Известия вузов. Математика
2009, № 11, с. 67–71

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АВТОМОРФНОЙ ФОРМЫ ЛАКУНАРНЫМ РЯДОМ И ПРОИЗВЕДЕНИЕМ БЛЯШКЕ

Аннотация. Рассматриваются фуксовы группы сходящегося типа. Строятся автоморфные формы различного веса в виде лакунарных рядов по некоторому множеству преобразований группы, не имеющему структуры подгруппы. Построена автоморфная форма нулевого веса, являющаяся произведением Бляшке.

Ключевые слова: фуксовы группы сходящегося типа, автоморфные формы.

УДК: 517.537

Abstract. In this paper we consider the Fuchs groups of the convergent type. We construct automorphic forms of various weights in terms of lacunar series with respect to a set of group transformations that does not have the structure of a subgroup. We also construct an automorphic form of zero weight that represents the Blaschke product.

Keywords: Fuchs groups of the convergent type, automorphic forms.

Введение. Пусть Γ — конечно-порожденная неэлементарная фуксова группа, действующая на единичном круге $U : |z| < 1$ ([1], с. 76). Все ее преобразования имеют вид

$$\sigma_0(z) = z, \quad \sigma_k(z) = \frac{\alpha_k z + \overline{\gamma}_k}{\gamma_k z + \overline{\alpha}_k}; \quad |\alpha_k|^2 - |\gamma_k|^2 = 1, \quad \gamma_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда θ-ряд Пуанкаре ([2], с. 63)

$$\theta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k z + \overline{\alpha}_k)^{-2m} H[\sigma_k(z)], \quad m \geq 2, \tag{1}$$

где $H(z)$ — рациональная функция от z, аналитическая во всех предельных точках группы, сходится на любом компакте из фундаментальной области D, не содержащем параболических точек, на котором функция $H(z)$ аналитична. Удовлетворяя при любом j условию

$$\theta[\sigma_j(z)] = (\gamma_j z + \overline{\alpha}_j)^{2m} \theta(z), \tag{2}$$

ряд (1) будет автоморфной формой (а. ф.) веса $(-2m)$.

Поступили: полный текст 31.03.2008, краткое сообщение 11.05.2009

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 09-01-97008-р_Поволжье_а.

Заметим, что для построения ряда (1) необходимо знать все преобразования группы, т. е. считаем формально известными коэффициенты любого преобразования группы. За исключением нескольких простейших случаев, нет общих выражений преобразований группы через коэффициенты ее порождающих преобразований. Поэтому возникает задача о построении а. ф. в виде лакунарного ряда (произведения), содержащего не все преобразования группы, а только некоторое их подмножество. При этом данное подмножество не является подгруппой.

Впервые а. ф. в виде лакунарного ряда была построена в работе [3]. Рассматривались такие фуксовы группы, у которых каждая вершина фундаментального многоугольника является общей для четного или бесконечного числа фундаментальных многоугольников, сходящихся в этой точке. Преобразования группы вполне определенным образом делились на два непересекающихся множества I и II, причем $\sigma_0 \in \mathrm{II}$. Установлено, что ряд

$$f_{2m}(z) = \sum_{\sigma_k \in I} \left[\frac{\sigma_k'(z)}{(\sigma_k(z) - z)^2} \right]^m$$

является а. ф. веса $(-4m)$. Вводились такие ограничения на степень m и преобразования группы, при выполнении которых эта а. ф. нетривиальна [4].

В статье [5] был предложен другой подход к построению а. ф., позволяющий обойтись меньшим числом преобразований, чем множество I. Он также позволил снять ограничения на вершины фундаментального многоугольника. Этот прием использует понятие орбиты фиксированного преобразования группы $\sigma_p (p \neq 0)$.

Введем множество преобразований вида $\tau_k = \sigma_k \sigma_p \sigma_k^{-1}$, где σ_k пробегает все преобразования Г. Поскольку различным преобразованиям σ_k может соответствовать одно и то же преобразование τ_k, то будем считать его без учета кратности. Множество таких преобразований τ_k назовем орбитой $A(\sigma_p)$. Тогда функция

$$F_m(z) = \sum_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \left[\frac{\tau_k'(z)}{(\tau_k(z) - z)^2} \right]^{m/2} = \sum_{\tau_k \in A(\sigma_p)} [c_k z^2 + (\overline{a}_k - a_k)z - \overline{c}_k]^{-m} \tag{3}$$

является а. ф. веса $(-2m)$. Здесь

$$\tau_k(z) = (a_k z + \overline{c}_k)(c_k z + \overline{a}_k)^{-1}, \quad |a_k|^2 - |c_k|^2 = 1,$$

причем для фиксации

$$\sqrt{(c_k z^2 + (\overline{a}_k - a_k)z - \overline{c}_k)^2} = \sqrt{a_k^2} \left(\frac{c_k}{a_k} z^2 + \left(\frac{\overline{a}_k}{a_k} - 1 \right) z - \frac{\overline{c}_k}{a_k} \right)$$

считаем $-\pi < \arg a_k^2 \leq \pi$. При этом в случае $-\frac{\pi}{2} < \arg(-a_k) \leq \frac{\pi}{2}$ преобразование $\frac{a_k z + \overline{c}_k}{c_k z + \overline{a}_k}$ записываем в форме $\frac{-a_k z - \overline{c}_k}{-c_k z - \overline{a}_k}$. Если $m \geq 4$, то функция (3) мероморфна на любом компакте, не содержащем предельных точек группы. Поскольку квадратные матрицы второго порядка τ_k и σ_p подобны, то они имеют и одинаковый след $\operatorname{tr} \tau_k = 2 \operatorname{Re} a_p$. В θ-ряде Пуанкаре (1) каждое слагаемое зависит от трех вещественных параметров. Между тем, каждое слагаемое лакунарного ряда (3) зависит только от двух вещественных параметров.

Основная цель данной статьи — изучение свойств а. ф. (3) в случае фуксовых групп второго рода (сходящегося типа) ([1], с. 115), т. е. групп, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^{-2} < \infty. \tag{4}$$

Для таких групп в формулах (1) и (2) можно взять $m \geq 1$, а в формуле (3) взять $m \geq 2$. Исследование свойств а. ф. (3) для таких групп было начато в статье [5].

В п. 1 данной работы изучается вопрос о нетривиальности а. ф. (3), а также тесно связанная с ним проблема линейной зависимости различных а. ф. (3) одного веса. В п. 2 строится лакунарное бесконечное произведение, порождаемое одним частным случаем а. ф. (3). Оно в некотором смысле аналогично сигма-функции Вейерштрасса ([6], с. 35) и отличается от произведения Бляшке в круге U на постоянный множитель.

1. Напомним, что преобразование σ_p при $|\operatorname{Re}\alpha_p| > 1$ является гиперболическим, при $|\operatorname{Re}\alpha_p| = 1$ — параболическим, при $|\operatorname{Re}\alpha_p| < 1$ — эллиптическим. Естественно назвать а. ф. (3) гиперболической, эллиптической или параболической в зависимости от типа преобразования σ_p. Это тем более оправдано, поскольку все преобразования орбиты имеют не только одинаковый тип, но даже и одинаковый след. Удобно записать а. ф. (3), используя неподвижные точки преобразований орбиты. Обозначим их через z_k и z_k^* для преобразований с двумя неподвижными точками и через w_k для преобразований параболического типа. В первом случае а. ф. (3) с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$F_m(z) = \sum_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \left[(z - z_k)^{-1} - (z - z_k^*)^{-1}\right]^m, \tag{5}$$

где $z_k = \sigma_k(z_p)$, $z_k^* = \sigma_k(z_p^*)$, а z_p и z_p^* — неподвижные точки преобразования σ_p ([5], § 2). Здесь с учетом фиксации одной и той же ветви корня

$$z_k = c_k^{-1}\left[i \operatorname{Im} a_k - \sqrt{\operatorname{Re}^2 a_p - 1}\right], \quad z_k^* = c_k^{-1}\left[i \operatorname{Im} a_k + \sqrt{\operatorname{Re}^2 a_p - 1}\right]. \tag{6}$$

Для гиперболической а. ф. точки (6) являются особыми точками главной окружности. Для эллиптической а. ф. это полюсы порядка m, не лежащие на главной окружности и симметричные относительно нее, а в формуле (5) можно положить $m = 1$ ([5], § 2, свойство 2.2). Параболическая а. ф. имеет вид

$$F_m(z) = \sum_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \left[c_k(z - w_k)^2\right]^{-m}, w_k = ic_k^{-1}, \quad \operatorname{Im} a_k \in \partial U, \tag{7}$$

причем она нетривиальна ([5], теорема 1).

Теорема 1. *Пусть $F_m(z)$ — эллиптические (параболические) а. ф., определенные формулой (5) (формулой (7)). При $n \neq j$ а. ф. F_{2n}^j и F_{2j}^n линейно независимы.*

Приведем схему доказательства. Предположим противное. Тогда $\mu F_{2n}^j = \beta F_{2j}^n \Rightarrow \mu = \beta \neq 0$. В эллиптическом случае это следует из сравнения главных частей разложения в ряд Лорана обеих частей данного равенства в окрестности точки (6). В параболическом случае это справедливо в силу формулы

$$\lim_{z \to w_p,\, z \in D} [F_m(z)(z - w_p)^{2m}] = \gamma_p^{-m},$$

([5], замечание 4), $\sigma_p(w_p) = w_p$. Так как $\partial U \cap D \neq \emptyset$, то $\exists t_0 = \exp(i\varphi_0) : t_0 \in D$. Тогда (3)$\Rightarrow$ $F_m(t_0) = 2^{-m} \exp\left[\operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)\right] \sum\limits_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \left[\operatorname{Im}(c_k e^{i\varphi_0} - a_k)\right]^{-m}$. Здесь при четном m получается ряд с положительными членами, но для таких рядов $\left(\sum\limits_k h_k^j\right)^n < \left(\sum\limits_k h_k^n\right)^j$ при $n < j$, т. е. $\mu \neq \beta$. Пришли к противоречию.

Следствие. Пусть группа Γ содержит преобразование эллиптического (параболического) типа. Тогда можно построить простую автоморфную функцию, используя лишь преобразования данного типа.

Действительно, в качестве такой функции возьмем $F = F_{2n}^{-j} F_{2j}^{n}$, которая положительна при $t \in \partial U \cap D$. Если $n < j$, то имеем $0 < F(t) < 1$. При этом в точках (6) в первом случае (в точках w_k во втором случае) она равна единице. Во втором случае под значением функции F в точке w_k понимаем $\lim\limits_{z \to w_k,\, z \in D} F(z)$.

2. Возьмем эллиптическую а. ф.

$$F_1(z) = \sum_{\tau_k \in A(\sigma_p)} [(z - z_k)^{-1} - (z - z_k^*)^{-1}], \tag{8}$$

удовлетворяющую условию

$$\sigma_j'(z) F_1[\sigma_j(z)] = F_1(z) \tag{9}$$

для всех преобразований $\sigma_j(z)$ исходной группы. Ряд (8) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте Q, не содержащем предельных точек группы, если из него выбросить не более чем конечное число слагаемых, имеющих там полюсы ([5], § 2, свойство 2.2). Рассмотрим функцию

$$G(z) = \mu \prod_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \frac{z - z_k}{z - z_k^*}, \tag{10}$$

логарифмическая производная которой совпадает с функцией (8) при любом значении постоянной μ.

Теорема 2. *Функция* (10) *голоморфна во всех обыкновенных точках группы за исключением простых полюсов* z_k^*. *Она имеет только простые нули в точках* z_k.

Доказательство непосредственно вытекает из абсолютной и равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \frac{z_k - z_k^*}{z - z_k^*}$ на компакте Q, если только исключить из него не более чем конечное число слагаемых, у которых там полюсы. Действительно, (6) $\Rightarrow |z_k - z_k^*| = 2\sqrt{1 - \mathrm{Re}^2\, a_p}\; |c_k|^{-1}$. Здесь и всюду в дальнейшем подразумеваем арифметическое значение этого корня. Но $|c_k|^{-1} < A|\gamma_k|^{-2}$, где A — некоторая постоянная ([5], § 2, свойство 2.2.), и с учетом (4) это завершает доказательство.

Предположим теперь, для определенности, в формуле (5) $|z_p| < 1 \Rightarrow \forall k \;\; |z_k| < 1, |z_k^*| > 1$. Постоянный множитель в формуле (10) удобно положить

$$\mu = \prod_{\tau_k \in A(\sigma_p)} |z_k^*|,$$

т. е. $\mu \in (1, \infty)$. Изучим свойства функции (10).

1. $G(0) = \mu^{-1}$, $G(\infty) = \mu$.

2. $\overline{G(z)} G(1/\overline{z}) = 1$. Свойство 2 проверяется непосредственно с учетом симметрии точек (6) относительно главной окружности.

3. $G[\sigma(z)] = B(\sigma) G(z) \quad \forall \sigma \in \Gamma$, где $B(\sigma)$ — некоторая постоянная, зависящая от выбора преобразования σ. Другими словами, функция (10) — а. ф. нулевого порядка с системой множителей $B(\sigma)$ ([6], гл. 14, п. 14.8.3.), где B — мультипликативная функция на группе Γ, т. е. $B(\sigma_l \sigma_j) = B(\sigma_l) B(\sigma_j)$. Действительно, первообразная $\widetilde{F}$ функции со свойством (9) удовлетворяет условию $\widetilde{F}[\sigma(z)] - \widetilde{F}(z) = h_\sigma$, где h_σ — постоянная, зависящая от выбора преобразования $\sigma \in \Gamma$.

4. $|B(\sigma_j)| = 1 \quad \forall \sigma_j \in \Gamma$. Для доказательства положим $z = 0$ в свойстве (3). Тогда $G(\alpha_j \gamma_j^{-1}) = \mu^{-1} B(\sigma_j)$. При $z = \infty$ имеем $\overline{G}(\alpha_j^{-1} \gamma_j) = \mu \overline{B(\sigma_j)}$. Перемножив эти равенства и использовав свойство 2, получим искомое.

5. Пусть эллиптическое преобразование σ_p имеет множитель K ([1], § 8) $\Rightarrow B(\sigma_p) = K$. Если же существует эллиптическое преобразование $\sigma_q : \sigma_q \in \Gamma$, $\sigma_q \notin A(\sigma_p)$, то $B(\sigma_q) = 1$. Для этого достаточно сосчитать пределы $\lim[G(\sigma_j(z))/G(z)]$ при $z \to z_j$, $j = p, q$, и применить в первом случае правило Лопиталя.

6. Справедливо представление

$$G(z) = \prod_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \frac{(-\overline{z_k})}{|z_k|} \frac{(z - z_k)}{(1 - \overline{z_k} z)},$$

т. е. функция (10) действительно является произведением Бляшке в U. Следовательно, это функция класса Харди $H^\infty(U)$, причем $|G(z)| \leq 1$, $z \in U$. Кроме того, $|G(\exp(i\theta))| = 1$ почти всюду на ∂U ([7], с. 60–63).

В заключение укажем на связь функции (10) и построенного в ([1], § 50) бесконечного произведения

$$g(z) = \prod \frac{z - u_n}{z - v_n},$$

применяемого при униформизации ([1], § 99). Здесь $u_n = \sigma_n(u)$, $v_n = \sigma_n(v)$, u и v — обыкновенные точки фуксовой группы второго рода Γ, причем это произведение берется по всем преобразованиям группы, включая и тождественное. Положим $u = z_p$, $v = z_p^*$. Если эллиптическое преобразование σ_p имеет период q ($\sigma_p^q = \sigma_0$), то при таком выборе u и v имеем $G^q(z) = \mu^q g(z)$, $q > 1$.

Литература

[1] Форд Л.Р. *Автоморфные функции.* – М.–Л.: ОНТИ, 1936. – 340 с.
[2] Пуанкаре А. *Избранные труды.* Т. III. – М.: Наука, 1974. – 773 с.
[3] Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *О лакунарных аналогах тэта-ряда Пуанкаре и их приложении* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 5. – С. 977–986.
[4] Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *Эффективное решение задачи Карлемана для некоторых групп расходящегося типа* // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46. – № 4. – С. 723–732.
[5] Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *Построение автоморфной формы по орбите преобразования* // Сиб. матем. журн. – 2007. – Т. 48. – № 5. – С. 963–972.
[6] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. III. – М.: Наука, 1967. – 300 с.
[7] Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* – М.: Мир, 1984. – 470 с.

Ф.Н. Гарифьянов

профессор, кафедра высшей математики,
Казанский государственный энергетический университет,
420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51,

e-mail: f.garifyanov@mail.ru

F.N. Garif'yanov

Professor, Chair of Higher Mathematics,
Kazan State Energy University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,

e-mail: f.garifyanov@mail.ru