ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 10 (509)

УДК 514.763:514.84

В.В. ШУРЫГИН (мл.)

КОГОМОЛОГИИ ДВОЙНОГО КОМПЛЕКСА БРЫЛИНСКОГО ПУАССОНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И КВАНТОВЫЕ КОГОМОЛОГИИ ДЕ РАМА

В настоящее время активно изучаются пуассоновы многообразия [1]–[5], в частности, исследуются различные процедуры квантования геометрических объектов на пуассоновых многообразиях [6], [7]. В [8] был предложен один из способов деформационного квантования пуассоновых многообразий: построены (полиномиальные) квантовые когомологии де Рама пуассонова многообразия, а также показано, что квантовые когомологии де Рама симплектического многообразия получаются деформационным квантованием его когомологий де Рама. В данной работе показывается, что квантовые когомологии де Рама произвольного пуассонова многообразия также получаются деформационным квантованием его когомологий де Рама.

1. Пусть M — гладкое многообразие. Будем обозначать алгебру гладких функций на M через $C^\infty(M)$, кольцо дифференциальных форм на M через $\Omega^*(M)$ и пространство кососимметрических контравариантных тензорных полей на M через $\mathcal{V}^*(M)$.

Скобкой Пуассона на гладком многообразии M называется билинейное кососимметричное отображение $\{\ ,\ \} : C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}$$

и тождеству Якоби

$$\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}=0.$$

Многообразие, наделенное скобкой Пуассона, называется *пуассоновым многообразием.* Скобка Пуассона на гладком многообразии M однозначно определяет контравариантный кососимметрический тензор $w\in\mathcal{V}^2(M)$ такой, что

$$\{f,g\}=i(w)(df\wedge dg) \qquad (1)$$

для всех $f,g\in C^\infty(M)$, где $i(w):\Omega^p(M)\to\Omega^{p-2}(M)$ означает внутреннее умножение на w; в локальных координатах $(i(w)\alpha)_{i_1\dots i_{p-2}}=w^{jk}\alpha_{jki_1\dots i_{p-2}}$. Этот тензор обычно называют тензором Пуассона. Известно, что скобка (1) на $C^\infty(M)$, построенная по такому тензору, удовлетворяет тождеству Якоби тогда и только тогда, когда $[w,w]=0$, где $[\ ,\ ]$ — скобка Схоутена–Нейенхейса на $\mathcal{V}^*(M)$ ([3], [5]). В дальнейшем будем обозначать пуассоново многообразие следующим образом: (M,w). Если ранг тензора w постоянен, то пуассоново многообразие (M,w) называется *регулярным.* Примерами регулярных пуассоновых многообразий являются симплектические многообразия.

2. В работе [9] введен кодифференциал $\delta:\Omega^p(M)\to\Omega^{p-1}(M)$ на пуассоновом многообразии (M,ω), определяемый соотношением

$$\delta=[i(w),d]=i(w)\circ d-d\circ i(w),$$

где $d:\Omega^p(M)\to\Omega^{p+1}(M)$ — внешний дифференциал, а также показано, что $\delta^2=0$ и $d\circ\delta+\delta\circ d=0$.

Предложение 2.1. *Пусть (M, w) — пуассоново многообразие. Тогда для любого натурального числа k имеет место тождество*

$$i(w) \circ d \circ i^k(w) = \frac{k}{k+1}\, d \circ i^{k+1}(w) + \frac{1}{k+1}\, i^{k+1}(w) \circ d, \tag{2}$$

где $i^p(w) = \underbrace{i(w) \circ \dots \circ i(w)}_{p\ \text{раз}}$.

Доказательство. Для скобки Схоутена–Нейенхейса выполняется тождество $[[i(u), d], i(v)] = i(-[v, u])$ для любых $u, v \in \mathcal{V}^*(M)$ (напр., [10]). Подставляя в это тождество $u = v = w$ и учитывая, что $[w, w] = 0$, получаем $[[i(w), d], i(w)] = 0$. Раскрывая скобки в последнем равенстве, приходим к тождеству

$$i(w) \circ d \circ i(w) = \frac{1}{2} d \circ i^2(w) + \frac{1}{2} i^2(w) \circ d. \tag{3}$$

Пусть теперь $k \geq 2$. Используя (3), получаем систему

$$\begin{aligned}
i(w) \circ d \circ i^k(w) &= \frac{1}{2} d \circ i^{k+1}(w) + \frac{1}{2} i^2(w) \circ d \circ i^{k-1}(w),\\
i^2(w) \circ d \circ i^{k-1}(w) &= \frac{1}{2} i(w) \circ d \circ i^k(w) + \frac{1}{2} i^3(w) \circ d \circ i^{k-2}(w),\\
&\dots\\
i^{k-1}(w) \circ d \circ i^2(w) &= \frac{1}{2} i^k(w) \circ d \circ i(w) + \frac{1}{2} i^{k-2}(w) \circ d \circ i^3(w),\\
i^k(w) \circ d \circ i(w) &= \frac{1}{2} i^{k+1}(w) \circ d + \frac{1}{2} i^{k-1}(w) \circ d \circ i^2(w).
\end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений относительно $i^p(w) \circ d \circ i^{k-p+1}(w)$, $p = 0, 1, \dots, k+1$, находим (2). $\square$

Следствие 2.1. Для любого натурального числа k имеет место тождество

$$\frac{1}{k} i^k(w) \circ d - \frac{1}{k} d \circ i^k(w) = \delta \circ i^{k-1}(w). \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, $\delta \circ i^{k-1}(w) = i(w) \circ d \circ i^{k-1}(\omega) - d \circ i^k(w) = \frac{k-1}{k} d \circ i^k(w) + \frac{1}{k} i^k(w) \circ d - d \circ i^k(w) = \frac{1}{k} i^k(w) \circ d - \frac{1}{k} d \circ i^k(w)$. $\square$

Пусть $\Omega_0(M) = \bigoplus\limits_{k \geq 0} \Omega^{2k}(M)$, $\Omega_1(M) = \bigoplus\limits_{k \geq 0} \Omega^{2k+1}(M)$. Тогда $\Omega^*(M) = \Omega_0(M) \oplus \Omega_1(M)$ и на $\Omega^*(M)$ введена следующая $\mathbf{Z}_2$-градуировка: все элементы $\Omega_0(M)$ назовем четными (степени 0), а все элементы $\Omega_1(M)$ — нечетными (степени 1). Заметим, что операторы $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ и $D := d + \delta : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ являются нечетными, т. е. отображают четные элементы в нечетные, и наоборот.

В дальнейшем будем обозначать $i(w)$ через i, и $i(\omega)\alpha$ через $i\alpha$. Гомоморфизм $\varphi : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$, определенный формулой

$$\varphi(\alpha) := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} i^k \alpha = \alpha + i\alpha + \frac{1}{2} i^2 \alpha + \frac{1}{6} i^3 \alpha + \cdots,$$

переводит пространства $\Omega_0(M)$ и $\Omega_1(M)$ в себя, т. е. сохраняет $\mathbf{Z}_2$-градуировку на $\Omega^*(M)$.

Докажем, что оператор φ осуществляет изоморфизм между $\mathbf{Z}_2$-градуированными дифференциальными группами $(\Omega^*(M), d)$ и $(\Omega^*(M), D)$.

Сначала покажем, что имеет место равенство

$$\varphi \circ d = D \circ \varphi, \tag{5}$$

т. е. что $\varphi : (\Omega^*(M), d) \to (\Omega^*(M), D)$ — гомоморфизм дифференциальных групп.

Пусть $\beta_k \in \Omega^k(M)$ — компонента формы $\beta \in \Omega^*(M)$ относительно разложения $\Omega^*(M) = \bigoplus\limits_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$. Число k назовем степенью компоненты β_k и обозначим $|\beta_k|$.

Для доказательства (5) достаточно проверить, что для любой $\alpha = \beta_p \in \Omega^p(M)$, $p = 0, 1, \dots, n$, имеет место равенство компонент $(\varphi d\alpha)_k = (D\varphi\alpha)_k$, $k = 0, \dots, n$.

Пусть сначала $|\alpha| = 2m$. Тогда $(\varphi d\alpha)_{2m+1} = d\alpha = (D\varphi\alpha)_{2m+1}$. Для компонент степени $2m-1$ имеем

$$(\varphi d\alpha)_{2m-1} = id\alpha = di\alpha + \delta\alpha = (D\varphi\alpha)_{2m-1},$$

что следует из определения оператора δ.

Для компонент любой другой степени $k = 1, 3, \dots, 2m-3$ имеем

$$(\varphi d\alpha)_k = \frac{1}{k!} i^k d\alpha = \frac{1}{k!} di^k\alpha + \frac{1}{(k-1)!}\delta i^{k-1}\alpha = (D\varphi\alpha)_k,$$

что вытекает из формулы (4). Остальные компоненты форм $\varphi d\alpha$, $D\varphi\alpha$ равны нулю.

Если $|\alpha| = 2m+1$, то равенства $(\varphi d\alpha)_k = (D\varphi\alpha)_k$ для степеней $k = 2, 4, \dots, 2m+2$ проверяются точно так же, а для компонент степени 0 имеем

$$(\varphi d\alpha)_0 = \frac{1}{(m+1)!} i^{m+1} d\alpha = \frac{1}{m!}\delta i^m \alpha = (D\varphi\alpha)_0,$$

что также следует из формулы (4) с учетом того, что $i^{m+1}\alpha = 0$. Все остальные компоненты форм $\varphi d\alpha$, $D\varphi\alpha$ равны нулю.

Предложение 2.2. *Гомоморфизм $\varphi : (\Omega^*(M), d) \to (\Omega^*(M), D)$ является изоморфизмом $\mathbf{Z}_2$-градуированных дифференциальных групп.*

Доказательство. Так как отображение φ сохраняет $\mathbf{Z}_2$-градуировку и является гомоморфизмом дифференциальных групп, достаточно показать, что оно биективно.

Обоснуем биективность $\varphi|_{\Omega_0(M)} : \Omega_0(M) \to \Omega_0(M)$.

Для этого докажем, что $\varphi|_{\Omega_0(M)}$ — эпиморфизм и мономорфизм. Рассмотрим любой элемент $c = \alpha_0 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m} \in \Omega_0(M)$, где $|\alpha_k| = k$, $k = 0, 2, \dots, 2m$. Элемент $c_1 = c - \varphi(\alpha_{2m})$ имеет вид $c_1 = \beta_0 + \beta_2 + \dots + \beta_{2m-2}$, где $\beta_{2m-2} = \alpha_{2m-2} - i\alpha_{2m}$, $\beta_{2m-4} = \alpha_{2m-4} - \frac{1}{2} i^2 \alpha_{2m}, \dots, \beta_0 = \alpha_0 - \frac{1}{m!} i^m \alpha_{2m}$. Теперь рассмотрим элемент $c_2 = c_1 - \varphi(\beta_{2m-2}) = c - \varphi(\alpha_{2m} + \beta_{2m-2})$ (т. е. $c = c_2 + \varphi(\alpha_{2m} + \beta_{2m-2})$) и так далее. На $(m+1)$-м шаге получим $c_{m+1} = 0$, откуда $c = \varphi(\alpha_{2m} + \beta_{2m-2} + \dots) \in \operatorname{im} \varphi|_{\Omega_0(M)}$.

Условие $\varphi(c) = 0$, где $c = \alpha_0 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m} \in \Omega_0(M)$, равносильно системе

$$\begin{aligned} \alpha_{2m} &= 0, \\ \alpha_{2m-2} + i\alpha_{2m} &= 0, \\ \alpha_{2m-4} + i\alpha_{2m-2} + \frac{1}{2} i^2 \alpha_{2m} &= 0, \\ &\dots \\ \alpha_0 + i\alpha_2 + \dots + \frac{1}{m!} i^m \alpha_{2m} &= 0, \end{aligned}$$

откуда при движении сверху вниз получим, что все α_k, $k = 0, 2, \dots, 2m$, равны нулю. Таким образом, $c = 0$ и φ — мономорфизм.

Аналогично доказывается, что $\varphi|_{\Omega_1(M)} : \Omega_1(M) \to \Omega_1(M)$ есть биекция. □

Доказанное предложение позволяет вычислить когомологии дифференциальной группы $(\Omega^*(M), D)$. Так как $\Omega^*(M) = \Omega_0(M) \oplus \Omega_1(M)$ и оператор D является нечетным, получаем

$$H(\Omega^*(M), D) = H_0(\Omega^*(M), D) \oplus H_1(\Omega^*(M), D),$$

где

$$H_0(\Omega^*(M),D) := \frac{\ker D:\Omega_0(M)\to\Omega_1(M)}{\operatorname{im} D:\Omega_1(M)\to\Omega_0(M)}, \quad H_1(\Omega^*(M),D) := \frac{\ker D:\Omega_1(M)\to\Omega_0(M)}{\operatorname{im} D:\Omega_0(M)\to\Omega_1(M)}.$$

Аналогично

$$H(\Omega^*(M),d) = H_0(\Omega^*(M),d)\oplus H_1(\Omega^*(M),d),$$

где

$$\begin{aligned} H_0(\Omega^*(M),d) &:= \frac{\ker d:\Omega_0(M)\to\Omega_1(M)}{\operatorname{im} d:\Omega_1(M)\to\Omega_0(M)} \cong \bigoplus_{k\geq 0} H^{2k}_{dR}(M),\\ H_1(\Omega^*(M),d) &:= \frac{\ker d:\Omega_1(M)\to\Omega_0(M)}{\operatorname{im} d:\Omega_0(M)\to\Omega_1(M)} \cong \bigoplus_{k\geq 0} H^{2k+1}_{dR}(M). \end{aligned}$$

Так как $\varphi:(\Omega^*(M),d)\to(\Omega^*(M),D)$ есть изоморфизм $\mathbf{Z}_2$-градуированных дифференциальных групп, получаем

Следствие 2.2. Группа $H_0(\Omega^*(M),D)$ изоморфна прямой сумме четномерных когомологий де Рама $\bigoplus\limits_{k\geq 0} H^{2k}_{dR}(M)$ многообразия M. Группа $H_1(\Omega^*(M),D)$ изоморфна прямой сумме нечетномерных когомологий де Рама $\bigoplus\limits_{k\geq 0} H^{2k+1}_{dR}(M)$ многообразия M.

3. Применим следствие 2.2 для вычисления когомологий двойного комплекса $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^{p,q},\delta,d' = (-1)^p d)$, где $\mathcal{C}^{p,q} = \Omega^{q-p}(M)$, $p,q\in\mathbf{Z}$, введенного в [1] ($\dim M = n$).

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
 & & & & 0 & \xrightarrow{\delta} & \Omega^n(M) & \xrightarrow{\delta} & \cdots\\
 & & & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
 & & 0 & \xrightarrow{\delta} & \Omega^n(M) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^{n-1}(M) & \xrightarrow{\delta} & \cdots\\
 & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta} & \Omega^n(M) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^{n-1}(M) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^{n-2}(M) & \xrightarrow{\delta} & \cdots\\
 & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^0(M) & \xrightarrow{\delta} & \cdots\\
 & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^0(M) & \xrightarrow{\delta} & 0 & & \\
 & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \uparrow & & & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta} & \Omega^0(M) & \xrightarrow{\delta} & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array} \tag{6}$$

Этот комплекс будем называть *двойным комплексом Брылинского пуассонова многообразия* (M,w). Диагональный комплекс двойного комплекса (6) имеет вид $\mathcal{A} = (A^p,\widetilde{D}^p)$, $p\in\mathbf{Z}$, где $A^{2k} = \Omega_0(M)$, $A^{2k+1} = \Omega_1(M)$, $k\in\mathbf{Z}$, а $\widetilde{D}^p = \delta + (-1)^p d'$. Но $(-1)^p d' = d$, следовательно, $\widetilde{D} = D$. Таким образом, этот диагональный комплекс имеет вид

$$\cdots \xrightarrow{D} A^{2k-1} = \Omega_1(M) \xrightarrow{D} A^{2k} = \Omega_0(M) \xrightarrow{D} A^{2k+1} = \Omega_1(M) \xrightarrow{D} A^{2k+2} = \Omega_0(M) \xrightarrow{D} \cdots$$

Когомологиями двойного комплекса Брылинского $H^*_{Br}(M,w)$ будем называть когомологии этого диагонального комплекса.

Из следствия 2.2 непосредственно вытекает

Теорема 3.1. *Для любого пуассонова многообразия* (M, w) *имеют место изоморфизмы*

$$H_{Br}^{2p}(M, w) \cong \bigoplus_{k \geq 0} H_{dR}^{2k}(M), \quad H_{Br}^{2p+1}(M, w) \cong \bigoplus_{k \geq 0} H_{dR}^{2k+1}(M), \quad p \in \mathbf{Z}.$$

4. Вычислим квантовые когомологии де Рама пуассоновых многообразий [8]. Напомним их построение.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$ с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Обозначим символом $T^*(V)$ алгебру ковариантных тензоров на V. Для $\alpha \in T^k(V)$ обозначим

$$(\alpha \dashv v)(v_1, \ldots, v_{k-1}) := \alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}, v),$$
$$(v \vdash \alpha)(v_1, \ldots, v_{k-1}) := \alpha(v, v_1, \ldots, v_{k-1}),$$

где $v, v_1, \ldots, v_{k-1} \in V$. Обозначим алгебру кососимметрических контравариантных тензоров на пространстве V через $\Lambda^*(V)$, а алгебру полиномов от h с коэффициентами в $\Lambda^*(V)$ — через $\Lambda^*(V)[h]$. Выберем произвольный тензор $w = w^{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(V)$. Определим отображение $\wedge_h = \wedge_{h,w} : \Lambda^*(V) \otimes \Lambda^*(V) \to \Lambda^*(V)[h]$ следующим образом:

$$\alpha \wedge_h \beta = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} w^{i_1 j_1} \ldots w^{i_n j_n} (\alpha \dashv e_{i_1} \dashv \cdots \dashv e_{i_n}) \wedge (e_{j_n} \vdash \cdots \vdash e_{j_1} \vdash \beta),$$

где $\alpha, \beta \in \Lambda^*(V)$. По линейности $\wedge_h$ продолжается до *квантового внешнего произведения*

$$\wedge_h = \wedge_{h,w} : \Lambda^*(V)[h] \otimes \Lambda^*(V)[h] \to \Lambda^*(V)[h].$$

В [8] показано, что это определение не зависит от выбора базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$, а также (теорема 1.1) что квантовое внешнее произведение суперкоммутативно и ассоциативно.

Пусть (M, w) — пуассоново многообразие ($\dim M = n$). Операция квантового внешнего произведения естественным образом распространяется на кольцо $\Omega^*(M)[h]$ полиномов от h с коэффициентами в $\Omega^*(M)$. Рассмотрим оператор

$$d_h := d - h\delta : \Omega^*(M)[h] \to \Omega^*(M)[h].$$

В ([8], теорема 2.2) показано, что он удовлетворяет соотношениям $d_h \circ d_h = 0$ и

$$d_h(\alpha \wedge_h \beta) = (d_h \alpha) \wedge_h \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge_h (d_h \beta),$$

где $\alpha, \beta \in \Omega^*(M)[h]$.

Аналогично определяется квантовое внешнее произведение $\wedge_h$ и квантовый внешний дифференциал d_h на алгебре $\Omega^*(M)[h, h^{-1}]$ многочленов от h и h^{-1} и на алгебрах $\Omega^*(M)[[h]]$ и $\Omega^*(M)[[h, h^{-1}]]$ рядов Тейлора и Лорана от h соответственно.

В [8] были определены (полиномиальные) квантовые когомологии де Рама $Q_h H_{dR}^*(M)$ и $Q_{h,h^{-1}} H_{dR}^*(M)$ пуассонова многообразия (M, w) как когомологии дифференциальных групп $(\Omega^*(M)[h], d_h)$ и $(\Omega^*(M)[h, h^{-1}], d_h)$ соответственно. По аналогии определим тейлоровские и лорановские квантовые когомологии де Рама $TQ_h H_{dR}^*(M)$ и $LQ_{h,h^{-1}} H_{dR}^*(M)$ как когомологии дифференциальных групп $(\Omega^*(M)[[h]], d_h)$ и $(\Omega^*(M)[[h, h^{-1}]], d_h)$ соответственно.

На дифференциальной группе $(\Omega^*(M)[h], d_h)$ можно ввести структуру двойного комплекса $(C^{p,q}, -h\delta, d' = (-1)^p d)$, где $C^{p,q} = h^p \Omega^{q-p}(M)$, $p \geq 0$. Аналогично на дифференциальной группе $(\Omega^*(M)[h, h^{-1}], d_h)$ можно ввести структуру двойного комплекса $(\widetilde{C}^{p,q}, -h\delta, d' = (-1)^p d)$ (см. (7)), где $\widetilde{C}^{p,q} = h^p \Omega^{q-p}(M)$, $p, q \in \mathbf{Z}$. По комплексу $C^{p,q}$ строится спектральная последовательность E, сходящаяся к $H(\Omega^*(M)[h], d_h) = Q_h H_{dR}^*(M)$, с первым членом $E_1^{p,q} = h^p H^q(C^{p,*}, d) =$

$h^pH^{q-p}_{dR}(M)$, $p\geq 0$. По комплексу $\widetilde{C}^{p,q}$ строится спектральная последовательность $\widetilde{E}$, сходящаяся к $Q_{h,h^{-1}}H^*_{dR}(M)$, с первым членом $\widetilde{E}^{p,q}_1=h^pH^{q-p}_{dR}(M)$, $p,q\in\mathbf{Z}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
 & & & & 0 & \xrightarrow{-h\delta} & h^2\Omega^n(M) & \xrightarrow{-h\delta} & \cdots \\
 & & & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
 & & 0 & \xrightarrow{-h\delta} & h\Omega^n(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h^2\Omega^{n-1}(M) & \xrightarrow{-h\delta} & \cdots \\
 & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{-h\delta} & \Omega^n(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h\Omega^{n-1}(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h^2\Omega^{n-2}(M) & \xrightarrow{-h\delta} & \cdots \\
 & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{-h\delta} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h\Omega^1(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h^2\Omega^0(M) & \xrightarrow{-h\delta} & \cdots \\
 & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{-h\delta} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{-h\delta} & h\Omega^0(M) & \xrightarrow{-h\delta} & 0 & & \\
 & & {\scriptstyle d'}\uparrow & & \uparrow & & & & \\
\cdots & \xrightarrow{-h\delta} & \Omega^0(M) & \xrightarrow{-h\delta} & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}
\tag{7}
$$

Если спектральная последовательность E вырождается в первом члене, то, как показано в ([8], теорема 3.2), квантовые когомологии де Рама получаются деформационным квантованием "обычных" когомологий де Рама. Действительно, в этом случае $Q_hH^*_{dR}(M)\cong E_\infty=\oplus_{p,q}E^{p,q}_1=\oplus_{p,q}h^pH^{q-p}_{dR}(M)=H^*_{dR}(M)[h]$.

Там же доказана

Теорема 4.1 ([8]). *Если (M,w) — компактное симплектическое многообразие без границы, то спектральная последовательность $\widetilde{E}$ вырождается в первом члене, т. е.*

$$Q_{h,h^{-1}}H^*_{dR}(M)\cong H^*_{dR}(M)[h,h^{-1}].$$

Покажем, что этот результат верен для любого (не обязательно регулярного) пуассонова многообразия.

Теорема 4.2. *Квантовые когомологии де Рама любого пуассонова многообразия (M,w) получаются деформационным квантованием его обычных когомологий де Рама, т. е.*

$$
\begin{array}{rr}
Q_hH^*_{dR}(M)\cong H^*_{dR}(M)[h], & Q_{h,h^{-1}}H^*_{dR}(M)\cong H^*_{dR}(M)[h,h^{-1}], \\
TQ_hH^*_{dR}(M)\cong H^*_{dR}(M)[[h]], & LQ_{h,h^{-1}}H^*_{dR}(M)\cong H^*_{dR}(M)[[h,h^{-1}]].
\end{array}
$$

Доказательство. Ограничимся случаем тейлоровских квантовых когомологий, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi_h:(\Omega^*(M)[[h]],d)\to(\Omega^*(M)[[h]],d_h)$ дифференциальных групп

$$\varphi_h(\alpha)=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{1}{k!}h^ki^k\alpha.$$

Тождество $\varphi_h\circ d=d_h\circ\varphi_h$ проверяется непосредственно. Проверка эпиморфности и мономорфности φ_h аналогична доказательству теоремы 3.1.

Изоморфизм φ_h индуцирует изоморфизм групп когомологий

$$TQ_hH^*_{dR}(M)\cong H(\Omega^*(M)[[h]],d)\cong H^*_{dR}(M)[[h]].\quad\square$$

Заключение. Таким образом, когомологии Брылинского и квантовые когомологии де Рама пуассонова многообразия не зависят от пуассоновой структуры на многообразии (хотя и определяются с ее помощью), а зависят лишь от топологической структуры многообразия.

Автор выражает благодарность М.А. Малахальцеву за постановку задачи, ряд ценных советов и замечаний и М.В. Лосику, чьи замечания и рекомендации способствовали существенному улучшению структуры всей работы и упрощению доказательств.

Литература

1. Brylinski J.-L. *A differential complex for Poisson manifolds* // J. Diff. Geom. – 1988. – V. 28. – P. 93–114.
2. Воробьев Ю.М., Карасев М.В. *О пуассоновых многообразиях и скобке Схоутена* // Функц. анализ и прилож. – 1988. – Т. 22. – Вып. 1. – С. 1–11.
3. Lichnerowicz A. *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées* // J. Diff. Geom. – 1977. – V. 12. – № 2. – P. 253–300.
4. Vaisman I. *Remarks on the Lichnerovicz–Poisson cohomology* // Ann. Inst. Fourier Grenoble. – 1990. – V. 40. – P. 951–963.
5. Weinstein A. *The local structure of Poisson manifolds* // J. Diff. Geom. – 1983. – V. 18. – № 3. – P. 523–557.
6. Huebschmann J. *Poisson cohomology and quantization* // J. für reine und angew. Math. – 1990. – V. 408. – P. 57–113.
7. Kontsevich M. *Deformation quantization of Poisson manifolds* // Lett. Math. Phys. – 2003. – V. 66. – P. 157–216.
8. Cao H.-D., Zhou J. *On quantum de Rham cohomology.* – Preprint math. DG/9806157. – 1998. – 36 p.
9. Koszul J.-L. *Crochet de Schouten–Nijenhuis et cohomologie* // “Elie Cartan et les Math. d’Aujour d’Hui”, Astérisque, hors-série. – 1985. – P. 257–271.
10. Michor P.W. *Remarks on the Schouten-Nijenhuis bracket* // Suppl. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II. – 1987. – V. 16. – P. 207–215.

Казанский государственный
университет

Поступила
17.12.2003