Известия вузов. Математика
2015, №5, с. 45–48

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.Н. СОСОВ

ОБ ОСНОВНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ КОНЕЧНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Аннотация. Получены новые основные метрические инварианты конечных метрических пространств. Эти инварианты можно будет использовать для классификации конечных метрических пространств и их распознавания.

Ключевые слова: конечное метрическое пространство, метрический инвариант.

УДК: 515.124

Введение

Рассмотрим некоторое множество $\mathbb{K}$ конечных метрических пространств одной и той же мощности $N > 1$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $F : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$, принимающая значения в множестве всех неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+$, является *основным метрическим инвариантом* (на $\mathbb{K}$), если выполняются условия

(i) $F(X) = F(Y)$ для любых изометричных метрических пространств X, $Y \in \mathbb{K}$;

(ii) для любого метрического пространства $(X, \rho) \in \mathbb{K}$

$$F(X) \subset \{\rho(x, y) : x,\ y \in X,\ x \neq y\};$$

(iii) для любых метрических пространств (X, ρ), $(Y, d) \in \mathbb{K}$

$$|F(X) - F(Y)| \leq 2d_s(X, Y),$$

где

$$d_s(X, Y) = \frac{1}{2}\min\{\operatorname{dis} f : f : X \to Y \text{ — биекция}\},$$
$$\operatorname{dis} f = \max\{|\rho(x, y) - d(f(x), f(y))| : x, y \in X\}.$$

Расстояние d_s между метрическими пространствами было введено в [1], оно не меньше, чем расстояние d_{GH} Громова–Хаусдорфа между теми же метрическими пространствами (различные определения которого можно найти в ([2], сс. 303, 306)), и, как правило, проще вычисляется.

Приведем известные примеры основных метрических инвариантов конечного метрического пространства $(X, \rho) \in \mathbb{K}$.

1. Диаметр пространства X: $D(X) = \max\{\rho(x, y) : x,\ y \in X\}$ ([1]; [2], с. 305).

2. K-радиусы, где $1 \leq K \leq N - 1$, пространства X имеют вид

$$R_K(X) = \min\{\beta(X, S) : S \subset X,\ 1 \leq \operatorname{card}(S) \leq K\}, \tag{1}$$

Поступила 09.12.2013

здесь $\beta(X,S)=\max\{\rho(x,S):x\in X\}$, $\mathrm{card}(S)$ — мощность множества S ([1], где применялось обозначение $R_{KX}(X)=R_K(X)$).

В [1] высказана идея об использовании, в частности, основных метрических инвариантов для распознавания конечных метрических пространств. При $N\in\{1,2,3\}$ вопрос решается просто, поскольку для любых X, $Y\in\mathbb{K}$ имеет место тождество ([1], замечание 2)

$$\max\{|D(X)-D(Y)|,\ |R_1(X)-R_1(Y)|,\ |R_2(X)-R_2(Y)|\}=2d_s(X,Y)(=2d_{GH}(X,Y)).$$

Для распознавания конечных метрических пространств мощности $N>3$ важны оценки снизу для расстояний d_s между ними, выраженные с помощью основных метрических инвариантов. Таким образом, для получения более точных таких оценок и для развития теории метрических инвариантов необходимо найти новые основные метрические инварианты. С другой стороны, новые метрические инварианты позволят выделить новые классы пространств и провести более подробную классификацию конечных метрических пространств. Приведем простой пример. Равенство $D(X)=R_1(X)$ характеризует в K множество пространств X, у которых каждая точка является чебышевским центром, т. е. центром шара минимального радиуса, содержащего все пространство X [3]–[5].

Основные результаты и доказательства

Определение 2. Пусть $2\le K<N$. Определим на множестве $\mathbb{K}$ функции

$$D_K(X)=\min\{D(S):S\subset X,\ \mathrm{card}(S)=K\};$$

$$\mathrm{mar}_{LK}(X)=\max\{R_L(S):S\subset X,\ \mathrm{card}(S)=K\},$$

где $1\le L\le K-1$;

$$\mathrm{mir}_{LK}(X)=\min\{R_L(S):S\subset X,\ \mathrm{card}(S)=K\},$$

где $1\le L\le K-1$.

Несложно заметить, что при $N>2$ для любого $X\in\mathbb{K}$ имеют место равенства

$$D(X)=\mathrm{mar}_{12}(X),\quad D_2(X)=\mathrm{mir}_{(L-2)(L-1)}(X)=R_{N-1}(X),$$

где L — натуральное число, $2<L\le N$.

Оказывается, что все функции из определения 2 являются основными метрическими инвариантами.

Теорема. *Пусть $2\le K<N$. Тогда функции D_K, mar_{LK}, mir_{LK}, где $1\le L\le K-1$, являются основными метрическими инвариантами.*

Доказательство. Из определения 2 сразу следует, что функции D_K, mar_{LK}, mir_{LK} удовлетворяют условиям (i), (ii) из определения 1. Докажем, что эти функции удовлетворяют условию (iii). Пусть для определенности

$$D_K(X)\ge D_K(Y),\quad \mathrm{mar}_{LK}(X)\ge\mathrm{mar}_{LK}(Y),\quad \mathrm{mir}_{LK}(X)\ge\mathrm{mir}_{LK}(Y).$$

Выберем произвольно метрические пространства (X,ρ), $(Y,d)\in\mathbb{K}$. Тогда найдется такая биекция $f:X\to Y$, что $\mathrm{dis}\,f=2d_s(X,Y)$. Пусть $a=2d_s(X,Y)$. Тогда

$$\rho(x,x')\le d(f(x),f(x'))+a \tag{2}$$

для любых $x,x'\in X$. Используя это неравенство и определение 2, получим неравенство $D_K(X)\le D(S)\le D(f(S))+a$ для любого $S\subset X$ такого, что $\mathrm{card}(S)=K$. Возьмем минимум в правой части последнего неравенства по всем $S \subset X$ таким, что $\operatorname{card}(S) = K$. Тогда получим требуемое неравенство

$$D_K(X) \leq D_K(Y) + a.$$

Используя неравенство (2) и формулу (1), получим неравенство

$$R_L(S) = \min\{\max\{\min\{\rho(x,z) : z \in S_1\} : x \in X\} : S_1 \subset S,\ 1 \leq \operatorname{card}(S_1) \leq L\} \leq \\ \leq R_L(f(S)) + a \quad (3)$$

для любого $S \subset X$ такого, что $\operatorname{card}(S) = K$. Если возьмем максимум по всем $S \subset X$ таким, что $\operatorname{card}(S) = K$ в правой части этого неравенства, а затем в левой его части, то получим требуемое неравенство $\operatorname{mar}_{LK}(X) \leq \operatorname{mar}_{LK}(Y) + a$. Если же возьмем минимум по всем $S \subset X$ таким, что $\operatorname{card}(S) = K$ в левой части неравенства (3), а затем в правой его части, то получим требуемое неравенство $\operatorname{mir}_{LK}(X) \leq \operatorname{mir}_{LK}(Y) + a$. $\square$

Учитывая приведенные примеры известных основных метрических инвариантов и доказанную теорему, при $N = 4$ получим неравенство

$$\max\{|D(X) - D(Y)|, |R_1(X) - R_1(Y)|, |R_2(X) - R_2(Y)|, |R_3(X) - R_3(Y)|, |D_3(X) - D_3(Y)|, \\ |\operatorname{mar}_{13}(X) - \operatorname{mar}_{13}(Y)|, |\operatorname{mir}_{13}(X) - \operatorname{mir}_{13}(Y)|, |\operatorname{mar}_{23}(X) - \operatorname{mar}_{23}(Y)|\} \leq 2d_s(X,Y). \quad (4)$$

В общем случае равенства в (4) нет. Действительно, рассмотрим подпространства

$$X = \{x_1 = (0;0;0),\ x_2 = (12;0;0),\ x_3 = (10;6;0),\ x_4 = (8;5;3)\},$$
$$Y = \{y_1 = (0;0;0),\ y_2 = (12;0;0),\ y_3 = (10;5;3),\ y_4 = (8;6;0)\}$$

метрического пространства $(\mathbb{R}^3, \rho)$ с метрикой

$$\rho((a^1;a^2;a^3),(b^1;b^2;b^3)) = \max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|, |a^3 - b^3|\}.$$

Тогда нетрудно вычислить, что

$$D(X) = D(Y) = 12, \quad R_1(X) = R_1(Y) = 8, \quad R_2(X) = R_2(Y) = \operatorname{mir}_{13}(X) = \operatorname{mir}_{13}(Y) = 5,$$

$$R_3(X) = R_3(Y) = 3, \quad D_3(X) = D_3(Y) = \operatorname{mar}_{23}(X) = \operatorname{mar}_{23}(Y) = 6, \quad \operatorname{mar}_{13}(X) = \operatorname{mar}_{13}(Y) = 10.$$

Следовательно, левая часть неравенства (4) равна нулю. Теперь найдем, что биекция $f : X \to Y$, для которой $\operatorname{dis} f = 2d_s(X,Y)$ имеет вид $f(x_i) = y_i$ для всех $i \in \{1,2,3,4\}$. Тогда $2d_s(X,Y) = 1$.

Таким образом, вышеприведенных основных метрических инвариантов недостаточно для того, чтобы (4) являлось тождеством.

Задача о нахождении новых основных метрических инвариантов конечных метрических пространств представляется автору важной для приложений и интересной.

Литература

[1] Сосов Е.Н. *Относительный N-радиус ограниченного множества метрического пространства*, Учен. зап. Казанск. ун-та **153** (4), 28–36 (2011).

[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии* (Ин-т компьютерных иследований, Москва–Ижевск, 2004).

[3] Сосов Е.Н. *Относительный чебышевский центр конечного множества геодезического пространства*, Изв. вузов. Матем., № 4, 66–72 (2008).

[4] Rao T. S. S. R. K. *Chebyshev centres and centrable sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (9), 2593–2598 (2002).

[5] Bandyopadhyay P., Dutta S. *Weighted Chebyshev centres and intersection properties of balls in Banach spaces*, “Function spaces” (Edwadswille, IL, 2002), 43–58, Contemp. Math. **328** (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003).

Е.Н. Сосов

доцент, кафедра геометрии,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` Evgenii.Sosov@kpfu.ru

E.N. Sosov

Main metric invariants of finite metric spaces

Abstract. In the present paper we obtain new main metric invariants of finite metric spaces. These invariants can be used for classification of the finite metric spaces and their recognition.

Keywords: finite metric space, metric invariant.

E.N. Sosov

Associate Professor, Chair of Geometry,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Evgenii.Sosov@kpfu.ru