ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

УДК 512.542

Л.Я. ПОЛЯКОВ, В.Н. СЕМЕНЧУК

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МИНИМАЛЬНЫХ НЕ $\mathfrak{F}$-ГРУПП

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация конечных групп. Конечная группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$, называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы занимают одно из центральных мест в теории конечных групп, важнейшие из которых — группы Шмидта (минимальные ненильпотентные группы) и минимальные несверхразрешимые группы. Данная работа посвящена характеризации минимальных не $\mathfrak{F}$-групп с помощью свойств некоторых максимальных подгрупп группы. Как следствие из полученных результатов вытекает новая характеризация групп Шмидта и минимальных несверхразрешимых групп.

В работе рассматриваются только конечные группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в монографиях [1], [2]. Напомним лишь некоторые определения.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если существует максимальная цепь подгрупп $G = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n = H$ такая, что $K_{j-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq K_j$ для любого $j = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 2. Нормальная подгруппа H группы G называется сверхразрешимо вложенной в G, если через подгруппу H можно провести такой главный ряд группы G, что его часть $H = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_k = 1$ имеет только простые индексы.

Известна

Лемма 1 ([2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, тогда справедливы утверждения*

1) *если K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, а M — подгруппа из G, то $K \cap M$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в M;*
2) *если K — подгруппа из G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K$, то K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G;*
3) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а K $\mathfrak{F}$-субнормальна в H, то K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация разрешимых групп, и пусть G содержит $\mathfrak{F}$-подгруппу B со свойствами*

1) $|G{:}B| = p^{\alpha}$;
2) *любая нееденичная подгруппа $K \subset B$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Тогда G — разрешимая группа.

Доказательство. Пусть K — неединичная собственная подгруппа из B. Так как $B \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $K \in \mathfrak{F}$. Согласно условию K является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой группы G. Теперь из того факта, что $\mathfrak{F}$ — разрешимая формация, следует разрешимость группы G.

Пусть подгруппа B не содержит неединичных собственных подгрупп. Тогда B — группа простого порядка. А это значит, что G — либо примарная, либо бипримарная группа. Следовательно, G — разрешимая группа. $\square$

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация и G — разрешимая группа. Тогда и только тогда группа G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, когда*

1) *в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная $\mathfrak{F}$-подгруппа M такая, что $(M/\Phi(G))_{G/\Phi(G)} = 1$;*
2) *любая неединичная подгруппа $K/\Phi(G) \subset M/\Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной в $G/\Phi(G)$;*
3) *$\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Очевидно, $G/\Phi(G)$ является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Тогда по теореме 1.5 из [3] $G/\Phi(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \rightthreetimes M/\Phi(G)$, где $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Отсюда следует, что $M/\Phi(G)$ — максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа из $G/\Phi(G)$, причем $(M/\Phi(G))_{G/\Phi(G)} = 1$. Ясно, что M — максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G.

Пусть $K/\Phi(G)$ — собственная подгруппа из $M/\Phi(G)$. Покажем, что $K/\Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой из $G/\Phi(G)$. Очевидно, $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \cdot K/\Phi(G) = R$ — собственная подгруппа из $G/\Phi(G)$. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \cdot K/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Отсюда $K/\Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной в R. По лемме 1 $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \cdot K/\Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G/\Phi(G)$. Но тогда по лемме 1 $K/\Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G/\Phi(G)$. Тот факт, что $\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$, следует из теоремы 1.4 из [3].

Достаточность. Ввиду теоремы 1.4 из [3] и того факта, что $\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$, можно считать, что $\Phi(G) = 1$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда в силу условия 1) имеем $G = N \rightthreetimes M$. Покажем теперь, что любая максимальная подгруппа H группы G принадлежит $\mathfrak{F}$. Рассмотрим два случая.

а) $N \nsubseteq H$. Из разрешимости G и минимальности N следует, что $G = N \rightthreetimes H$. Но тогда получаем $H \simeq M$. Значит, $H \in \mathfrak{F}$.

б) Пусть $N \subseteq H$. Тогда $H = NT$, где T — некоторая подгруппа из M. Следовательно, $T \in \mathfrak{F}$. В силу условия 2) доказываемой теоремы подгруппа T будет $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Заметим также, что по лемме 1 T будет $\mathfrak{F}$-субнормальна и в H. Тогда по теореме 15.10 из [2] получаем $H \in \mathfrak{F}$. Итак, все собственные подгруппы из G принадлежат $\mathfrak{F}$. Так как в G существует максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа, то $G \notin \mathfrak{F}$. Значит, G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. $\square$

Следствие 1. Группа G тогда и только тогда является группой Шмидта, когда

1) в G существует ненормальная максимальная нильпотентная подгруппа M такая, что $(M/\Phi(G))_{G/\Phi(G)} = 1$, $|G{:}M| = p^\alpha$;
2) любая неединичная подгруппа $K/\Phi(G) \subset M/\Phi(G)$ $\mathfrak{N}$-субнормальна в $G/\Phi(G)$;
3) $\Phi(G) = Z(G)$.

Доказательство. Известно, что любая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$, является субнормальной в G. Теперь доказательство данного утверждения следует из леммы 2 и теоремы 1 в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$. $\square$

Следствие 2. Группа G тогда и только тогда является минимальной несверхразрешимой группой, когда

1) в G существует такая сверхразрешимая максимальная подгруппа M, что $|G{:}M| = p^\alpha$, $\alpha > 1$ и $(M/\Phi(G))_{G/\Phi(G)} = 1$;
2) для любой неединичной подгруппы $K/\Phi(G) \subset M/\Phi(G)$ существует максимальная $(G/\Phi(G) - K/\Phi(G))$-цепь, которая имеет только простые индексы;
3) $\Phi(G)$ есть произведение всех сверхразрешимо вложенных нормальных подгрупп группы G.

Доказательство. Известно, что если $\mathfrak{F}$ — формация всех сверхразрешимых групп, то любая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа K из G обладает максимальной $(G - K)$-цепью, которая имеет только простые индексы, и любая нормальная $\mathfrak{F}$-гиперцентральная подгруппа из G сверхразрешимо вложена в G. Теперь доказательство данного утверждения следует из леммы 2 и теоремы 1 в случае, когда $\mathfrak{F}$ — формация всех сверхразрешимых групп. $\square$

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация. Тогда и только тогда G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом, когда выполняются следующие условия:*

1) *в G существует максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа M такая, что $M \in \mathfrak{F}$, $|G{:}M| = p^\alpha$;*
2) *любая неединичная подгруппа $K/\Phi(G) \subset M/\Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G/\Phi(G)$;*
3) *любая максимальная подгруппа из G, надстроенная над некоторой p-силовской подгруппой группы G, $\mathfrak{F}$-нормальна в G;*
4) *$\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа такая, что $G^{\mathfrak{F}}$ разрешима. Тогда по теореме 1.5 из [3] $G/\Phi(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \rtimes M/\Phi(G)$, где $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — p-группа, а M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа G, причем $M \in \mathfrak{F}$. Итак, условие 1) выполнено. Как и в теореме 1, нетрудно показать, что справедливо условие 2). Пусть H — произвольная максимальная подгруппа из G, надстроенная над некоторой силовской p-подгруппой группы G. Согласно теореме 1.1 из [3] $G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой. Но тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, а по определению 8.1 из [2] H $\mathfrak{F}$-нормальна в G. Равенство $\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}$ следует из теоремы 1.4 [3].

Достаточность. Так как в G существует максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа M, то $G \notin \mathfrak{F}$. Согласно теореме 1.4 из [3] можно считать, что $\Phi(G) = 1$. Согласно условию 1) $|G{:}M| = p^\alpha$. Так как $G = G^{\mathfrak{F}}M$, то $G_p^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Покажем, что $G_p^{\mathfrak{F}}$ — нормальная подгруппа группы G. По лемме Фраттини $G = G^{\mathfrak{F}}N_G(G_p^{\mathfrak{F}})$. Допустим, что $N_G(G_p^{\mathfrak{F}}) \neq G$. Пусть H — максимальная подгруппа группы G, которая содержит $N_G(G_p^{\mathfrak{F}})$. Тогда $G = G^{\mathfrak{F}}H$ и $G_p^{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Отсюда следует, что $|G{:}H|$ не делится на p. Тогда по условию 3) H $\mathfrak{F}$-нормальна в G. Отсюда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, что невозможно. Итак, $G_p^{\mathfrak{F}}$ — нормальная подгруппа из G. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G_p^{\mathfrak{F}}$. Так как $N \nsubseteq \Phi(G) = 1$, то в силу следствия 8.1.2 из [2] N является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором группы G. Поскольку M является $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой группы G и $M \in \mathfrak{F}$, то ввиду теоремы 15.1 из [2] M есть $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Из того факта, что $G = G_p^{\mathfrak{F}}M$, вытекает, что $G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна. По следствию 21.5.2 из [2] M является $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G. Тогда по следствию 21.1.1 из [2] M изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор G. Следовательно, $G = N \rtimes M$.

Теперь, как и в теореме 1, нетрудно показать, что G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. $\square$

Следствие 1. Группа G тогда и только тогда является группой Шмидта, когда

1) в G существует ненормальная максимальная подгруппа M такая, что M нильпотентна и $|G{:}M| = p^\alpha$;
2) любая неединичная подгруппа $K/\Phi(G) \subset M/\Phi(G)$ $\mathfrak{N}$-субнормальна в $G/\Phi(G)$;
3) любая максимальная подгруппа из G, надстроенная над некоторой p-силовской подгруппой группы G, нормальна в G;
4) $\Phi(G) = Z(G)$.

Доказательство следует из теоремы 2 с учетом леммы 2 в случае, когда $\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных групп.

Следствие 2. Группа G тогда и только тогда является минимальной несверхразрешимой группой, когда

1) в G существует сверхразрешимая максимальная подгруппа M такая, что $|G{:}M| = p^\alpha$, $\alpha \geq 1$;

2) для любой неединичной подгруппы $K/\Phi(G) \subset M/\Phi(G)$ существует максимальная $(G/\Phi(G) - K/\Phi(G))$-цепь, которая имеет только простые индексы;
3) любая максимальная подгруппа из G, надстроенная над некоторой p-силовской подгруппой группы G, имеет простой индекс;
4) $\Phi(G)$ есть произведение всех сверхразрешимо вложенных нормальных подгрупп группы G.

Доказательство следует из теоремы 2 с учетом леммы 2 в случае, когда $\mathfrak{F}$ — формация всех сверхразрешимых групп.

Литература

1. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. *Формации алгебраических систем.* – М.: Наука, 1989. – 256 с.
2. Шеметков Л.А. *Формации конечных групп.* – М.: Наука, 1978. – 271 с.
3. Семенчук В.Н. *Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы* // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18. – № 3. – С. 348–382.

Гомельский государственный университет

Поступили
первый вариант 21.11.1994
окончательный вариант 26.05.1997