ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

УДК 517.98

Е.А. ТУРИЛОВА

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПОДПРОСТРАНСТВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА, В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $\mathcal{B}(H)$, АССОЦИИРОВАННОГО С ВЕСОМ

Данная работа продолжает исследование классов ортозамкнутых и расщепляющих подпространств унитарных пространств, присоединенных к алгебре фон Неймана, начатое в [1] и [2].

1. Определения

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, линеал S плотен в H и присоединен к $\mathcal{M}$ ($S\eta\mathcal{M}$), т.е. S инвариантен относительно любого оператора из $\mathcal{M}'$ — коммутанта алгебры $\mathcal{M}$. Будем рассматривать следующие классы подпространств пространства S: $L_{\mathcal{M}}(S)$ — класс всех замкнутых подпространств пространства S, присоединенных к $\mathcal{M}$; $F_{\mathcal{M}}(S)$ — класс всех ортозамкнутых подпространств пространства S, присоединенных к $\mathcal{M}$, т.е. $F_{\mathcal{M}}(S) = \{X \subseteq S \mid X = X^{\perp\perp}, X\eta\mathcal{M}\}$; $E_{\mathcal{M}}(S)$ — класс всех расщепляющих подпространств пространства S, присоединенных к $\mathcal{M}$, т.е. $E_{\mathcal{M}}(S) = \{X \subseteq S \mid X \oplus X^{\perp} = S, X\eta\mathcal{M}\}$. Отметим, что имеет место цепочка включений

$$E_{\mathcal{M}}(S) \subseteq F_{\mathcal{M}}(S) \subseteq L_{\mathcal{M}}(S). \tag{1}$$

В дальнейшем через $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ будем обозначать класс всех ортопроекторов алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, а для $X \subseteq S$ символом $\overline{X}$ будем обозначать замыкание множества X в S, а символом $[X]$ — замыкание этого множества в H. Приведем описание указанных выше классов в терминах ортопроекторов.

Предложение 1 ([1]). (i) $L_{\mathcal{M}}(S) = \{\mathcal{R}(p) \cap S \mid p \in M^{\mathrm{pr}}\}$.
(ii) $F_{\mathcal{M}}(S) = \{\mathcal{R}(p) \cap S \mid p \in M^{\mathrm{pr}}, [\mathcal{R}(p) \cap S] = \mathcal{R}(p),\ [\mathcal{R}(1-p) \cap S] = \mathcal{R}(1-p)\}$.
(iii) $E_{\mathcal{M}}(S) = \{\mathcal{R}(p) \cap S \mid p \in M^{\mathrm{pr}},\ \mathcal{R}(p) \cap S = pS\}$.

2. Пространство представления алгебры фон Неймана, ассоциированное с весом

Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ гильбертово пространство, являющееся пополнением $n_\varphi = \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < +\infty\}$ по скалярному произведению $\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle \equiv \varphi(y^*x)$ $(x, y \in n_\varphi)$. (Здесь $\widetilde{x}$ — образ x при тождественном вложении n_φ в $\mathfrak{H}$.) Тогда отображение $\pi_\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, определенное равенством $\pi_\varphi(x)\widetilde{y} \equiv \widetilde{xy}$ $(x \in \mathcal{M},\ y \in n_\varphi)$, задает $*$-представление алгебры $\mathcal{M}$ в алгебру $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

Пусть $\mathfrak{M} = \pi_\varphi(\mathcal{M})$ — образ $\mathcal{M}$ при каноническом представлении, ассоциированном с φ. Тогда π_φ является изоморфизмом алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ на алгебру фон Неймана $\mathfrak{M}$. Пусть, кроме того, φ_π — вес, полученный переносом веса φ на алгебру $\pi_\varphi(\mathcal{M})$: $\varphi_\pi(\pi_\varphi(x)) \equiv \varphi(x)$ $(x \in \mathcal{M}^+)$. Через D_{φ_π} обозначим линеал веса φ_π [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00799).

В соответствии с общей теорией гильбертовых алгебр с алгеброй фон Неймана $\mathcal{M}$ связана левая гильбертова алгебра [4], [5] $\mathfrak{A} = \{\widetilde{x} \mid x \in n_\varphi \cap n_\varphi^*\}$. Рассмотрим

$$\mathfrak{A}_0' = \{f \in \mathfrak{H} \mid \text{ отображение } \widetilde{x} \to \pi_\varphi(x)f \ (x \in n_\varphi) \text{ непрерывно}\}$$

— множество ограниченных справа элементов относительно левой гильбертовой алгебры $\mathfrak{A}$. Известно, что $\mathfrak{A}_0' = \mathcal{D}_{\varphi_\pi}$. Линеал $\mathcal{D}_{\varphi_\pi}$ присоединен к $\mathfrak{M}$ и плотен в $\mathfrak{H}$. Положим $S \equiv \mathcal{D}_{\varphi_\pi}$.

Отметим, что в соответствии с теорией Томиты–Такесаки определена антилинейная изометрия j в $\mathfrak{H}$ такая, что $j\mathfrak{M}j = \mathfrak{M}'$ — коммутант алгебры $\mathfrak{M}$.

Итак, рассмотрим следующую ситуацию: в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ действует алгебра фон Неймана $\mathfrak{M}$. Пусть $S \equiv \mathcal{D}_{\varphi_\pi}$ — плотный в $\mathfrak{H}$ линеал, присоединенный к $\mathfrak{M}$. Совпадают ли классы замкнутых, ортозамкнутых и расщепляющих подпространств S, присоединенных к $\mathfrak{M}$?

Теорема 1. *Если в рамках описанной конструкции φ — след, то $E_{\mathfrak{M}}(S) = F_{\mathfrak{M}}(S) = L_{\mathfrak{M}}(S)$.*

Доказательство. Отметим для начала, что любой ортопроектор из $\mathfrak{M}$ представим в виде $\pi_\varphi(p)$, где $p \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. Поскольку φ — след, множество n_φ является двусторонним идеалом. Покажем, что $\pi_\varphi(p)S \subseteq S$ для любого $p \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. Пусть $f \in S$, т. е. отображение $\widetilde{x} \to \pi_\varphi(x)f$ непрерывно ($x \in n_\varphi$). В частности, непрерывно отображение $\widetilde{xp} \to \pi_\varphi(xp)f$ (т. к. n_φ — двусторонний идеал). Поскольку

$$\|\widetilde{xp}\|^2 = \langle\widetilde{xp}, \widetilde{xp}\rangle = \varphi(px^*xp) = \ (\varphi \text{ — след}) \ = \varphi(xpx^*) \leq \varphi(xx^*) = \|\widetilde{x}\|^2,$$

то отображение $\widetilde{x} \to \widetilde{xp}$ непрерывно, $\widetilde{xp} \to \pi_\varphi(xp)f$ непрерывно, следовательно, непрерывно отображение $\widetilde{x} \to \pi_\varphi(x)\pi_\varphi(p)f (= \pi_\varphi(xp)f)$.

Таким образом, $\pi_\varphi(p)f \in S$ для $f \in S$. Отсюда следует, что любое подпространство S, присоединенное к $\mathfrak{M}$, является расщепляющим. В силу включения (1) это означает, что $E_{\mathfrak{M}}(S) = F_{\mathfrak{M}}(S) = L_{\mathfrak{M}}(S)$. $\square$

Замечание 1. Если в качестве алгебры фон Неймана рассмотреть алгебру всех ограниченных операторов $\mathcal{B}(H)$, а в качестве следа — стандартный след на $\mathcal{B}(H) - \tau_0$, то $n_{\tau_0} = \{x \in \mathcal{B}(H) \mid \tau_0(x^*x) < +\infty\}$ совпадает с множеством операторов Гильберта–Шмидта, действующих в H. Как известно, множество операторов Гильберта–Шмидта, снабженное скалярным произведением $\langle\widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle \equiv \tau_0(y^*x)$ $(x, y \in n_{\tau_0})$, является гильбертовым пространством, т. е. в рамках рассматриваемой конструкции унитарное пространство S полно, следовательно, $E_{\mathfrak{M}}(S) = F_{\mathfrak{M}}(S) = L_{\mathfrak{M}}(S)$.

3. Алгебра $\mathcal{B}(H)$ в пространстве представления, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом

Рассмотрим подробнее изложенную выше конструкцию применительно к алгебре $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть далее $k \geq 0$ — самосопряженный оператор, присоединенный к $\mathcal{B}(H)$, определенный равенством

$$\varphi(x) = \tau_0(kx). \tag{2}$$

Здесь τ_0 — стандартный след на $\mathcal{B}(H)$.

Положим $n_\varphi = \{x \in \mathcal{B}(H) \mid \varphi(x^*x) < +\infty\} = \{x \in \mathcal{B}(H) \mid \tau_0(kx^*x) < +\infty\}$.

Лемма 1 ([6]). *Пусть $\{h_i\}$ — неубывающая сеть положительных ограниченных операторов в H. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *существует самосопряженный положительный оператор h, действующий в H, такой, что $h_i \nearrow h$;*

(ii) *множество $\mathcal{D} = \{\xi \in H \mid \lim\limits_i \langle h_i\xi|\xi\rangle < +\infty\}$ плотно в H. Оператор h единственен и $\mathcal{D} = \mathcal{D}(h^{1/2})$.*

Предложение 2. *Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре $\mathcal{B}(H)$ и k — неотрицательный самосопряженный оператор, определенный равенством (2). Оператор x принадлежит n_φ тогда и только тогда, когда $k^{1/2}x^* \in \mathfrak{C}_2(H)$. (Здесь $\mathfrak{C}_2(H)$ — множество операторов Гильберта–Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H.)*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in n_\varphi$. Покажем сначала, что $\mathcal{D}(k^{1/2}x^*) = H$. Пусть $f \in H$ произволен. Имеем $\langle k_\varepsilon x^* f, x^* f\rangle = \langle x k_\varepsilon x^* f, f\rangle \le \|f\|^2 \tau_0(x k_\varepsilon x^*)$. Тогда $\sup_\varepsilon \langle k_\varepsilon x^* f, x^* f\rangle \le \|f\|^2 \sup_\varepsilon \tau_0(k_\varepsilon x^* x) = \|f\|^2 \varphi(x^* x) < +\infty$. В силу леммы 1 $x^* f \in \mathcal{D}(k^{1/2})$, а значит, $f \in \mathcal{D}(k^{1/2}x^*)$. Итак, $\mathcal{D}(k^{1/2}x^*) = H$. Так как $k^{1/2}$ замкнут, то $k^{1/2}x^*$ также замкнут. Но замкнутый оператор, заданный на всем гильбертовом пространстве, ограничен.

Пусть (e_i) — ортонормированный базис в H. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle k^{1/2}x^* e_i, k^{1/2} x e_i\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{i=1}^{n} \|k_\varepsilon^{1/2} x^* e_i\|^2 \le \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{i=1}^{+\infty} \|k_\varepsilon^{1/2} x^* e_i\|^2 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \tau_0(x k_\varepsilon x^*) = \varphi(x^* x) < +\infty.$$

Из произвольности n следует, что $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \|k^{1/2}x^* e_i\|^2 < +\infty$, а значит, $k^{1/2}x^*$ — оператор Гильберта–Шмидта.

Достаточность. Пусть $k^{1/2}x^*$ – оператор Гильберта–Шмидта. Поскольку

$$\tau_0(k x^* x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \tau_0(k_\varepsilon x^* x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \tau_0(x k_\varepsilon x^*) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{i=1}^{+\infty} \|k_\varepsilon^{1/2} x^* e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \|k^{1/2} x^* e_i\|^2 < +\infty,$$

то $\varphi(x^* x) = \tau_0(k x^* x) < +\infty$, т. е. $x \in n_\varphi$. $\square$

Теорема 2. *Отображение $x \to \overline{xk^{1/2}}$ ($x \in n_\varphi$) определяет изометрический изоморфизм между гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$ и гильбертовым пространством $\mathfrak{C}_2$ операторов Гильберта–Шмидта в исходном пространстве H.*

Доказательство. Поскольку $\overline{xk^{1/2}} = (k^{1/2}x^*)^*$, из предложения 2 следует, что $\overline{xk^{1/2}} \in \mathfrak{C}_2$. В силу определения скалярного произведения в пространствах $\mathfrak{C}_2$ и $\mathfrak{H}$ и полноты этих пространств достаточно показать, что множество $\mathfrak{N} = \{\overline{xk^{1/2}} \mid x \in n_\varphi\}$ плотно в $\mathfrak{C}_2$. Поскольку любой оператор Гильберта–Шмидта представим в виде $z = \sum\limits_j \lambda_j \langle \cdot, \xi_j\rangle \xi_j$, где (ξ_j) — подходящая ортонормированная система в H, а $\sum\limits_j \lambda_j^2 < +\infty$, то к этому оператору можно приблизиться по норме Гильберта–Шмидта операторами вида $z_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \cdot, \xi_j\rangle \xi_j$. Таким образом, достаточно показать, что оператор вида $\langle \cdot, \xi\rangle \xi$ ($\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$) аппроксимируется по норме пространства $\mathfrak{C}_2$ операторами из $\mathfrak{N}$.

Поскольку $\mathcal{R}(k^{1/2})$ плотно в H, то существует последовательность $(\eta_n) \subset D(k^{1/2})$ такая, что $k^{1/2}\eta_n \to \xi$ ($n \to +\infty$).

Положим $x_n^* = \langle \cdot, \xi\rangle \eta_n$. Тогда $\|\overline{x_n k^{1/2}} - \langle \cdot, \xi\rangle \xi\|_2^2 = \|k^{1/2}x_n^* - \langle \cdot, \xi\rangle \xi\|_2^2 = \|\langle \cdot, \xi\rangle (k^{1/2}\eta_n - \xi)\|_2^2 = \|k^{1/2}\eta_n - \xi\|^2 \to 0$. $\square$

Лемма 2. *Пусть h, k — самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H, причем $0 \le h \le k$ и $h \in \mathcal{B}(H)$. Тогда существует $x \in \mathcal{B}(H)$ такой, что $h^{1/2} = \overline{xk^{1/2}}$.*

Доказательство. Заметим, что для самосопряженных операторов h и k неравенство $h \le k$ означает по определению

(i) $D(k^{1/2}) \subseteq D(h^{1/2})$,

(ii) $\|h^{1/2} f\|^2 \le \|k^{1/2} f\|^2$ ($f \in D(k^{1/2})$).

В контексте условий леммы $D(h^{1/2}) = H$. Рассмотрим оператор x, определенный следующим образом:

$$\begin{aligned} xk^{1/2}f &= h^{1/2}, \quad &\text{если } f \in D(k^{1/2}); \\ xf &= \theta, \quad &\text{если } f \in \operatorname{Ker} k. \end{aligned}$$

Оператор x корректно определен и ограничен. Действительно, x плотно задан и определен однозначно на плотном в H линеале $\mathcal{R}(k^{1/2}) \oplus \operatorname{Ker} k$. При этом для элемента $k^{1/2}f + g$ такого, что $\|k^{1/2}f + g\| = 1$ (здесь $f \in D(k^{1/2})$, $g \in \operatorname{Ker} k$),

$$\|x(k^{1/2}f + g)\|^2 = \|h^{1/2}f\|^2 \leq \|k^{1/2}f\|^2 \leq \|k^{1/2}f\|^2 + \|g\|^2 = \|k^{1/2}f + g\|^2.$$

В этом случае x продолжается по непрерывности до ограниченного всюду на H определенного оператора, который будем обозначать той же буквой x. При этом $xk^{1/2}|_{D(k^{1/2})} = h^{1/2}|_{D(k^{1/2})}$, так что $h^{1/2} = \overline{xk^{1/2}}$.

Теорема 3. $D_{\varphi_\pi} = \widetilde{n_\varphi}^*$.

Доказательство. Пусть $a \in \widetilde{n_\varphi}^*$, $a = k^{1/2}y^*$. Если $x \geq 0$, $x \notin m_\varphi^+$, то $\langle \pi_\varphi(x)a, a\rangle = \langle \pi_\varphi(x)k^{1/2}y^*, k^{1/2}y^*\rangle < +\infty = \varphi(x) = \varphi_\pi(\pi_\varphi(x))$. Если $x \in m_\varphi^+$, то $x^{1/2} \in n_\varphi$ и

$$\begin{aligned} \langle \pi_\varphi(x)a, a\rangle = \langle xk^{1/2}y^*, k^{1/2}y^*\rangle = \tau_0(yk^{1/2}xk^{1/2}y^*) = \\ = \tau_0(k^{1/2}xk^{1/2}y^*y) = \tau_0((k^{1/2}x^{1/2})^*y^*yk^{1/2}x^{1/2}) \leq \\ \leq \|y\|^2\tau_0((k^{1/2}x^{1/2})^*k^{1/2}x^{1/2}) = \|y\|^2\varphi(x) = \|y\|^2\varphi_\pi(\pi_\varphi(x)). \end{aligned}$$

Таким образом, $\widetilde{n_\varphi}^* \subseteq D_{\varphi_\pi}$.

Докажем обратное включение. Пусть $a \in D_{\varphi_\pi}$. Тогда существует $\lambda > 0$ такое, что

$$\langle \pi_\varphi(x)a, a\rangle \leq \lambda\varphi_\pi(\pi_\varphi(x)) = \lambda\varphi(x) \quad (x \in \mathcal{B}(H)^+). \tag{3}$$

Будем брать в качестве x одномерные ортопроекторы вида $p_g = \langle \cdot, g\rangle g$ ($g \in D(k^{1/2})$, $\|g\| = 1$). Тогда $\langle \pi_\varphi(x)a, a\rangle = \tau_0(a^*p_g a) = \|a^*g\|^2$ ($g \in D(k^{1/2})$). С другой стороны,

$$\varphi(p_g) = \tau_0(kp_g) = \|k^{1/2}g\|^2\tau_0\left(\left\langle \cdot, \frac{k^{1/2}g}{\|k^{1/2}g\|}\right\rangle \frac{k^{1/2}g}{\|k^{1/2}g\|}\right) \leq \|k^{1/2}g\|^2 \quad (g \in D(k^{1/2})).$$

Тогда из (3) следует, что $\|a^*g\|^2 \leq \lambda\|k^{1/2}g\|^2$ ($g \in D(k^{1/2})$), т. е. (в смысле порядка в классе всех неотрицательных самосопряженных операторов) $aa^* \leq \lambda k$, или $|a^*|^2 \leq \lambda k$. Из леммы 2 следует, что найдется ограниченный оператор $x \in \mathcal{B}(H)$ такой, что $|a^*| = \lambda^{1/2}\overline{xk^{1/2}}$ $(= (\lambda^{1/2}k^{1/2}x^*)^*)$. Если $a^* = v|a^*|$ — полярное разложение, то $a = \lambda^{1/2}k^{1/2}x^*v^* \in \widetilde{n_\varphi}^*$. Таким образом, любой элемент $y \in S$ представим в виде $y = k^{1/2}x^*$, где $x \in n_\varphi$.

Предложение 3. *Любой линеал X в S, присоединенный к $\mathfrak{M}$, имеет вид*

$$X = \{k^{1/2}x^* \mid x \in i_\varphi\}, \tag{4}$$

где i_φ — левый идеал в $\mathcal{B}(H)$.

Доказательство. В силу теоремы 3 X представим в виде (4), где i_φ — некоторый линеал в $\mathcal{B}(H)$. Таким образом, необходимо показать, что i_φ — левый идеал, т. е. достаточно проверить, что $zx \in i_\varphi$, если только $x \in i_\varphi$, $z \in \mathcal{B}(H)$. Другими словами, требуется показать, что если $k^{1/2}x^* \in X$ и $z \in \mathcal{B}(H)$, то $k^{1/2}(zx)^* = k^{1/2}x^*z^* \in X$.

Пусть $z \in \mathcal{B}(H)$. Рассмотрим $z' = j\pi_\varphi(z)j \in \mathfrak{M}'$. Так как линеал X присоединен к $\mathfrak{M}$, то $z'X \subseteq X$. Тогда для любого $x \in i_\varphi$

$$j\pi_\varphi(z)jk^{1/2}x^* = j\pi_\varphi(z)\overline{xk^{1/2}} = jz\overline{xk^{1/2}} = (z\overline{xk^{1/2}})^* = k^{1/2}x^*z^* \in X. \quad \square$$

Очевидно

Следствие 1. Если X — линеал в S такой, что X присоединен к $\mathfrak{M}$, то множество $J^* = \{x^* \in \mathcal{B}(H) \mid k^{1/2}x^* \in X\}$ является правым идеалом в $\mathcal{B}(H)$.

Лемма 3. *Пусть J' — правый идеал в $\mathcal{B}(H)$. Тогда $\bigcup\limits_{x \in J'} \mathcal{R}(x)$ — линеал в H.*

Доказательство. Пусть $g = xf_1 + yf_2$, $x, y \in J'$, $f_1, f_2 \in H$. Если f_1 и f_2 линейно зависимы, то утверждение леммы очевидно.

Предположим, что f_1 и f_2 линейно независимы. В пространстве, "натянутом" на f_1 и f_2, выберем f_1' и f_2' такими, что $f_1' \perp f_1$, $f_2' \perp f_2$. Пусть

$$z = \frac{1}{\langle f_1, f_2' \rangle} x \langle \cdot, f_2' \rangle f_1 + \frac{1}{\langle f_2, f_1' \rangle} y \langle \cdot, f_1' \rangle f_2.$$

Поскольку J' — правый идеал, $z \in J'$. Кроме того, $z(f_1 + f_2) = xf_1 + 0 + 0 + yf_2 = g$. Следовательно, $g \in \mathcal{R}(z)$. $\square$

Для линеала $X \subset S$, присоединенного к алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}$, положим $\Delta(X) = \bigcup\limits_{x^* \in J^*} \mathcal{R}(x^*)$.

Предложение 4. *Пусть X — линеал в S, X присоединен к $\mathfrak{M}$. Тогда*

$$X^{(1)} = \{\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta \mid \xi \in H, \ \eta \in \Delta(X)\}$$

— класс одномерных операторов из X.

Доказательство. Покажем сначала, что любой одномерный оператор из X принадлежит классу $X^{(1)}$. Пусть z — произвольный одномерный оператор из X. Тогда $z = \langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta \in X$ ($\xi, \eta \in H$, $\|\xi\| = 1$). Так как $z = k^{1/2}(\langle \cdot, \xi \rangle \eta) \Rightarrow \langle \cdot, \xi \rangle \eta \in J^* \Rightarrow rg\,(\langle \cdot, \xi \rangle \eta) \in \Delta(X)$, то $\langle \xi, \xi \rangle \eta = \eta \in \Delta(X)$.

Теперь покажем, что любой элемент класса $X^{(1)}$ представляет собой одномерный оператор из X. Пусть $\eta \in \Delta(X)$, т.е. $\eta = x^* f$, $x^* \in J^*$. Тогда $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta = k^{1/2} y^*$, где $y^* = x^* \langle \cdot, \xi \rangle f \in J^*$. Таким образом, $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta$ — одномерный оператор из X. $\square$

Предложение 5. *Если X — линеал в S, X присоединен к $\mathfrak{M}$, то любой оператор z из X представим в виде*

$$z = \sum_j \langle \cdot, \xi_j \rangle k^{1/2} \eta_j, \quad \eta_j \in \Delta(X), \tag{5}$$

где (ξ_j) — подходящая ортонормированная система в H, а $(k^{1/2}\eta_j)$ — ортогональная система в H, причем $\sum\limits_j \|k^{1/2}\eta_j\|^2 < +\infty$. При этом множество конечномерных операторов из X характеризуется равенствами (5), в которых суммы в правой части конечны.

Доказательство. Любой элемент $z \in X$ — оператор Гильберта–Шмидта, поэтому $z = \sum\limits_j \langle \cdot, \xi_j \rangle \zeta_j$, где ξ_j — ортонормированная система в H, а ζ_j — ортогональная система в H, причем $\sum\limits_j \|\zeta_j\|^2 < +\infty$. Так как $z \in X$, то $z = k^{1/2} x^*$, где $x^* \in J^*$.

Очевидно, $z \langle \cdot, \zeta_m \rangle \xi_m = \langle \cdot, \zeta_m \rangle \zeta_m$ — одномерный оператор из X, т.к. J^* — правый идеал. Тогда в силу предложения 4 $\langle \cdot, \zeta_m \rangle \zeta_m \in X^{(1)}$, а значит, $\zeta_m = k^{1/2} \eta_m$, т.е. $z = \sum\limits_j \langle \cdot, \xi_j \rangle k^{1/2} \eta_j$. $\square$

4. Случай полуконечного веса с ограниченной производной Радона–Никодима

Продолжим детально исследовать изложенную в разделе 3 конструкцию пространства представления алгебры $\mathcal{B}(H)$, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом, предполагая оператор k ограниченным.

Предложение 6. *Если $X \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, то $\Delta(X) = [\Delta(X)]$, где $[\Delta(X)]$ — замыкание $\Delta(X)$ в H. При этом $z \in X$ тогда и только тогда, когда справедливо представление* (5).

Доказательство. Пусть $\eta \in [\Delta(X)]$. Тогда существует последовательность $\eta_n \in \Delta(X)$ такая, что $\eta_n \to \eta$ при $n \to +\infty$. Тогда $k^{1/2}\eta_n \to k^{1/2}\eta$ (т. к. $k \in \mathcal{B}(H)^+$).

Положим $x_n^* = \langle\cdot,\xi\rangle\eta_n, \|\xi\| = 1$. Так как $\eta_n \in \Delta(X)$, то в силу леммы 3 $k^{1/2}x_n^* \in X$. Тогда $\|k^{1/2}x_n^* - \langle\cdot,\xi\rangle k^{1/2}\eta\|_2^2 = \|\langle\cdot,\xi\rangle k^{1/2}(\eta_n - \eta)\|_2^2 = \|k^{1/2}(\eta_n - \eta)\|^2 \to 0$ (если $\|\xi\| = 1$, то $\|\langle\cdot,\xi\rangle\chi\|_2^2 = \|\chi\|^2$).

Так как X замкнуто, то $\langle\cdot,\xi\rangle k^{1/2}\eta \in X^{(1)}$. Следовательно, $\eta \in \Delta(X)$. $\square$

Теорема 4. *Если $X \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, то существует $p \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$ такой, что*

$$X = S_p \equiv \{k^{1/2}px^* \mid x^* = px^* \in n_\varphi^*\}.$$

Доказательство. Пусть $p \equiv p_{\Delta(X)}$. Очевидно, $X \subseteq S_p$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим

$$z = k^{1/2}x^* = k^{1/2}px^* \in S_p.$$

Для этого оператора допустимо представление (5), т. к. $k^{1/2}x^*$ — оператор Гильберта–Шмидта. Тогда $\left\|z - \sum\limits_{j=1}^{s}\langle\cdot,\xi\rangle k^{1/2}\eta_j\right\|_2^2 = \sum\limits_{j=s+1}^{\infty}\|k^{1/2}\eta_j\|^2 \to 0$ $(s \to +\infty)$ (в силу сходимости ряда). Следовательно, z аппроксимируется конечномерными операторами из X. Но X замкнуто, значит, $z = k^{1/2}x^* \in X$. $\square$

Предложение 7. *Пусть $X, Y \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, $X = S_p$, $Y = S_q$. Подпространства X и Y ортогональны тогда и только тогда, когда $qkp = 0$ $(p, q \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}})$.*

Доказательство. Пусть $X = S_p$, $Y = S_q \in L_{\mathfrak{M}}(S)$ ортогональны. Тогда для любых $z_1 \in X, z_2 \in Y$ $\langle z_1, z_2\rangle_2 = 0$. Это равенство верно и для $z_1 = \langle\cdot,\xi\rangle k^{1/2}\eta_1$, $z_2 = \langle\cdot,\xi\rangle k^{1/2}\eta_2$, где $\eta_1 \in \Delta(X)$, $\eta_2 \in \Delta(Y)$, $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$. Тогда $0 = \langle z_1, z_2\rangle_2 = \tau_0(z_2^*z_1) = \langle k^{1/2}p\eta_1, k^{1/2}q\eta_2\rangle$. Таким образом, для любых $\eta_1 \in \Delta(X)$, $\eta_2 \in \Delta(Y)$ $\langle k^{1/2}p\eta_1, k^{1/2}q\eta_2\rangle = 0$. Тогда для любых $f, g \in H$ $\langle k^{1/2}pf, k^{1/2}qg\rangle = \langle k^{1/2}p(pf), k^{1/2}q(qg)\rangle = 0$. Другими словами, $qkpf = 0$ для любого $f \in H$, следовательно, $qkp = 0$. $\square$

Лемма 4. *Для любого $p \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$ существует $q \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$ такой, что $(S_p)^\perp = S_q$.*

Лемма 5. *Пусть $X = S_p \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, $S_q = (S_p)^\perp$. Тогда $\mathcal{R}(q) = \mathrm{Ker}(pk)$.*

Теорема 5. *Следующие условия эквивалентны*:
(i) $S_p \in F_{\mathfrak{M}}(S)$,
(ii) $[\mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p)] = \mathcal{R}(1-p)$,
(iii) $\mathcal{R}(q) = \mathrm{Ker}(pk)$ *влечет* $\mathrm{Ker}(qk) = \mathcal{R}(p)$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Из условия (i) следует, что существует $r \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$ такой, что $S_r = (S_p)^\perp$, $S_p = (S_r)^\perp$. Тогда в силу леммы 5 $\mathcal{R}(r) = \mathrm{Ker}(pk)$, $\mathcal{R}(p) = \mathrm{Ker}(rk)$. Необходимо показать, что $\{\mathcal{R}(k)\cap\mathcal{R}(1-p)\}^\perp = \mathcal{R}(p)$. Очевидно, $\mathcal{R}(p) \subseteq \{\mathcal{R}(k)\cap\mathcal{R}(1-p)\}^\perp$. Для доказательства обратного включения отметим, что $kf \in \mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p) \iff f \in \mathrm{Ker}(pk)$, так что $\mathcal{R}(r) = \mathrm{Ker}(pk) = \{f \in H \mid kf \in \mathcal{R}(1-p)\}$.

Пусть $h \in \{\mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p)\}^\perp$ и $f \in H$ произволен. Тогда $\langle rkh, f\rangle = \langle h, krf\rangle = 0$ (т. к. $krf \in \mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p)$ и h ортогонален такому вектору). Из произвольности f следует, что $rkh = \theta$, т. е. $h \in \mathrm{Ker}(rk) = \mathcal{R}(p)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $\mathcal{R}(p) = \{\mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p)\}^{\perp}$. Требуется доказать $qkh = \theta \Rightarrow h \in \mathcal{R}(p)$ (здесь $\mathcal{R}(q) = \mathrm{Ker}(pk)$). Действительно, $qkh = \theta$ влечет $kh \in \mathcal{R}(q)^{\perp} = \{\mathrm{Ker}(pk)\}^{\perp} = [\mathcal{R}(kp)]$, а значит, $kh = \lim\limits_n kpf_n$ для подходящей последовательности $f_n \in H$. Достаточно установить, что $\langle h, kf\rangle = 0$ для любых $kf \in \mathcal{R}(1-p)$. Имеем $\langle h, kf\rangle = \langle kh, f\rangle = \lim\limits_n \langle kpf_n, f\rangle = \lim\limits_n \langle pf_n, kf\rangle = 0$, т. к. $kf \in \mathcal{R}(1-p)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). В силу леммы 4 существуют $q, r \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$ такие, что $S_q = (S_p)^{\perp}$, $S_r = (S_q)^{\perp}$. Тогда $\mathcal{R}(r) = \mathrm{Ker}(qk)$, $\mathcal{R}(q) = \mathrm{Ker}(pk)$, а из (iii) следует, что $\mathrm{Ker}(qk) = \mathcal{R}(p)$. Итак, $\mathcal{R}(r) = \mathcal{R}(p)$, а значит, $p = r$. Наконец, $(S_p)^{\perp\perp} = (S_q)^{\perp} = S_r = S_p$. $\square$

Теорема 6. *Для $S_p \in L_{\mathfrak{M}}(S)$ следующие условия эквивалентны*:
(i) $S_p \in E_{\mathfrak{M}}(S)$,
(ii) *существует ортопроектор $q \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$ со свойствами $pkq = 0$, $\mathcal{R}(p) + \mathcal{R}(q) = H$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\eta \in H$ произволен. Тогда $\langle \cdot, \xi\rangle k^{1/2}\eta \in S$ ($\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$). Так как $S = S_p \bigoplus S_q$ ($S_q = (S_p)^{\perp}$, $p, q \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$), то $\langle \cdot, \xi\rangle k^{1/2}\eta = k^{1/2}px_1^* + k^{1/2}qx_2^*$ ($x_1^*, x_2^* \in n_{\varphi}^*$). Тогда $k^{1/2}\eta = k^{1/2}px_1^*\xi + k^{1/2}qx_2^*\xi$, т. е. $k^{1/2}(\eta - px_1^*\xi - qx_2^*\xi) = 0$. Следовательно, $\eta = px_1^*\xi + qx_2^*\xi \in \mathcal{R}(p) + \mathcal{R}(q)$. Имеем $H \subseteq \mathcal{R}(p) + \mathcal{R}(q) \subseteq H$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $S_p \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, $pkq = 0$, $\mathcal{R}(p) + \mathcal{R}(q) = H$. Необходимо показать, что $S_p \in E_{\mathfrak{M}}(S)$. Положим $(S_p)^{\perp} = S_q \in L_{\mathfrak{M}}(S)$. Пусть $\langle \cdot, \xi\rangle k^{1/2}\eta \in S$ — произвольный одномерный оператор. Так как $\eta = pf + qh$ ($f, h \in H$), то $\langle \cdot, \xi\rangle k^{1/2}\eta = \langle \cdot, \xi\rangle k^{1/2}pf + \langle \cdot, \xi\rangle k^{1/2}qh$. Поскольку $pf \in \Delta(X)$, $qh \in \Delta(Y)$ (здесь $X = S_p$, $Y = S_q$), то $\langle \cdot, \xi\rangle k^{1/2}pf \in S_p$, $\langle \cdot, \xi\rangle k^{1/2}qh \in S_q$, т. е. $S^{(1)} \subseteq S_p \oplus S_q$. Аналогично, для $\sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \xi_i\rangle k^{1/2}\eta_i \in S^{(fin)}$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \xi_i\rangle k^{1/2}\eta_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \xi_i\rangle k^{1/2}pf_i + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \xi_i\rangle k^{1/2}qh_i \in S_p + S_q.$$

Тогда $S^{(fin)} \subseteq S_p \bigoplus S_q$.

Пусть теперь $z = \sum\limits_i \langle \cdot, \xi_i\rangle k^{1/2}\eta_i \in S$ произволен. Имеем $\eta_i = pf_i + qh_i$ для любого i. При этом $\|k^{1/2}\eta_i\|^2 = \|k^{1/2}pf_i\|^2 + \|k^{1/2}qh_i\|^2$. Так как $\sum\limits_i \|k^{1/2}\eta_i\|^2 < +\infty$, то $\sum\limits_i \|k^{1/2}pf_i\|^2 < +\infty$, $\sum\limits_i \|k^{1/2}qh_i\|^2 < +\infty$. Положим $z_p = \sum\limits_i \langle \cdot, \xi_i\rangle k^{1/2}pf_i$, $z_q = \sum\limits_i \langle \cdot, \xi_i\rangle k^{1/2}qh_i$. Тогда

$$\|z_p\|_2^2 = \sum_j \Big\langle \sum_i \langle \xi_j, \xi_i\rangle k^{1/2}pf_i, \sum_k \langle \xi_j, \xi_k\rangle k^{1/2}pf_k \Big\rangle = \sum_j \langle k^{1/2}pf_j, k^{1/2}pf_j\rangle = \sum_{i\in I} \|k^{1/2}pf_i\|^2 < +\infty$$

и $z_p \in n_{\varphi}$. Аналогично, $z_q \in n_{\varphi}$. $\square$

Следствие 2. Пусть $p = \langle \cdot, e_0\rangle e_0$, $\|e_0\| = 1$. Тогда

$$X = S_p \equiv \{k^{1/2}px^* \mid x^* = px^* \in n_{\varphi}^*\} \in E_{\mathfrak{M}}(S).$$

5. Меры на классах подпространств

Поскольку существует определенное соответствие между подпространствами унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана, и ортогональными проекторами из этой алгебры, возникает задача мероопределения на введенных классах подпространств и изучения связей между мерами на классах подпространств и мерами на ортопроекторах исходной алгебры фон Неймана.

Далее через $K_{\mathcal{M}}(S)$ будем обозначать один из следующих классов $\{E_{\mathcal{M}}(S),\ F_{\mathcal{M}}(S),\ L_{\mathcal{M}}(S)\}$, а через $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i$ — замыкание множества $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\{X_i \mid i \in I\}$ в S для попарно ортогональных подпространств из $L_{\mathcal{M}}(S)$.

Определение ([2]). Отображение $\mu : K_{\mathcal{M}}(S) \to \mathbb{R}^+$ назовем *мерой* (соответственно *конечно-аддитивной мерой, вполне аддитивной мерой*), если для счетного (соответственно конечного, произвольного) семейства попарно ортогональных подпространств $X_i \in K_{\mathcal{M}}(S)$ $(i \in I)$ из условия $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i \in K_{\mathcal{M}}(S)$ следует, что $\mu(\bigoplus\limits_{i\in I} X_i) = \sum\limits_{i\in I} \mu(X_i)$.

Как показано в [2], мера (соответственно конечно-аддитивная, вполне аддитивная мера) на ортогональных проекторах алгебры фон Неймана определяет меру (соответственно конечно-аддитивную, вполне аддитивную меру) на классе $K_{\mathcal{M}}(S)$.

Задача, заключающаяся в изучении условий, при которых мера (конечно-аддитивная мера, вполне аддитивная мера) на классе $K_{\mathcal{M}}(S)$ допускает "поднятие" до меры (соответственно конечно-аддитивной меры, вполне аддитивной меры) на ортопроекторах алгебры $\mathcal{M}$, по всей видимости, не имеет столь простого и однозначного решения. Следующая теорема дает решение этой проблемы в рамках конструкции, изложенной в разделе 4: рассматривается пространство представления алгебры $\mathcal{B}(H)$, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом φ, обладающим ограниченной производной Радона–Никодима, $\mathfrak{M} = \pi_\varphi(\mathcal{B}(H))$ — образ $\mathcal{B}(H)$ при указанном представлении.

Теорема 7. *Мера, заданная на $K_{\mathfrak{M}}(S)$, допускает "поднятие" до меры на ортопроекторах алгебры $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{R}(k^{1/2})$ — плотный в H линеал, $\mathcal{L}_1$ — единичная сфера унитарного пространства $\mathcal{L}$. Если $k^{1/2}e \in \mathcal{L}_1$, то через p обозначим ортопроектор на $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\{e\}$, т. е. $p = \frac{1}{\|e\|^2}\langle\cdot, e\rangle e$.

Пусть теперь $k^{1/2}e_1, k^{1/2}e_2 \in \mathcal{L}_1$, причем $\langle k^{1/2}e_1, k^{1/2}e_2\rangle = 0$; при этом p_1, p_2 — ортопроекторы, соответствующие векторам e_1, e_2. Убедимся, что $p_2kp_1 = 0$. Действительно, для любого $f \in H$

$$p_2kp_1f = \frac{1}{\|e\|^2}p_2k(\langle f, e_1\rangle e_1) = \frac{\langle f, e_1\rangle}{\|e\|^2}\langle ke_1, e_2\rangle e_2 = \frac{\langle f, e_1\rangle}{\|e\|^2}\langle k^{1/2}e_1, k^{1/2}e_2\rangle e_2 = 0.$$

В этом случае выполнено условие ортогональности подпространств пространства S, т. е. $S_{p_1}\perp S_{p_2}$; кроме того, $S_{p_1}, S_{p_2} \in E_{\mathfrak{M}}(S)$ (следствие 2).

Определим на $\mathcal{L}_1$ функцию по следующему правилу: $\rho(k^{1/2}e) = \mu(S_p)$ $(k^{1/2}e \in \mathcal{L}_1)$. Определение корректно, поскольку из равенства $k^{1/2}e = k^{1/2}e^*$ следует $k^{1/2}(e - e^*) = 0$, т. е. $e - e^* = 0$, поскольку $\mathrm{Ker}(k^{1/2}) = \{\theta\}$.

Пусть теперь $(k^{1/2}e_i)_{i\in I}$ — произвольная ортонормированная система из $\mathcal{L}$. Тогда для $p_i = \frac{1}{\|e_i\|^2}\langle\cdot, e_i\rangle e_i$ $S_{p_i}\perp S_{p_j}$ $(i \neq j)$; $S_{p_i} \in E_{\mathfrak{M}}(S)$. В этом случае $\sum\limits_{i\in I}\rho(k^{1/2}e_i) = \sum\limits_{i\in I}\mu(S_{p_i}) = \mu(\oplus S_{p_i}) < +\infty$. Кроме того, если K — конечномерное подпространство в H, то ρ_K — ограничение функции ρ на $K \bigcap \mathcal{L}_1$ — реперная функция в K.

Таким образом, ρ — функция реперного типа в H [7]. Тогда ρ — ограничение на $\mathcal{L}_1$ положительной квадратичной формы $t(f, f)$, $f \in \mathcal{L}$, обладающей конечным матричным следом. Это влечет существование положительного оператора T, такого что $t(f, f) = \langle Tf, f\rangle$, $f \in \mathcal{L}$.

Мера $\overline{m} : \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}} \to \mathbb{R}^+$, заданная равенством $\overline{m}(p) = \mathrm{Tr}\,(Tp)$ $(p \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}})$, определяет меру на $\mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$, а равенство $m(\pi_\varphi(p)) = \overline{m}(p)$ $(p \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}})$ задает меру на $\mathfrak{M}^{\mathrm{pr}}$. $\square$

Литература

1. Турилова Е.А. *Свойства замкнутых подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана* // Алгебра и анализ: Тез. докл. школы-конф. – Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва, 1997. – С. 219–220.
2. Sherstnev A.N., Turilova E.A. *Classes of subspaces affiliated with a von Neumann algebra* // Russian J. of Math. Physics. – 1999. – V. 6. – № 4. – P. 426–434.

3. Шерстнев А.Н. *Каждый гладкий вес является l-весом* // Изв. вузов. Матем. – 1977. – № 8. – С. 88–91.
4. Такесаки М. *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения* // Математика (сб. переводов). – 1974. – Т. 18. – № 3. – С. 83–122.
5. Такесаки М. *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения* // Математика (сб. переводов). – 1974. – Т. 18. – № 4. – С. 34–64.
6. Pedersen G.K., Takesaki M. *The Radon–Nykodim theorem for Neumann algebras* // Acta math. – 1973. – V. 130. – № 1–2. – P. 53–87.
7. Дорофеев С.В., Шерстнев А.Н. *Функции реперного типа и их применения* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 4. – С. 23–29.

Казанский государственный университет

Поступила 24.02.2005