ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 517.54 : 517.57

М.А. ОСИПЦЕВ

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ КРУГА

1. Введение

Пусть $f(z)$ — однолистное, сохраняющее ориентацию гармоническое отображение единичного круга $U=\{z:|z|<1\}$ на выпуклую область Δ. Тогда $f(z)$ имеет представление

$$f=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n+\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \overline{z}^{-n}. \tag{1}$$

В [1] был развит вариационный метод для решения линейных экстремальных проблем в классе гармонических отображений $f(z)$, имеющих представление (1), и получена точная оценка в случае $\Delta=U$

$$|c_{-n}|\leq \frac{n+1}{n\pi}\sin\frac{\pi}{n+1}.$$

Экстремальная функция отображает U на внутренность правильного $(n{+}1)$-угольника, вписанного в единичную окружность. Тем же методом в [2] получен ряд других оценок, в частности,

$$|c_n|\leq \frac{1}{n},\quad n=1,2,\dots,$$

$$\operatorname{Re}(c_n+c_{-n})\leq \frac{4}{n\pi}.$$

Экстремальная функция в обоих случаях отображает круг на себя. В [3] на основе геометрических свойств гармонических отображений, максимизирующих линейный функционал, получены оценки $|c_n|$ и $|c_{-n}|$ из [1], [2], а также оценки пары коэффициентов.

В данной статье, развивая метод, предложенный в [1], находим точную оценку $\operatorname{Re}(c_{n+1}-c_n)$, $n=1,2,\dots$

2. Вспомогательные замечания

Пусть $\mathcal{F}$ — замыкание семейства однолистных, сохраняющих ориентацию гармонических автоморфизмов U. Тогда $f\in\mathcal{F}$ имеет представление

$$f=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}e^{iv(t)}dt,$$

где $v(t)$ — непрерывная слева, неубывающая на $[0,2\pi)$ функция такая, что $v(2\pi-0)-v(0)\leq 2\pi$. Как и в [1], будем называть $v(t)$ круговым отображением. Каждый непрерывный линейный функционал L на $\mathcal{F}$ имеет вид

$$L(f)=\int_0^{2\pi}\ell(t)e^{iv(t)}dt,\quad f\in\mathcal{F}, \tag{2}$$

Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 98-01-00842.

где

$$\ell(t) = \frac{1}{2\pi} L\left(\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\right). \tag{3}$$

Ядро Пуассона имеет разложение

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-int} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{int} \overline{z}^{-n}\right\}. \tag{4}$$

Теорема A [1]. *Пусть L — непрерывный линейный функционал на $\mathcal{F}$ и f максимизирует* $\operatorname{Re} L$. *Тогда круговое отображение $v(t)$, порождающее f, имеет свойства*

a) *v постоянна на любом интервале, где* $\operatorname{Im}(\ell(t)e^{iv(t)})$ *имеет постоянный знак;*

b) *если t_1, t_2 — точки разрыва $v(t)$, то*

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im}(\ell(t)e^{iv(t)})dt = 0.$$

3. Оценка $\operatorname{Re}(c_{n+1} - c_n)$

Применим теорему A для точной оценки $\operatorname{Re}(c_{n+1} - c_n)$ в классе $\mathcal{F}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{F}$ имеет представление* (1). *Тогда имеют место оценки*

$$\operatorname{Re}(c_{n+1} - c_n) \le \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right), \quad n = 2k+1, \quad k = 1,2,3,\ldots,$$
$$\operatorname{Re}(c_{n+1} - c_n) \le \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right), \quad n = 2k, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

В обоих случаях экстремальная функция отображает единичный круг на себя и порождается следующими круговыми отображениями:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,\pi); \\ \frac{2n+1}{2}(t-\pi), & t \in [\pi,\ \pi + \frac{4\pi}{2n+1}),\ n = 2k+1; \\ 2\pi, & t \in [\pi + \frac{4\pi}{2n+1},\ 2\pi), \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi - \frac{2\pi}{2n+1}); \\ \frac{2n+1}{2}t - \frac{2n-1}{2}\pi, & t \in [\pi - \frac{2\pi}{2n+1},\ \pi + \frac{2\pi}{2n+1}),\ n = 2k; \\ 2\pi, & t \in [\pi + \frac{2\pi}{2n+1},\ 2\pi). \end{cases}$$

Доказательство. Из (2)–(4) получаем

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [e^{-i(n+1)t} - e^{-int}]e^{iv(t)}dt = -\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i((n+1/2)t - v(t))}\sin(t/2)dt.$$

Максимизируем

$$\operatorname{Re}(c_{n+1} - c_n) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin([n+1/2]t - v(t))\sin(t/2)dt. \tag{5}$$

Для применения необходимых условий теоремы заметим, что

$$\operatorname{Im}(\ell(t)e^{iv(t)}) = -\frac{1}{\pi}\cos([n+1/2]t - v(t))\sin(t/2)$$

обращается в нуль на прямых

$$\begin{gathered} v = (n+1/2)t - (k+1/2)\pi, \quad k = 0,\pm1,\pm2,\ldots, \\ t = 2k\pi, \quad k = 0,\pm1,\pm2,\ldots \end{gathered} \tag{6}$$

На прямых (6) $\sin([n+1/2]t-v(t))=\pm 1$. Как и в [1], назовем те линии, на которых $\sin([n+1/2]t-v(t))=-1$, положительными, а линии, на которых $\sin([n+1/2]t-v(t))=1$, — отрицательными.

Пусть $v(t)$ — круговое отображение, максимизирующее (5). Теорема A утверждает, что $v(t)$ должна быть постоянной в любой полосе между соседними линиями (6). Поэтому $v(t)$ может возрастать только вдоль линий или скачком. Более того, $v(t)$ может возрастать лишь вдоль положительных линий или скачком, т. к. возрастание вдоль отрицательной линии ведет к убыванию интеграла (5).

Покажем, что $v(t)$ — непрерывная функция. Пусть $v(t)$ в t_0 имеет разрыв. Если отрезок I, соединяющий точки $(t_0, v(t_0-0))$ и $(t_0, v(t_0+0))$, пересекает положительную линию

$$v=(n+1/2)t-(k_0+1/2)\pi, \tag{7}$$

то график $v(t)$ пересечет (7) в точке t_2, $t_2>t_0$. Пусть t_1 — первая точка пересечения $v(t)$ с прямой (7). Тогда

$$v^*=\begin{cases} v(t), & t\notin[t_1,t_2];\\ (n+1/2)t-(k_0+1/2)\pi, & t\in(t_1,t_2),\end{cases}$$

доставляет (5) значение большее, чем $v(t)$, что противоречит экстремальности $v(t)$. Аналогичными рассуждениями показываем, что точка $(t_0, v(t-0))$ не может принадлежать положительной линии.

Пусть теперь отрезок I пересекает отрицательную линию

$$v=(n+1/2)t-(k_1+1/2)\pi.$$

В этом случае

$$v^*=\begin{cases} v(t), & t\notin[t_1,t_2];\\ v=(n+1/2)t-(k_1-1/2), & t\in(t_1,t_2),\end{cases}$$

где $t_1=\sup\{t: v(t)=v(t_0-0)\}$, $t_2=\inf\{t: v(t)=v(t_0+0)\}$, доставляет большее, чем $v(t)$, значение интегралу (5), что противоречит экстремальности $v(t)$. Аналогично, точка $(t_0, v(t-0))$ не может принадлежать отрицательной прямой. Следовательно, $v(t)$ — непрерывная кусочно-линейная функция, возрастающая вдоль положительных линий. Интервалы постоянства имеют общую длину $2\pi(2n-1)/(2n+1)$.

Пусть D — объединение интервалов роста $v(t)$. Тогда

$$\operatorname{Re}(c_{n+1}-c_n)=\frac{1}{\pi}\int_D \sin(t/2)\,dt.$$

Пусть $n=2k+1$ $(k=1,2,3,\dots)$. Тогда прямая $v=(n+1/2)(t-\pi)$ положительна. По теореме о среднем максимум (5) будет достигаться, если $D=(\pi,\pi+4\pi/(2n+1))$ и

$$v(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,\pi);\\ (n+1/2)(t-\pi), & t\in[\pi,\ \pi+\frac{4\pi}{2n+1}),\ n=2k+1;\\ 2\pi, & t\in[\pi+\frac{4\pi}{2n+1},\ 2\pi).\end{cases}$$

В этом случае

$$\operatorname{Re}(c_{n+1}-c_n)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{2\pi}{2n+1}.$$

В случае, когда $n=2k$ $(k=1,2,3,\dots)$, положительной будет прямая $v=(n+1/2)t-(n-1/2)\pi$. По теореме о среднем максимум достигается, если $D=(\pi-2\pi/(2n+1),\ \pi+2\pi/(2n+1))$,

$$v(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,\pi-\frac{2\pi}{2n+1});\\ (n+1/2)t-(n-1/2)\pi, & t\in[\pi-\frac{2\pi}{2n+1},\ \pi+\frac{2\pi}{2n+1}),\ n=2k;\\ 2\pi, & t\in[\pi+\frac{2\pi}{2n+1},\ 2\pi),\end{cases}$$

и тогда

$$\operatorname{Re}(c_{n+1} - c_n) = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n+1}. \quad \square$$

Литература

1. Duren P., Schober G. *A variation method for harmonic mappings onto convex regions* // Complex variables theory appl. – 1987. – V. 9. – P. 153–168.
2. Duren P., Schober G. *Linear extremal problems for harmonic mappings of the disk* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – V. 106. – P. 967–973.
3. Wegmann R. *Extremal problems for harmonic mappings from the unit disc to convex region* // J. Comput. and Appl. Math. – 1993. – V. 46. – P. 165–181.

Саратовский государственный университет

Поступила 11.08.1997