ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

УДК 517.518

В.Э. ГЕЙТ

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ЛОРЕНЦА О РЯДАХ ФУРЬЕ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЕЕ ОБРАЩЕНИЕ

Пусть функция $f \in C_{2\pi}^M$, т.е. непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, периода 2π, а ее ряд Фурье–Лебега

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu(f)\cos\nu x + b_\nu(f)\sin\nu x) \tag{1}$$

имеет монотонные последовательности $\{a_\nu(f)\}_{\nu=1}^\infty$, $\{b_\nu(f)\}_{\nu=1}^\infty$ коэффициентов. Далее, $\omega_k(f^{(r)},\delta)$ означает k-й модуль непрерывности, а $S_n(f^{(r)})$ — n-ю сумму Фурье r-й производной функции f.

Теорема. *Пусть задано $k \in N$, целое $r \ge 0$ и пусть мажоранта $\varphi(\delta) > 0$ $(0 < \delta \le \pi)$, $\varphi(\delta) \downarrow 0$ $(\delta \downarrow +0)$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi(\nu^{-1}) < +\infty$, если данное $r = 0$. Чтобы для каждой функции $f \in C_{2\pi}^M$ были равносильны O-соотношения*

$$|a_n(f)|, |b_n(f)| = O(n^{-r-1}\varphi(n^{-1})) \tag{$2'$}$$

и

$$\omega_k(f^{(r)},\delta) = O(\varphi(\delta)), \tag{$2''$}$$

необходимо и достаточно выполнения условий Н.К. Бари [1]

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi(\nu^{-1}) = O(\varphi(n^{-1})) \tag{B}$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi(\nu^{-1}) = O(n^k\varphi(n^{-1})). \tag{B_k}$$

Замечание. Лоренц [2] доказал эквивалентность соотношений $(2')$, $(2'')$ при $\varphi(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, $k = 1$, $r = 0$ методом, пригодным и при $r \ne 0$.

Доказательство. Достаточность. Пусть данная мажоранта $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условиям (B), (B_k) и выполняется $(2')$. Тогда для коэффициентов r раз продифференцированного ряда (1) будем иметь

$$|n^r a_n(f)|, |n^r b_n(f)| = O(n^{-1}\varphi(n^{-1})).$$

Значит, r раз продифференцированный ряд (1) сходится равномерно к $f^{(r)}(x) \in C_{2\pi}$, т.к. по условию (B) имеем, в частности, сходимость ряда $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \nu^{-1}\varphi(\nu^{-1}) = O(\varphi(1))$. При этом ясно, что

$$|a_n(f^{(r)})|, |b_n(f^{(r)})| = O(n^{-1}\varphi(n^{-1})), \tag{3}$$

откуда, как нетрудно видеть,

$$\|f^{(r)} - S_n f^{(r)}\|_C = O\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi(\nu^{-1})\Big) = O(\varphi(n^{-1})). \tag{4}$$

При доказательстве $(2'')$ можем, очевидно, считать, что коэффициенты Фурье для $f^{(r)}$ неотрицательны. Применяя дважды неравенство (4) леммы 1 ([3], с. 69) сначала к четной, а затем к нечетной части $f^{(r)}$, будем иметь

$$\omega_k(f^{(r)}, n^{-1}) \le n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu(f^{(r)}) + b_\nu(f^{(r)}))\nu^k + O(\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_C).$$

Отсюда по (3), (4) и с помощью условия (B_k) получаем

$$\omega_k(f^{(r)}, n^{-1}) = O(\varphi(n^{-1})).$$

Хорошо известно (см., напр., [1], с. 487), что это дает $(2'')$.

Обратно, имея теперь соотношение $(2'')$, докажем $(2')$, не привлекая условий (B), (B_k), т. е. при помощи одной лишь монотонности $\{a_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$. Для этого далее будем пользоваться неравенствами {22}–{24} леммы 3 из ([3], с. 72), применяя их надлежащим образом к функциям вида

$$\psi_\pm(x) = (f^{(r)}(x) \pm f^{(r)}(-x))/2,$$

для которых имеется очевидное неравенство

$$\omega_k(\psi_\pm, \delta) \le \omega_k(f^{(r)}, \delta). \tag{5}$$

Если данное r четное, то вполне ясно, что

$$|a_n(\psi_+)| = n^r|a_n(f)|, \quad |b_n(\psi_-)| = n^r|b_n(f)|.$$

При k четном применим сначала {23} к $\psi_+(x)$, по которому

$$\omega_k(\psi_+, n^{-1}) \ge C_k n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k|a_\nu(\psi_+)| = C_k n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r}|a_\nu(f)| \ge C_k n^{-k}|a_n(f)|\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r}$$

ввиду монотонности убывания $\{|a_n(f)|\}_{n=1}^{\infty}$, с константой $C_k > 0$, не зависящей от n. Поэтому ввиду (5) и $(2'')$

$$C_k n^{-k}|a_n(f)|\frac{n^{k+r+1}}{k+r+1} \le \omega_k(f^{(r)}, n^{-1}),$$

так что

$$n^{r+1}|a_n(f)| = O(\varphi(n^{-1})).$$

Чтобы получить такое же соотношение для $|b_n(f)|$ при k четном (продолжая считать r четным), надо аналогично применить неравенство {24} к $\psi_-(x)$. При k нечетном (r четное) требуемое соотношение $(2')$ для $|a_n(f)|$ получается из {24} и $\psi_+(x)$, а $(2')$ для $|b_n(f)|$ вытекает из {23} и $\psi_-(x)$.

Случай r нечетного получается также из неравенств {23}, {24}, применяемых к $\psi_\pm(x)$ надлежащим образом и с учетом на этот раз соотношений

$$|a_n(f^{(r)})| = n^r|b_n(f)|, \quad |b_n(f^{(r)})| = n^r|a_n(f)|.$$

Так, если k четное, то из {23} для $\psi_+(x)$ получим $|b_n(f)| = O(n^{-r-1}\varphi(n^{-1}))$, а из {24} для $\psi_-(x)$ будем иметь $(2')$ для $|a_n(f)|$. Наконец, при k нечетном {23}, примененное к $\psi_-(x)$, дает $(2')$ для $|a_n(f)|$, а {24} вместе с $\psi_+(x)$ дает $(2')$ для $|b_n(f)|$.

Таким образом, теорема установлена в части достаточности, так что “обобщенная теорема Лоренца” доказана.

Необходимость. Пусть данная мажоранта $0 < \varphi(\delta) \downarrow 0$ $(\delta \downarrow +0)$ такова, что для каждой функции $f \in C_{2\pi}^M$ соотношения $(2')$ и $(2'')$ эквивалентны. В таком случае для функции вида

$$f_r(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-r-1}\varphi(\nu^{-1})(\cos\nu x + \sin\nu x)$$

имеем $f_r(x) \in C_{2\pi}^M$, что очевидно при $r \neq 0$, а если данное $r = 0$, то это включение ясно из сделанного предположения $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi(\nu^{-1}) < +\infty$. Далее, функция f_r должна удовлетворять по допущению необходимости O-соотношению $(2'')$, поскольку $(2')$ для нее выполняется тривиально. Значит, при данном k $(= 1, \dots)$ и заданном целом $r \geq 0$ имеем

$$\omega_k(f_r^{(r)}, \delta) = O(\varphi(\delta)).$$

Полагая теперь

$$\psi_{\pm}(x) = (f_r^{(r)}(x) \pm f_r^{(r)}(-x))/2,$$

можем считать, что каждая из этих функций имеет последовательность коэффициентов Фурье $\{n^{-1}\varphi(n^{-1})\}_{n=1}^{\infty}$. При этом, как и ранее, $\omega_k(\psi_{\pm}, \delta) \leq \omega_k(f_r^{(r)}, \delta) = O(\varphi(\delta))$. Тогда по неравенству $\{22\}$, примененному к $\psi_+(x)$, независимо от четности k будем иметь

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi(\nu^{-1}) = O(\omega_k(\psi_+, n^{-1})) = O\left(\varphi(\tfrac{1}{n})\right),$$

так что $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (B). Наконец, по $\{23\}$ леммы 3 [3] при k четном для $\psi = \psi_+$ и для $\psi = \psi_-$ при k нечетном получаем

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi(\nu^{-1}) = O(\omega_k(\psi, n^{-1})) = O\left(\varphi(\tfrac{1}{n})\right),$$

а это означает выполнение условия (B_k) для мажоранты $\varphi(\delta)$. Теорема доказана также и в части необходимости.

В заключение отметим, что с первоначальной формой теоремы Лоренца можно ознакомиться также по монографии ([4], с. 678).

Литература

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1956. – Т. 5. – С. 483–522.
2. Lorentz G.G. *Fourier Koeffizienten und Funktionenklassen* // Math. Z. – 1948. – Bd. 51. – S. 135–149.
3. Гейт В.Э. *Теоремы вложения для некоторых классов периодически непрерывных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 4. – С. 67–77.
4. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

Челябинский государственный университет

Поступила 26.06.1995