ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 514.76

Е.С. ВОЛКОВА

ТЕОРЕМА ОБ α-РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ КИЛЛИНГОВА ТИПА

В настоящее время достаточно большое количество работ посвящено исследованию геометрии почти контактных метрических многообразий ($A\mathfrak{C}$-многообразий). $A\mathfrak{C}$-многообразия, снабженные дополнительными структурами, являются одним из наиболее содержательных объектов дифференциально-геометрических исследований. Так, например, $A\mathfrak{C}$-многообразие, снабженное нормальной структурой киллингова типа ($\mathcal{CNK}$-многообразие), обобщает сасакиево, квазисасакиево, косимплектическое и точнейше косимплектическое многообразия. Изучение $\mathcal{CNK}$-многообразий особенно интересно в случае, когда они являются локально конформно почти контактными метрическими многообразиями с замкнутой фундаментальной 2-формой ($\mathcal{LC}c$-многообразия). В этом случае мы получаем контактный аналог локально конформно-келеровых многообразий (напр., [1]–[4]), находящих важные приложения в современной математической физике [5].

В данной работе исследуются свойства инволютивного распределения, содержащегося в α-распределении $\mathcal{LC}c$-многообразия. Понятие α-распределения (келерова распределения) для локально конформно-келеровых многообразий было введено в работе Икуты [6]. Рассматривая инволютивное распределение, содержащееся в келеровом распределении при условии ковариантного постоянства формы Ли этого многообразия (т. е. когда многообразие является обобщенным многообразием Хопфа [7]), он установил, что 1) максимальная размерность такого распределения при условии его антиинвариантности равна $m-1$ (m — комплексная размерность многообразия), 2) каждое инволютивное распределение, содержащееся в келеровом распределении, антиинвариантно. Позднее эта проблема для многообразий Вайсмана–Грея изучалась Н.Н. Щипковой. Для этих многообразий было получено обобщение последнего из вышеперечисленных результатов Икуты. Теорема, доказательство которой приводится в данной работе, является контактным аналогом и обобщением результатов Икуты и Н.Н. Щипковой. Кроме того, в случае ковариантного постоянства формы Ли $\mathcal{LC}c$-многообразия доказано, что любое инволютивное распределение, содержащееся в α-распределении $\mathcal{LC}c$-многообразия, антиинвариантно.

Пусть M — гладкое многообразие, снабженное $A\mathfrak{C}$-структурой, т. е. совокупностью $\{\eta,\xi,\Phi,g=\langle\ ,\ \rangle\}$ тензорных полей на M, где ξ — вектор, η — ковектор, Φ — эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей на M, g — риманова метрика, связанных соотношениями

$$\eta(\xi)=1,\quad \Phi(\xi)=0,\quad \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta,\quad \eta\circ\Phi=0,$$
$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\quad X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

Пусть ∇ — риманова связность на M, d — оператор внешнего дифференцирования, δ — оператор кодифференцирования, $C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций многообразия M, $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ — фундаментальная 2-форма структуры, $\Theta=\frac{1}{n-1}\delta\Omega\circ\Phi$ – форма Ли. В дальнейшем будем предполагать, что форма Θ не обращается в нуль ни в одной точке многообразия. Многообразие, допускающее $A\mathfrak{C}$-структуру, называется $A\mathfrak{C}$-многообразием. Хорошо известно [8], что $A\mathfrak{C}$-многообразие нечетномерно и ориентируемо. В $C^\infty(M)$-модуле $\mathfrak{X}(M)$ такого многообразия внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\mathfrak{m} = \xi \otimes \eta$, $\mathfrak{l} = \mathrm{id} - \xi \otimes \eta$. Пусть $\mathrm{Im}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{M}$, $\mathrm{Im}\,\mathfrak{l} = \mathfrak{L}$, тогда $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{L}$.

Задание $A\mathfrak{C}$-структуры на $(2n+1)$-мерном многообразии M равносильно заданию на M $\mathcal{G}$-структуры со структурной группой $U(n) \times \{1\}$. Элементами тотального пространства этой $\mathcal{G}$-структуры являются комплексные реперы (так называемые, A-реперы) многообразия M вида $\{p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \varepsilon_{\hat{2}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}\}$ [9]. Эти реперы характеризуются тем, что матрицы тензоров Φ и g в них имеют соответственно вид

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Будем предполагать, что индексы $i, j, k, \ldots = 0, \ldots, 2n$, а индексы $a, b, c, \ldots = 1, \ldots, n$. Положим $\widehat{a} = a + n$. Напомним [10], что $A\mathfrak{C}$-структура называется *нормальной*, если $2N + d\eta \otimes \xi = 0$, где $N(X,Y) = \frac{1}{4}\{\Phi^2[X,Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y]\}$ — тензор Нейенхейса структурного оператора Φ. Нормальная $A\mathfrak{C}$-структура с киллинговым структурным ковектором называется *нормальной структурой киллингова типа.*

Киллинговость структурного ковектора означает, что верно тождество

$$\nabla_X(\eta)Y + \nabla_Y(\eta)X = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Записывая тождества, характеризующие $\mathcal{CNK}$-структуру на пространстве присоединенной $\mathcal{G}$-структуры, нетрудно получить первую группу структурных уравнений $\mathcal{CNK}$-многообразия [11]

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= 2B_a{}^b\omega^a \wedge \omega_b, \\ d\omega^a &= \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b - B_b{}^a\omega^b \wedge \omega^0, \\ d\omega_a &= -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega^b \wedge \omega_c + B_a{}^b\omega_b \wedge \omega^0, \end{aligned}$$

где $\{\omega^i_j\}$ — компоненты формы римановой связности метрики g, $\{\omega^i\}$ — компоненты формы смещения. При этом

$$B_a{}^b = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,\hat{b}} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}\,, \quad B_{ab}{}^c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}\,, \quad B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},c}. \tag{1}$$

Соотношения (1) представляют собой системы функций на пространстве присоединенной $\mathcal{G}$-структуры, служащие компонентами соответствующих структурных тензоров.

Определение 1 ([12]). Преобразование $\{\xi, \eta, \Phi, g\} \longrightarrow \{e^{-\rho}\xi, e^{\rho}\eta, \Phi, e^{2\rho}g\}$, где $\rho \in C^\infty(M)$, называется *конформным преобразованием* $A\mathfrak{C}$-структуры.

Определение 2. $\mathcal{CNK}$-многообразие M назовем *локально конформным* $A\mathfrak{C}$*-многообразием с замкнутой фундаментальной* 2*-формой* Ω*, или* $\mathcal{LC}c$*-многообразием*, если для всякой точки $p \in M$ найдутся окрестность $U_p \subset M$ и функция $\rho \in C^\infty(U_p)$ такие, что $\{U_p, e^{-\rho}\xi\,|_{U_p}, e^{\rho}\eta\,|_{U_p}, \Phi, e^{2\rho}g\,|_{U_p}\}$ — $A\mathfrak{C}$-многообразие с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω.

Как и в случае локально конформно-келеровых многообразий, легко показать, что $\mathcal{CNK}$-многообразие M является $\mathcal{LC}c$-многообразием тогда и только тогда, когда $d\Omega = \Theta \wedge \Omega$, $d\Theta = 0$, $\Theta(\xi) = 0$. При этом выражения для тензоров $B^{ab}{}_c$ и $B_{ab}{}^c$ имеют вид $B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta^{b]}_c$, $B_{ab}{}^c = \alpha_{[b}\delta^c_{a]}$, где $\{\alpha^a, \alpha_a, \alpha_0\}$ — компоненты формы Ли Θ в A-репере, квадратные скобки означают операцию альтернирования объекта по заключенным в них индексам. Вектор γ, дуальный форме Θ, называется *вектором Ли*, т. е. $\Theta(X) = \langle \gamma, X \rangle$.

Рассмотрим линейный оператор $\mathfrak{B} = \nabla\xi$, компонентами которого являются компоненты $\{\xi^i{}_{,k}\}$ ковариантной производной структурного вектора. Матрица оператора $\mathfrak{B}$ в A-репере имеет вид [10]

$$(\mathfrak{B}^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_a{}^b & 0 \\ 0 & 0 & -B_b{}^a \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что в A-репере компоненты вектора $\nabla_Y(\Phi)X$ имеют вид

$$\begin{aligned} &(\nabla_Y(\Phi)X)^a = \alpha^a(\Phi Y)^b X_b - \alpha^b(\Phi Y)^a X_b - B_c{}^a(\Phi Y)^c\eta(X), \\ &(\nabla_Y(\Phi)X)_a = \alpha_a(\Phi Y)_b X^b - \alpha_b(\Phi Y)_a X^b + B_a{}^c(\Phi Y)_c\eta(X), \\ &(\nabla_Y(\Phi)X)^0 = B_c{}^b X_b(\Phi Y)^c - B_b{}^c X^b(\Phi Y)_c = \langle \mathfrak{B}(\Phi Y), X\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

Используя соотношения (2), находим

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y(\Phi)X, Z\rangle &= (\nabla_Y(\Phi)X)^a Z_a + (\nabla_Y(\Phi)X)_a Z^a + (\nabla_Y(\Phi)X)^0 Z_0 = \\ &= (\alpha^a(\Phi Y)^b X_b Z_a + \alpha_a(\Phi Y)_b X^b Z^a) - (\alpha^b(\Phi Y)^a X_b Z_a + \alpha_b(\Phi Y)_a X^b Z^a) - \\ &\quad - \langle \mathfrak{B}(\Phi Y), Z\rangle\eta(X) + \langle \mathfrak{B}(\Phi Y), X\rangle\eta(Z). \end{aligned} \tag{3}$$

Лемма. *Справедливо тождество*

$$\alpha^a(\Phi Y)^b X_b Z_a + \alpha_a(\Phi Y)_b X^b Z^a = \frac{1}{2}\{\Theta(Z)\langle \Phi Y, X\rangle - \Theta(\Phi Z)\langle \Phi Y, \Phi X\rangle\}.$$

Доказательство. Воспользуемся соотношениями $\alpha^a Z_a = \Theta(\overline{\sigma}Z)$, $\alpha_a Z^a = \Theta(\sigma Z)$, где $\sigma = \frac{1}{2}(\mathrm{id} - \sqrt{-1}\Phi)$, $\overline{\sigma} = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \sqrt{-1}\Phi)$ — взаимно дополнительные проекторы, определенные в расслоении $\mathfrak{L}^C = \mathfrak{L}\otimes C$ [8]. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha^a(\Phi Y)^b X_b Z_a &+ \alpha_a(\Phi Y)_b X^b Z^a = \Theta(\overline{\sigma}Z)\delta^b_c(\Phi Y)^c X_b + \Theta(\sigma Z)\delta^c_b(\Phi Y)_c X^b = \\ &= \frac{1}{2}\{\Theta(Z + \sqrt{-1}\Phi Z)g_{\hat{b}c}(\Phi Y)^c X_b + \Theta(Z - \sqrt{-1}\Phi Z)g_{\hat{c}b}(\Phi Y)_c X^b\} = \\ &= \frac{1}{2}\{\Theta(Z)(g_{\hat{b}c}(\Phi Y)^c X_b + g_{\hat{c}b}(\Phi Y)_c X^b) - \sqrt{-1}\Theta(\Phi Z)(-g_{\hat{b}c}(\Phi Y)^c X_b + \\ &+ g_{\hat{c}b}(\Phi Y)_c X^b)\} = \frac{1}{2}\{\Theta(Z)\langle \Phi Y, X\rangle - \Theta(\Phi Z)(g_{\hat{b}c}(\Phi Y)^c\sqrt{-1}X_b + g_{\hat{c}b}(\Phi Y)_c\sqrt{-1}X^b)\}. \end{aligned}$$

С учетом соотношений $-\sqrt{-1}X_b = (\Phi X)_b$, $\sqrt{-1}X^b = (\Phi X)^b$ последнее равенство примет вид $\alpha^a(\Phi Y)^b X_b Z_a + \alpha_a(\Phi Y)_b X^b Z^a = \frac{1}{2}\{\Theta(Z)\langle \Phi Y, X\rangle - \Theta(\Phi Z)\langle \Phi Y, \Phi X\rangle\}$. $\square$

В силу доказанной леммы выражение (3) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y(\Phi)X, Z\rangle = \frac{1}{2}\{&\Theta(Z)\langle X, \Phi Y\rangle - \Theta(\Phi Z)\langle \Phi X, \Phi Y\rangle\Theta(X)\langle Z, \Phi Y\rangle + \\ &+ \Theta(\Phi X)\langle \Phi Y, \Phi Z\rangle\} - \eta(X)\langle \mathfrak{B}(\Phi Y), Z\rangle + \eta(Z)\langle \mathfrak{B}(\Phi Y), X\rangle. \end{aligned}$$

Из определения вектора Ли γ и условия $\alpha_0 = \Theta(\xi) = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y(\Phi)X, Z\rangle = \frac{1}{2}\{&\langle X, \Phi Y\rangle\langle \gamma, Z\rangle - \langle \Phi X, \Phi Y\rangle\langle \gamma, \Phi Z\rangle - \Theta(X)\langle \Phi Y, Z\rangle + \\ &+ \Theta(\Phi X)\langle \Phi Y, \Phi Z\rangle\} - \eta(X)\langle \mathfrak{B}(\Phi Y), Z\rangle + \langle \mathfrak{B}(\Phi Y), X\rangle\langle \xi, Z\rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

Легко показать, что фундаментальная 2-форма $\Omega(X, Y)$ кососимметрична, а значит, в частности, $\Omega(X, X) = 0$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M)$. С учетом этого замечания выражение (4) будет иметь вид

$$\langle\nabla_Y(\Phi)X,Z\rangle=\frac{1}{2}\{\langle X,\Phi Y\rangle\langle\gamma,Z\rangle+\langle\Phi X,\Phi Y\rangle\langle\Phi\gamma,Z\rangle-\Theta(X)\langle\Phi Y,Z\rangle-$$
$$-\Theta(\Phi X)\langle\Phi^2Y,Z\rangle\}-\eta(X)\langle\mathfrak{B}(\Phi Y),Z\rangle+\langle\mathfrak{B}(\Phi Y),X\rangle\langle\xi,Z\rangle.$$

В силу невырожденности римановой метрики и определения фундаментальной 2-формы Ω получим

$$\nabla_Y(\Phi)X=\frac{1}{2}\{\Omega(X,Y)\gamma+\langle\Phi X,\Phi Y\rangle\Phi\gamma-\Theta(X)\Phi Y-\Theta(\Phi X)\Phi^2Y\}-$$
$$-\eta(X)\mathfrak{B}(\Phi Y)+\langle\mathfrak{B}(\Phi Y),X\rangle\xi. \quad (5)$$

Определение 3. Распределение $\mathcal{D}$ на $A\mathfrak{C}$-многообразии M называется *антиинвариантным*, если из того, что $X\in\mathcal{D}$, следует $\Phi X\in\mathcal{D}^{\perp}$, т. е. $\Phi\mathcal{D}\subset\mathcal{D}^{\perp}$.

Определение 4. *α-распределением* на $A\mathfrak{C}$-многообразии называется распределение, задаваемое системой Пфаффа $\Theta(X)=0$, $\Psi(X)=0$, $X\in\mathfrak{X}(M)$, где $\Psi(X)=\Theta(\Phi X)$.

Теорема. *Инволютивное распределение $\mathcal{D}$, содержащееся в α-распределении произвольного $\mathcal{LC}c$-многоообразия, антиинвариантно тогда и только тогда, когда справедливо тождество*

$$\nabla_X(\Theta)\Phi Y=\nabla_Y(\Theta)\Phi X\quad (X,Y\in\mathcal{D}).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ — некоторое инволютивное распределение, содержащееся в α-распределении произвольного $\mathcal{LC}c$-многоообразия. В силу определения 4 и инволютивности распределения $\mathcal{D}$ имеем

$$\forall X,Y\in\mathcal{D}\Rightarrow\Theta(X)=0,\ \ \Psi(X)=0,\ \ d\Theta(X,Y)=0,\ \ d\Psi(X,Y)=0.$$

На многообразии фиксирована риманова связность, поэтому для формы Ψ справедлива формула $d\Psi(X,Y)=\frac{1}{2}(\nabla_X(\Psi)Y-\nabla_Y(\Psi)X)$. По определению $\Psi(X)=\Theta(\Phi X)$, следовательно, $\nabla_Y(\Psi)X=\nabla_Y(\Theta)(\Phi X)+\Theta(\nabla_Y(\Phi)X)$. С учетом этого соотношения и тождества (5) найдем

$$d\Psi(X,Y)=\nabla_X(\Theta)\Phi Y-\nabla_Y(\Theta)\Phi X-\|\Theta\|^2\Omega(X,Y)+$$
$$+\frac{1}{2}\{\Psi(Y)\Theta(X)-\Psi(X)\Theta(Y)\}-\eta(Y)\Theta(\mathfrak{B}(\Phi X))+\eta(X)\Theta(\mathfrak{B}(\Phi Y)),$$

где $\|\Theta\|^2=\Theta(\gamma)=\langle\gamma,\gamma\rangle$, $X,Y\in\mathcal{D}$. В силу инволютивности распределения $\mathcal{D}$ и определения α-распределения из предыдущего равенства получаем

$$\nabla_X(\Theta)\Phi Y-\nabla_Y(\Theta)\Phi X=\|\Theta\|^2\Omega(X,Y),\quad X,Y\in\mathcal{D}. \quad (6)$$

Итак, если распределение $\mathcal{D}$, содержащееся в α-распределении, инволютивно, то справедливо равенство (6).

Пусть теперь распределение $\mathcal{D}$ антиинвариантно. В силу определения 3 имеем $\langle X,\Phi X\rangle=0$ для любых $X,Y\in\mathcal{D}$, т. е. $\Omega(X,Y)=0$, следовательно, равенство (6) примет вид

$$\nabla_X(\Theta)\Phi Y=\nabla_Y(\Theta)\Phi X,\quad X,Y\in\mathcal{D}. \quad (7)$$

Обратно, пусть выполняется (7), тогда из соотношения (6) имеем $\Omega(X,Y)=0$, следовательно, $\langle X,\Phi Y\rangle=0$, $X,Y\in\mathcal{D}$, и, таким образом, $\mathcal{D}$ антиинвариантно. □

Следствие. Инволютивное распределение, содержащееся в α-распределении $\mathcal{LC}c$-многообразия при условии ковариантного постоянства формы Ли в римановой связности, антиинвариантно.

Такие структуры возникают, например, на вполне геодезических подмногообразиях обобщенных многообразий Хопфа [7].

Литература

1. Кириченко В.Ф. *Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны* // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 3. – С. 354–363.
2. Кириченко В.Ф. *Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51. – № 5. – С. 57–66.
3. Vaisman I. *On locally and globally conformal Kähler manifolds* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1992. – V. 2. – P. 533–542.
4. Vaisman I. *On locally conformal almost Kähler manifolds* // Israel J. Math. – 1976. – V. 24. – № 3-4. – P. 338–351.
5. Ianus S., Visinescu M. *Kaluza–Klein theory with scalar fields on generalised Hopf manifolds* // Classical Quasitum Gravity. – 1987. – V. 4. – № 5. – P. 1317–1325.
6. Ikuta K. *α-submanifolds on a locally conformal Kähler manifolds* // Math. Soc. Rep. Ochanomizu Univ. – 1980. – V. 31. – № 1. – P. 42–54.
7. Vaisman I. *Locally conformal Kähler manifolds with parallel Lee forms* // Rend. di Mat. – 1979. – V. 12. – P. 268–284.
8. Кириченко В.Ф. *Аксиомы Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – Т. 48. – № 4. – С. 711–734.
9. Goldberg S., Yano K. *Integrability of almost cosymplectic structures* // Pacific J. Math. – 1980. – V. 31. – № 2. – P. 373–382.
10. Волкова Е.С. *Тождества кривизны нормальных многообразий киллингова типа* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – № 3. – С. 351–362.
11. Chinea D., Marrero J.C. *Conformal changes of almost contact metric structures* // Riv. math. Univ. Parma. – 1992. – № 1. – P. 19–31.
12. Кириченко В.Ф. *Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1986. – Т. 18. – С. 25–71.

Финансовая Академия при
Правительстве Российской Федерации

Поступила
10.11.1999