ имеем оценки

$$|s_2 - s_2^\delta| \leq C_1/B^{1,25} = C_1\delta^{1,25}, \quad |\Delta_2 - \Delta_2^\delta| \leq C_2/B^{0,5} = C_2\delta^{0,5}.$$

Таким образом, определены два положения разрыва исходной функции. Заметим, что $C_1 > \overline{C}_1$ и $C_2 > \overline{C}_2$, поэтому в оценках для $k = 1$ можно поставить C_1, C_2. Вычислим, применив алгоритм П, функцию ψ_3^B.

$$\psi_3^B(s) = \Delta_2\phi^B(s - s_2) - \Delta_2^\delta\phi^B(s - s_2^\delta) + \Delta_1\phi^B(s - s_1) - \Delta_1^\delta\phi^B(s - s_1^\delta) + \alpha^B(s) + \Delta\psi_\delta^B(s). \quad (7)$$

Модуль разности первых двух слагаемых в (7) оценивается аналогично модулю разности $\Delta_1\phi^B(s - s_1) - \Delta_1^\delta\phi^B(s - s_1^\delta)$ (см. выше). Следовательно, учитывая полученные ранее оценки для остальных слагаемых в (7), начиная с некоторого достаточно большого значения параметра B, имеем $|\psi_3^B(s_\psi^{\max})| \leq \widetilde{A}_3/B^{0,25}$. Ясно, что $|\Delta_3^\delta| \leq \widetilde{A}_3/(aB^{0,25})$. Для достаточно больших B эта величина меньше $\Delta^{\min}/2$. Следовательно, $m = 2$.

Параметр h, участвующий в доказательстве, пока не определен. Покажем, что использование условия $(1')$ позволяет завершить доказательство теоремы. Имеем

$$B > \max\{D, (3/(\pi h))^2, 5\pi/(4h), (3C_1/h)^{4/5}\},$$

D — константа. Из условия $B \geq (3/(\pi h))^2$ получаем $h \geq 3/(\pi B^{0,5})$. Поскольку $B = \delta^{-1}$, то $h \geq (3/\pi)\delta^{0,5}$. Остальные три условия на параметр B можно учесть, выбирая достаточно малое $\overline{\delta}$. Следовательно, если для достаточно малого δ имеем $h = h(\delta) = (3/\pi)\delta^{0,5}$, то алгоритм П гарантированно разделяет разрывы. □

Ясно, что связь между δ и h в условии $(1')$ можно записать в виде условия на δ.

Замечание 1. Пусть функция x принадлежит классу функций, удовлетворяющих условиям 1)–3) при некотором h в условии (1). Тогда существуют такие константы C_1, C_2 и достаточно малое $\overline{\delta} > 0$, что как только $\delta < \min\{\overline{\delta}, (\pi\,\widehat{h}/3)^2\}$ при $B = \delta^{-1}$, то, действуя согласно алгоритму П, получим

1) $m = l$;
2) найденные приближения s_k^δ, Δ_k^δ $(k = 1, 2, \ldots, l)$ положений точек разрыва s_k и величин скачков Δ_k, таковы, что

$$|s_k - s_k^\delta| \leq C_1\delta^{1,25}, \quad |\Delta_k - \Delta_k^\delta| \leq C_2\delta^{0,5}.$$

Возникает естественный вопрос о том, можно ли увеличить показатель 1,25 степени в оценках точности определения s_k. Очевидные построения с функцией $x_\delta(s) = x(s + \Delta s)$ приводят с следующему утверждению.

Замечание 2. В рассмотренной постановке задачи определения положения разрывов s_k нельзя получить порядок точности их определения больше, чем 2.

Литература

1. Теребиж В.Ю. *Введение в статистическую теорию обратных задач.* – М.: Физматлит, 2005. – 375 с.
2. Козлов В.П. *О разрешающей способности спектральных приборов.* I. *Постановка задачи и критерий разрешения* // Оптика и спектроскопия. – 1964. – Т. 16. – № 3. – С. 501–506.
3. Козлов В.П. *О разрешающей способности спектральных приборов.* II. *Обобщенная разрешающая сила спектрального прибора* // Оптика и спектроскопия. – 1964. – Т. 17. – № 2. – С. 278–283.
4. Малла С. *Вэйвлеты в обработке сигналов.* – М.: Мир, 2005. – 671 с.
5. Фурман Я.А., Кревецкий А.В., Передреев А.К. *Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов.* – М.: Физматлит, 2002. – 596 с.
6. Антонова Т.В. *Восстановление функции с конечным числом разрывов* 1 *рода по зашумленным данным* // Изв. вузов. Математика. – 2001. –№ 7. – С. 65–68.
7. Antonova T.V. *Recovery of function with finite number of discontinuities by noised data* // J. inverse and ill-posed problems. – 2002. – V. 10. – № 2. – P. 1–11.
8. Antonova T.V. *Solving equations of the first kind on classes of functions with singularities* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 1. – 2002. – P. S145—S189.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской академии наук

Поступила
29.12.2005