ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

УДК 517.958:537.8

Е.К. ЛИПАЧЁВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ОБЛАСТЯХ С НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Исследована разрешимость краевой задачи дифракции волн на полуплоскости, содержащей конечное включение. Методом обобщенных потенциалов получено интегральное уравнение второго рода, доказано, что уравнение фредгольмово и эквивалентно исходной краевой задаче. На основе приближения сплайнами решения интегрального уравнения построена вычислительная схема решения краевой задачи. Дано теоретическое обоснование алгоритма приближенного решения.

Введение

Термин “неровная” граница не имеет общепринятого формального определения. Пожалуй, впервые этот термин был употреблен в работах [1], [2], хотя еще Рэлей рассматривал задачи на поверхностях, которые можно отнести к неровным (см. [3]). Области с неровными границами естественно возникают при исследовании задач рассеяния акустических и электромагнитных волн реальными поверхностями (напр., [1]–[8] и библиографию в них). В работе [5] исследованы задачи распростанения волн на статистически неровных областях. В работе [6] предложена вычислительная схема решения задач дифракции на структурах с неровностями, основанная на методе аналитической регуляризации. В [9] для сведения задачи дифракции на металлическом экране с неровностью к интегральному уравнению применен метод преобразования Фурье. Краевая задача для уравнения Гельмгольца с условием Неймана на неровной границе исследована в работе [10].

В данной работе термин “неровная” граница используется в специальном случае. Предполагается, что граница области совпадает с прямой, за исключением участка конечной длины. Этот участок называется неровным, и его геометрия в определенном смысле произвольна, требуется лишь принадлежность параметризующей функции классу, который обеспечивает применимость формул Грина и выполнение основных свойств потенциалов простого и двойного слоев (напр., [11], [12]).

Доказательство единственности решения краевой задачи опирается на технику формул Грина, примененных в ограниченных областях, аппроксимирующих исходную область. Затем с помощью обобщенных потенциалов производится сведение задачи к однозначно разрешимому уравнению Фредгольма второго рода, после чего доказывается эквивалентность полученного интегрального уравнения и краевой задачи. Алгоритмы численного решения краевых задач строятся на основе приближения сплайнами решения интегрального уравнения. Теоретическое обоснование приближенного алгоритма выполнено с помощью варианта общей теории приближенных методов (см. [13]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-96184.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать специальный случай областей в $\mathbb{R}^2$, которые только на конечном участке границы отличаются от полуплоскости. После подходящего выбора координат можем считать, что область S задается в виде

$$S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R} \setminus [-d, d]\} \cup \{(x, y) : y > \Phi(x), x \in [-d, d]\},$$

а граница области записывается как $\partial S = \gamma \cup \gamma^*$, где

$$\gamma = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R} \setminus [-d, d]\}, \quad \gamma^* = \{(x, \Phi(x)) : x \in [-d, d]\}.$$

Число $d > 0$ фиксировано и задает границы неровности. Функция $\Phi(x)$ определяет неровный участок γ^* и относительно нее предполагаем, что $\Phi(-d) = \Phi(d) = 0$ и $\Phi(x) \in C^{(1,\eta)}[-d, d]$, $0 < \eta \leq 1$.

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в области S уравнению Гельмгольца*

$$\triangle u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S, \tag{1}$$

граничному условию Дирихле

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \partial S, \tag{2}$$

условию на ребре в точках $(-d, 0)$ и $(d, 0)$ (напр., [14], *с.* 33), *а также условию излучения на бесконечности*

$$u^* = e^{ikr} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial u^*}{\partial r} - iku^* = e^{ikr} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty, \tag{3}$$
$$\operatorname{Im} k \geq 0, \quad u^*(x, y) = u(x, y) - \widetilde{u}(x, y),$$

где $f \in C^{(1,\mu)}(\partial S)$, $0 < \mu \leq 1$, а через $\widetilde{u}$ обозначено решение вспомогательной краевой задачи на полуплоскости (см., напр., [8], [15]).

Определение. Решение краевой задачи (1)–(3) в области S будем называть классическим, если оно принадлежит классу $C^2(S) \cap C\left(\overline{S} \setminus \Gamma_\delta\right)$.

Здесь через Γ_δ обозначено объединение δ-окрестностей точек $(-d, 0)$ и $(d, 0)$.

Рассматриваемая краевая задача является математической моделью задачи дифракции плоской TE-поляризованной электромагнитной волны $e^{ik(\alpha x - \beta y)} e^{-i\omega t}$, падающей из полуплоскости $y > 0$ на решетку, геометрия которой определяется функцией $\Phi(x)$. Падающая волна характеризуется комплексным волновым числом k и углом падения θ, а составляющие волнового вектора имеют вид $\alpha = k \sin\theta$, $\beta = k \cos\theta$. Решение вспомогательной краевой задачи имеет вид $\widetilde{u}(x, y) e^{-i\omega t}$, $\widetilde{u}(x, y) = -e^{ik(\alpha x + \beta y)}$ (подробности см., напр., в [8], [14], [16]).

2. Существование и единственность решения

Обозначим через $\nu = \nu(x, y)$ единичный вектор нормали к ∂S в точке (x, y), а через $\partial_\nu = \partial_{\nu(x,y)}$ — правильную нормальную производную (напр., [12], с. 140). Чтобы зафиксировать направление нормали, будем считать, что вектор ν расположен в области S.

Теорема 1. *Если $\operatorname{Im} k > 0$ или $\operatorname{Im} k = 0$, $\operatorname{Re} k \geq 0$, то краевая задача* (1)–(3) *имеет не более одного классического решения.*

Доказательство. Для вещественного $R > d$ рассмотрим область

$$S_R = \{(x, y) \in S : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Пусть u — решение однородной краевой задачи. Применим в области S_R вторую формулу Грина к функциям u и $\overline{u}$:

$$\iint_{S_R} (u\triangle\overline{u} - \overline{u}\triangle u)\, d\sigma = \int_{\partial S_R} \left(u\partial_{\nu(P)}\overline{u} - \overline{u}\partial_{\nu(P)}u\right)\, ds_P.$$

Учитывая условия излучения на бесконечности и условие на ребре в точках $(-d, 0)$ и $(d, 0)$, в пределе при $R \to \infty$ имеем

$$i\,(2\operatorname{Re} k \operatorname{Im} k) \iint_{S_R} |u|^2\, d\sigma + i\,(\operatorname{Re} k) \int_{\Sigma_R^+} |u|^2\, ds \to 0,$$

где $\Sigma_R^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2, y > 0\}$.

При $\operatorname{Im} k > 0$, $\operatorname{Re} k \neq 0$ оба слагаемых имеют одинаковые знаки и, следовательно, стремятся к нулю, что означает $u \equiv 0$.

При $\operatorname{Im} k = 0$, $\operatorname{Re} k > 0$ утверждение теоремы следует из леммы Реллиха ([11], с. 88).

При $\operatorname{Im} k \geq 0$, $\operatorname{Re} k = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$\Delta u - \rho^2 u = 0, \tag{4}$$

где $\rho = \operatorname{Im} k$.

Рассмотрим уравнение (4) в области S_R, $R > d$. Для этого уравнения справедлив принцип максимума, согласно которому $|u|$ не может достигать максимального значения во внутренних точках области S_R (см., напр., [17], с. 492). Поскольку рассматривается однородная задача, то на участке границы $\partial S \cap \partial S_R$ функция u равна нулю. Остальной участок границы ∂S_R равен Σ_R^+ и на этом участке в силу условий излучения имеем $u = O(1/\sqrt{R})e^{-\rho R}$, $R \to \infty$. Из принципа максимума заключаем, что для всех точек области S_R справедливо неравенство $|u| < c\frac{1}{\sqrt{R}}$. В пределе при $R \to \infty$ получаем $u(P) = 0$, $P \in S$.

Следовательно, в условиях теоремы однородная краевая задача имеет только нулевое решение. □

Положим

$$G(k; M, P) = \frac{\pi i}{2}\{H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr^*)\}, \tag{5}$$

где $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода, $M = (x, y)$, $P = (\tau, \xi)$ и

$$r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (y-\xi)^2}, \quad r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (y+\xi)^2}.$$

Функция $G(k; M, P)$ имеет логарифмическую особенность при $M = P$ (напр., [17], с. 647).

Введем потенциал двойного слоя

$$(W(k)\psi)(x, y) = \int_{\gamma^*} \partial_{\nu(P)} G(k; M, P)\psi(\tau)\, ds_P, \quad M \notin \gamma^*, \tag{6}$$

с плотностью $\psi \in \dot{C}[-d, d]$ (т. е. функция ψ непрерывна и $\operatorname{supp}\psi \subset [-d, d]$). Заметим, что в (6) интегрирование производится по участку границы (в [18], с. 39; [19] такие потенциалы названы обобщенными).

Отметим, что на участке границы $\gamma = \partial S \setminus \gamma^*$ функция $W(k)\psi$ имеет нулевое значение.

Неровный участок γ^* границы ∂S является частью контура $\Gamma = \partial S_R$ для любого $R > d$. Поскольку $\operatorname{supp}\psi \subset [-d, d]$, интеграл в (6) можно рассматривать как интеграл по замкнутому контуру Γ. Таким образом, $W(k)\psi$ можно рассматривать как классический потенциал двойного слоя, определенный в области S_R. Функция $W(k)\psi$ непрерывна во всех точках области $\overline{S}_R$, за исключением участка γ^*. Следовательно, обобщенный потенциал (6) обладает теми же свойствами, что и классический потенциал двойного слоя, в частности, справедлива формула о скачке значений потенциала на γ^* (напр., [11], с. 59; [12], с. 141).

Рассмотрим в области S_R функцию

$$u(x,y) = \widetilde{u}(x,y) + (W(k)\psi)(x,y), \tag{7}$$

где, как и ранее, через $\widetilde{u}$ обозначено решение вспомогательной краевой задачи на полуплоскости.

Из краевого условия (2) и формулы о скачке значений потенциала двойного слоя на границе получаем интегральное уравнение

$$K\psi \equiv (\pi I - T)\psi = \chi, \tag{8}$$

где I — тождественный оператор,

$$(T\psi)(x) = [W(k)\psi](x, \Phi(x)), \quad x \in [-d,d], \tag{9}$$

— прямое значение потенциала двойного слоя и

$$\chi(x) = -f(x, \Phi(x)) + \widetilde{u}(x, \Phi(x)), \quad x \in [-d,d]. \tag{10}$$

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению* (8)*, имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть ψ — решение однородного интегрального уравнения

$$K\psi \equiv (\pi I - T)\psi = 0, \tag{11}$$

где оператор T определен соотношением (9). Используя функцию ψ в качестве плотности, построим по формуле (6) обобщенный потенциал $v = W(k)\psi$.

Рассмотрим область

$$S^* = \{(x,y) : (x,-y) \in S\} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus S)$$

и если $M = (x,y) \in S^*$, то через $\widetilde{M}$ обозначим точку из S с координатами $(x,-y)$.

Если $P \in \gamma^*$, то справедливы соотношения $r_{MP} = r^*_{\widetilde{M}P}$, $r^*_{MP} = r_{\widetilde{M}P}$, $M \in S^*$ и, следовательно,

$$\partial_{\nu(P)} G(k; M, P) = -\partial_{\nu(P)} G(k; \widetilde{M}, P), \quad M \in S^*. \tag{12}$$

Соотношение (12) позволяет продолжить функцию v в область S^*:

$$v(M) = -(W(k)\psi)(\widetilde{M}), \quad M \in S^*. \tag{13}$$

Как уже было показано, $(W(k)\psi)|_\gamma = 0$. Из соотношения (11) следует, что $(W(k)\psi)|_{\gamma^*} = 0$, поэтому $(W(k)\psi)|_{\partial S} = 0$.

Следовательно, функция v является решением краевой задачи для уравнения (1) с однородным условием Дирихле на ∂S и условием излучения на бесконечности. Согласно теореме 1 приходим к заключению, что $v \equiv 0$ в области S. Из (13) получаем $v = 0$ в точках области S^*.

Рассмотрим в области S^* произвольный контур Γ и область D, ограниченную этим контуром. Функция v, определенная соотношением (13), удовлетворяет условиям внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца с однородным условием Дирихле на Γ и условием излучения на бесконечности. Внешняя краевая задача для ограниченных областей однозначно разрешима (напр., [11], с. 95), поэтому $v \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Поскольку Γ — произвольный контур в S^*, приходим к выводу, что $(W(k)\psi)(M) = 0, \quad M \in \mathbb{R}^2$ и, следовательно, $\psi \equiv 0$. $\square$

Лемма 2. *Если* $\Phi(x) \in C^2[-d,d]$*, то в условиях теоремы* 1 *интегральное уравнение* (8) *фредгольмово.*

Доказательство. Утверждение следует из свойств функций Ханкеля (напр., [20], с. 180), через которые при $M \neq P$ выражается ядро интегрального уравнения (8). При совпадении аргументов M и P согласно свойствам логарифмического потенциала ядро уравнения (8) можно доопределить до непрерывной функции, положив равным половине кривизны граничной кривой (см., напр., [17], с. 350). $\square$

Теорема 2. *Если $\Phi(x) \in C^2[-d,d]$ и выполнены условия теоремы 1, то существует классическое решение краевой задачи (1)–(3).*

Доказательство. Согласно альтернативе Фредгольма, из лемм 1 и 2 следует существование нетривиального решения интегрального уравнения (8), принадлежащее классу $L_2(-d,d)$.

Правая часть интегрального уравнения (8) является непрерывной функцией. Согласно известным результатам об интегральных уравнениях Фредгольма второго рода с непрерывной правой частью (напр., [12], с. 142), заключаем, что $\psi \in \dot{C}[-d,d]$.

Рассмотрим в области S функцию

$$u(M) = \widetilde{u}(M) + (W(k)\psi)(M), \tag{14}$$

где $\psi(x)$ — решение интегрального уравнения (8), а функция $\widetilde{u}$ — решение вспомогательной краевой задачи на полуплоскости.

Эта функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условиям излучения (3). Из формулы о скачке значений потенциала двойного слоя на границе получаем

$$u(M) = \widetilde{u}(M) - \pi\psi(x) + [W(k)\psi](M), \quad M \in \gamma^*.$$

Поскольку $\psi(x)$ является решением интегрального уравнения (8), то из (10) получаем $u(M) = f(M)$, $M \in \partial S$.

Приходим к выводу, что функция $u(M)$, построенная по формуле (14), является решением краевой задачи (1)–(3).

Из формул (5), (6) и свойств функции Ханкеля следует, что $u(M) \in C^2(S)$. Значение потенциала двойного слоя можно непрерывно продолжить на границу, следовательно, $u(M) \in C(\overline{S})$. Тем самым доказано существование классического решения задачи (1)–(3). $\square$

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 и при $\Phi(x) \in C^2[-d,d]$ справедливы следующие утверждения. Всякое решение $u(x,y)$ краевой задачи (1)–(3) представимо в виде (7), где функция $\psi(x)$ является решением интегрального уравнения (8).*

Если же $\psi(x)$ — решение уравнения (8), то функция $u(x,y)$, построенная по формуле (7), с плотностью $\psi(x)$ является решением краевой задачи (1)–(3).

Доказательство. Обозначим через F множество классических решений краевой задачи (1)–(3), а через Q — множество $\{\widetilde{u} + W(k)\psi : \psi$ — решение интегрального уравнения (8)$\}$.

Поскольку правая часть интегрального уравнения (8) непрерывна, можем заключить (напр., [12], с. 142), что $\psi \in \dot{C}[-d,d]$.

Из доказательства теоремы о существовании решения краевой задачи следует, что функция

$$u(M) = \widetilde{u}(M) + (W(k)\psi)(M)$$

является решением краевой задачи (1)–(3), откуда имеем $\{0\} \neq Q \subseteq F$.

Из теоремы 1 следует, что решение единственно, а это значит, что $|F| \leq 1$. Следовательно, $\{0\} \neq Q = F$. Это означает, что решению ψ интегрального уравнения (8) соответствует решение краевой задачи (1)–(3), определяемое формулой $\widetilde{u}+W(k)\psi$ и, наоборот, такой вид имеет решение краевой задачи. $\square$

3. Метод сплайн-коллокации

Из теоремы 3 следует, что краевая задача (1)–(3) эквивалентна интегральному уравнению второго рода, следовательно, приближенное решение краевой задачи можно построить на основе решения интегрального уравнения, найденного с помощью какого-либо приближенного метода. В данной работе интегральные уравнения решались сплайновыми методами.

На отрезке $[-d, d]$ рассмотрим произвольную сетку узлов $-d < x_0 < x_1 < \dots < x_n < d$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую условию $\delta_n = \max\limits_{1\le j\le n}(x_j - x_{j-1}) \to 0$, $n \to \infty$.

Приближенное решение интегрального уравнения (8) ищем в виде сплайна

$$\psi_n^l(x) = \sum_{j=0^l}^{n} c_j s_j^l(x), \quad 0^0 = 1, \tag{15}$$

который определим как точное решение уравнения

$$K_n \psi_n^l \equiv P_n^l K \psi_n^l = P_n^l \chi \equiv \chi_n.$$

Здесь $s_j^l(x)$ — фундаментальные сплайны степени l, а P_n^l — оператор сплайн–интерполяции.

Рассмотрим вычислительные схемы на основе сплайнов нулевой и первой степеней.

Фундаментальные сплайны $s_j^0(x)$ определяются как характеристические функции интервалов $(x_{j-1}, x_j]$, а фундаментальные сплайны первой степени задаются формулами

$$s_j^1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j]; \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}], \end{cases}$$

и $s_j^1 = 0$ при $x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}]$ $(j = 1, \dots, n)$.

Неизвестные коэффициенты c_j $(j = 0^l, \dots, n;\ l = 0, 1)$ определяем согласно методу коллокации из системы линейных алгебраических уравнений

$$c_j + \sum_{k=0^l}^{n} \alpha_{jk} c_k = g_j, \quad j = 0^l, \dots, n, \tag{16}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} g_j &= \chi\left(x_j, \Phi(x_j)\right), & j &= 0^l, \dots, n, \\ \alpha_{jk} &= \left(T s_k^l\right)(x_j), & j, k &= 0^l, \dots, n. \end{aligned}$$

Обоснование методов приближенного решения уравнения (8) проведено с помощью теоремы 7 ([13], гл. I). Согласно этой теореме, если для уравнений $K\psi = \chi$ и $K_n\psi_n = \chi_n$ выполнены условия i) оператор K ограниченно обратим; ii) $\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\| \to 0$ и $\delta_n \equiv \|\chi - \chi_n\| \to 0$, $n \to \infty$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что $q_n \equiv \|K^{-1}\|\,\varepsilon_n < 1$, уравнения $K_n\psi_n = \chi_n$ однозначно разрешимы и $\|K_n^{-1}\| \le \|K^{-1}\|/(1 - q_n)$, $\|\chi - \chi_n\| = O(\varepsilon_n + \delta_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Поскольку установлена однозначная разрешимость интегрального уравнения (8), то выполнено условие i) указанной теоремы. Справедливость условия ii) следует из результатов работы [21].

Теорема 4. *В условиях теоремы* 3 *существует положительное целое число* n_0 *такое, что при* $n \ge n_0$ *система* (16) *имеет единственное решение* $\{c_j^*\}$ *и приближенные решения* $\psi_n^l(x)$ $(l = 0; 1)$, *построенные по формуле* (15) *при* $c_j = c_j^*$, *сходятся к точному решению* ψ^* *интегрального уравнения* (8).

Литература

1. Бреховских Л.М. *Дифракция звуковых волн на неровной поверхности* // ДАН СССР. – 1951. – Т. 79. – № 4. – С. 585–588.
2. Бреховских Л.М. *Дифракция электромагнитных волн на неровной поверхности* // ДАН СССР. – 1951. – Т. 81. – № 6. – С. 1023–1026.
3. Стретт Дж.В. (Рэлей) *Теория звука.* – Т. 2. – М.: Гостехиздат, 1955. – 476 с.
4. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. *Теоретические основы акустики океана.* – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – 264 с.
5. Басс Ф.Г., Фукс И.М. *Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.* – М.: Наука, 1972. – 424 с.
6. Басс Ф.Г., Крутинь Ю.И., Сиренко Ю.К. и др. *Возможность строгого расчета рассеянных произвольными и случайными поверхностями полей с использованием алгоритмов метода аналитической регуляризации* // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1997. – Т. 2. – № 1. – С. 5–17.
7. Zhang B., Chandler-Wilde S.N. *Integral equation methods for scattering by infinite rough surfaces* // Math. Meth. Appl. Sci. – 2003. – V. 26. – P. 463–488.
8. Tsang L., Kong J.A., Ding K.H. *Scattering of electromagnetic waves: theories and applications.* – New York: Wiley-Interscience, 2000. – 426 p.
9. Тумаков Д.Н. *Интегральное уравнение задачи дифракции электромагнитной волны на криволинейном металлическом экране* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 13. – Казань: Изд-во "ДАС", 2001. – С. 218–225.
10. Липачёв Е.К. *К приближенному решению краевой задачи дифракции волн на областях с бесконечной границей* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 4. – С. 69–72.
11. Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* – М.: Мир, 1987. – 311 с.
12. Мазья В.Г. *Граничные интегральные уравнения* // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 27. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988. – С. 131–228.
13. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
14. Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З. *Основы теории дифракции.* – М.: Наука, 1982. – 272 с.
15. Плещинский Н.Б. *Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах* // Препринт ПМФ-03-02. – Казань: Казанск. матем. о-во, 2003. – 30 с.
16. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. *Математические модели электродинамики.* – М.: Высш. школа, 1991. – 224 с.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1977. – 736 с.
18. Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В. *Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн.* – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 184 с.
19. Шестопалов Ю.В. *Применение метода обобщенных потенциалов для решения некоторых задач теории дифракции и распространения волн* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – № 7. – С. 1081–1092.
20. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям.* – М.: Наука, 1979. – 832 с.
21. Габдулхаев Б.Г. *Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений.* В сб. "Теория приближения функций". – М.: Наука, 1977. – С. 89–93.

Казанский государственный университет

Поступила
02.03.2005