ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 12 (439)

УДК 519.6

М.К. КРАВЦОВ, О.А. ЯНУШКЕВИЧ

ЛИНЕЙНАЯ СВЕРТКА КРИТЕРИЕВ В БИКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Введение

Постановка векторной задачи оптимизации предполагает задание на множестве (допустимых) решений X векторного критерия

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) : X \to \mathbf{R}^n, \quad n \geq 2,$$

компоненты которого (частные критерии), не исключая общности, можно считать минимизируемыми:

$$y_i(x) \to \min_X \quad \forall i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Обычно под векторной задачей оптимизации понимают задачу нахождения одного, нескольких (определенных) или всех элементов множества Парето

$$P(Y) = \{y \in Y : \pi(y) = \emptyset\},$$

где

$$\pi(y) = \{y' \in Y : y \geq y', \ y \neq y'\},$$
$$Y = y(X) = \{y \in \mathbf{R}^n : y = y(x), \ x \in X\}$$

– множество векторных оценок задачи, т. е. образ множества X в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$. Такую задачу в дальнейшем будем обозначать через (Y, n).

Элементы множества $P(Y)$ называются эффективными оценками задачи (Y, n) или оценками, оптимальными по Парето.

Один из традиционных подходов к нахождению некоторых эффективных оценок основан на использовании линейной свертки частных критериев $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, сущность которого заключается в скаляризации задачи (Y, n) и выражается в виде включения (см. [1]–[4])

$$\Lambda(Y) \subseteq P(Y),$$

где

$$\Lambda(Y) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_n} \Lambda(Y, \lambda),$$

$$\Lambda_n = \Big\{\lambda \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \ \lambda_i > 0 \ \forall i \in N_n\Big\},$$

$$\Lambda(Y, \lambda) = \arg\min\{\langle \lambda, y \rangle : y \in Y\}, \quad \langle \lambda, y \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$$

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (гранты № Ф95-70 и МП 96-35).

— скалярное произведение векторов λ и y, $\arg\min\{\ \}$ — множество всех оптимальных аргументов соответствующей задачи минимизации.

Другими словами, для всякого вектора $\lambda \in \Lambda_n$ оптимальное решение однокритериальной задачи

$$\min\{\langle\lambda, y\rangle : y \in Y\} \tag{1}$$

является эффективной оценкой задачи (Y, n). Однако уже в ранних работах (напр., [5]) были построены примеры векторных задач оптимизации, в которых существуют эффективные оценки, не являющиеся оптимальными решениями задачи (1) ни при каком $\lambda \in \Lambda_n$. Позже в работах [6]–[10] был выявлен достаточно широкий класс векторных задач дискретной оптимизации, не разрешимых с помощью линейной свертки критериев (ЛСК), т. е. для которых выполняется неравенство $\Lambda(Y) \neq P(Y)$. Используя ЛСК, в [11] удалось показать, что любая эффективная оценка векторной задачи на системе подмножеств с одним линейным критерием и несколькими критериями "узкого места" может быть выделена как оптимум в однокритериальной задаче с агрегированным критерием, представляющим собой линейную функцию.

В [12]–[15] найдены достаточные, а также необходимые условия разрешимости проблемы поиска лексикографического множества векторной задачи (Y, n), являющегося подмножеством множества Парето, с помощью ЛСК.

В работах [16]–[18] исследуется возможность применения ЛСК для нахождения всех элементов множества Парето в векторной задаче (Y, n) с конечным множеством Y векторных оценок. Найдены различные достаточные условия, при выполнении которых такая задача разрешима с помощью ЛСК. Одно из них позволило получить критерий эффективности векторной задачи (Y, n), $|Y| < \infty$, обобщающий результат [19]. Предложен также алгоритм, позволяющий сводить любую векторную задачу на системах подмножеств с одним критерием произвольной природы и несколькими критериями вида MINMAX (критерий "узкого места") и MINMIN (миниминный критерий) к эквивалентной задаче (с тем же множеством Парето), разрешимой с помощью ЛСК. В ряде важных случаев данный алгоритм имеет полиномиальную оценку сложности относительно размерности задачи.

В [20] получен ряд необходимых и одновременно достаточных условий разрешимости векторной дискретной задачи (Y, n) с помощью линейной свертки видоизмененных критериев.

В данной работе найдены необходимые и достаточные условия разрешимости с помощью ЛСК бикритериальной задачи $(Y, 2)$ без каких-либо ограничений относительно множества допустимых решений X и вида векторного критерия $y = (y_1, y_2)$. Полученные условия дают теоретическую основу проведения вычислительных экспериментов по исследованию алгоритмов ЛСК и позволяют более полно описать структуру множества эффективных оценок, находимых этими алгоритмами.

1. Вспомогательные результаты

Лексикографическое множество (множество лексикографически эффективных оценок) $L(Y)$ векторной задачи (Y, n) определяется следующим образом ([2], с. 52–53; [3], с. 267; [12], с. 15).

Пусть S_n — множество всех $n!$ перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$. Для всякой перестановки $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_n$ в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$ введем бинарное отношение лексикографического порядка. Будем считать, что точка $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ лексикографически меньше точки $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$, и писать

$$y \prec_s y'$$

тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

1. $y = y'$,
2. $\exists j \in N_n\ \forall i \in N_{j-1}\ (y_{s_j} < y'_{s_j}\ \&\ y_{s_i} = y'_{s_i})$.

Здесь и далее будем считать, что $N_0 = \emptyset$ (при $j = 1$).

Для всякой перестановки $s \in S_n$ введем множество

$$L(Y, s) = \{y \in Y : y \prec_s y' \ \forall y' \in Y\}.$$

Тогда лексикографическое множество задачи (Y, n) задается равенством

$$L(Y) = \bigcup_{s \in S_n} L(Y, s).$$

Таким образом, оценка $y^o \in Y$ является лексикографически эффективной оценкой задачи (Y, n) тогда и только тогда, когда существует такая перестановка $s \in S_n$, что вектор y^o является минимальным элементом линейно упорядоченного множества $(Y, \prec_s)$.

Очевидно, $L(Y) \subseteq P(Y)$. В дальнейшем, говоря о задаче (Y, n), будем предполагать, что непустое множество решений X и векторный критерий $y(x)$ имеют хотя и произвольную природу, но устроены так, что множество Парето $P(Y)$ непусто. В частности, например, $P(Y)$ непусто, если множество векторных оценок Y ограничено и замкнуто.

Эффективная оценка $y^* \in P(Y)$ называется собственно эффективной или оптимальной по Джоффриону, если справедливо условие

$$\exists \Theta > 0 \ \forall y \in Y \ \forall i \in N_n \ \exists j \in N_n \quad (y_i^* > y_i \implies y_i^* - y_i \leq \Theta(y_j - y_j^*)).$$

Если последняя импликация выполняется, то, очевидно, величина $y_j - y_j^*$ должна быть положительной. Однако, поскольку $y^* \in P(Y)$, то верна формула

$$\forall y \in Y \ \forall i \in N_n \ \exists j \in N_n \ (y_i^* > y_i \implies y_j > y_j^*),$$

т. е. такой индекс j всегда существует. Поэтому смысл определения собственно эффективной оценки заключается в требовании существования положительного числа Θ, удовлетворяющего приведенному в определении неравенству при выполнении указанных условий.

Множество всех собственно эффективных оценок задачи (Y, n) будем обозначать через $G(Y)$. По определению собственно эффективной оценки $G(Y) \subseteq P(Y)$.

В дальнейшем будем рассматривать векторную задачу $(Y, 2)$ с двумя частными критериями $y_1(x)$, $y_2(x)$, которую будем называть бикритериальной. Линейную свертку критериев $y_1(x)$, $y_2(x)$ будем обозначать

$$l(\lambda, y) = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2,$$

где $\lambda \in (0, 1)$.

Лемма 1. *Для бикритериальной задачи $(Y, 2)$ справедливо включение*

$$L(Y) \bigcap G(Y) \subseteq \Lambda(Y).$$

Доказательство. Пусть $y^* \in L(Y) \bigcap G(Y)$. Не нарушая общности, будем считать, что

$$y^* \prec_{(1,2)} y \ \forall y \in Y,$$

в противном случае меняем порядок критериев. Тогда определение собственно эффективной оценки для вектора y^* примет вид

$$\exists \Theta > 0 \ \forall y \in Y \ (y_2^* > y_2 \implies y_2^* - y_2 \leq \Theta(y_1 - y_1^*)).$$

Отсюда выводим неравенства

$$l(\lambda, y^*) \leq l(\lambda, y) \ \ \forall y \in Y' = \{y' \in Y : y_1' > y_1^*, \ y_2' < y_2^*\}, \tag{2}$$

где $\lambda = \Theta/(1 + \Theta)$. Неравенства

$$l(\lambda, y^*) \leq l(\lambda, y) \ \ \forall y \in Y \setminus Y' \tag{3}$$

вытекают в силу очевидного свойства

$$y \geq y^* \quad \forall y \in Y \setminus Y'.$$

Объединяя (2) и (3), заключаем, что $y^* \in \Lambda(Y)$. $\square$

Используя теорему Джоффриона [5] о том, что $\Lambda(Y) \subseteq G(Y)$ для любой векторной задачи (Y, n), из леммы 1 получаем доказанный ранее результат [15].

Лемма 2. *Для бикритериальной задачи* $(Y, 2)$ *справедлива импликация*

$$L(Y) \subseteq G(Y) \iff L(Y) \subseteq \Lambda(Y).$$

Лемма 3. *Для любой оценки* $y^* \in P(Y) \setminus L(Y)$ *бикритериальной задачи* $(Y, 2)$ *эквивалентны следующие утверждения*:

(i) $\exists \lambda \in (0,1) \;\; \forall y \in Y \;\; (l(\lambda, y^*) \leq l(\lambda, y))$;

(ii) $\forall y, y' \in Y \;\; \Big(((y_1 < y_1^* < y_1') \,\&\, (y_2' < y_2^* < y_2)) \implies \begin{vmatrix} y_1^* - y_1 & y_2^* - y_2 \\ y_1' - y_1 & y_2' - y_2 \end{vmatrix} \geq 0\Big).$

Доказательство. Докажем вначале импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii). Из утверждения (i) вытекают формулы

$$\exists \lambda \in (0,1) \; \forall y \in Y \;\; (((y_1 < y_1^*) \,\&\, (y_2^* < y_2)) \implies l(\lambda, y^*) \leq l(\lambda, y)),$$
$$\exists \lambda \in (0,1) \; \forall y' \in Y \;\; (((y_1^* < y_1') \,\&\, (y_2' < y_2^*)) \implies l(\lambda, y^*) \leq l(\lambda, y')),$$

из которых выводим

$$\forall y, y' \in Y \;\; \Big(((y_1 < y_1^* < y_1') \,\&\, (y_2' < y_2^* < y_2)) \implies \frac{y_2^* - y_2'}{y_1' - y_1^*} \leq \frac{y_2 - y_2^*}{y_1^* - y_1}\Big).$$

Легко убедиться, что последняя формула равносильна утверждению (ii).

Теперь установим справедливость импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i). После несложных преобразований из формулы (ii) получаем

$$M = \sup\left\{\frac{y_2^* - y_2'}{y_1' - y_1^*} : y' \in Y, \; y_1' > y_1^*, \; y_2' < y_2^*\right\} \leq m = \inf\left\{\frac{y_2 - y_2^*}{y_1^* - y_1} : y \in Y, \; y_1 < y_1^*, \; y_2 > y_2^*\right\}.$$

Введя число λ из неравенств $M \leq \lambda/(1 - \lambda) \leq m$, заключаем, что

$$l(\lambda, y^*) \leq l(\lambda, y) \; \forall y \in Y \setminus \{y' \in Y : y' \geq y^*\}.$$

Неравенства $l(\lambda, y^*) \leq l(\lambda, y) \;\; \forall y \in \{y' \in Y : y' \geq y^*\}$ очевидны. Тем самым доказана импликация (ii) $\Longrightarrow$ (i). $\square$

Из лемм 1 и 3 и теоремы Джоффриона [5] вытекает также необходимое и достаточное условие того, чтобы хотя бы одна эффективная оценка задачи $(Y, 2)$ могла быть "выловлена" с помощью ЛСК. Иначе говоря, справедливо утверждение: для бикритериальной задачи $(Y, 2)$ множество $\Lambda(Y) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

(i) $L(Y) \bigcap G(Y) \neq \emptyset$,

(ii) $\exists y^* \in P(Y) \setminus L(Y) \; \forall y, y' \in Y \;\; \Big(((y_1 < y_1^* < y_1') \,\&\, (y_2' < y_2^* < y_2)) \implies \begin{vmatrix} y_1^* - y_1 & y_2^* - y_2 \\ y_1' - y_1 & y_2' - y_2 \end{vmatrix} \geq 0\Big).$

2. Признаки разрешимости

Будем говорить, что бикритериальная задача $(Y,2)$ разрешима с помощью ЛСК, если выполняется условие

$$\forall y^* \in P(Y)\ \exists \lambda \in (0,1)\ (l(\lambda, y^*) = \min\{l(\lambda, y) : y \in Y\}).$$

С учетом включения $G(Y) \subseteq P(Y)$ и теоремы Джоффриона [5] задача разрешима с помощью ЛСК, если $P(Y) = \Lambda(Y)$.

Теорема 1. *Бикритериальная задача* $(Y,2)$ *разрешима с помощью ЛСК тогда и только тогда, когда справедливы условия*

(i) $L(Y) \subseteq G(Y)$,

(ii) $\forall y^* \in P(Y)\ \forall y, y' \in Y\ \Big(((y_1 < y_1^* < y_1') \,\&\, (y_2' < y_2^* < y_2)) \implies \begin{vmatrix} y_1^* - y_1 & y_2^* - y_2 \\ y_1' - y_1 & y_2' - y_2 \end{vmatrix} \geq 0\Big)$.

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 2 и 3.

Для оценки $y \in Y$ определим конус

$$K_\varepsilon(y) = \left\{ y' \in \mathbf{R}^2 : \begin{pmatrix} \varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} (y'-y)^T \leq (0,0)^T \right\}, \quad \varepsilon \in \mathbf{R},$$

а для оценок $y, y' \in Y$ — полуплоскость

$$H(y,y') = \left\{ y'' \in \mathbf{R}^2 : \begin{vmatrix} y_1'' - y_1 & y_2'' - y_2 \\ y_1' - y_1 & y_2' - y_2 \end{vmatrix} \leq 0 \right\}.$$

На основании теоремы 15 из ([2], гл. 2) аналогом теоремы 1 является

Теорема 1$'$. *Бикритериальная задача* $(Y,2)$ *разрешима с помощью ЛСК тогда и только тогда, когда справедливы условия*

(i) $\forall y^* \in L(Y)\ \exists \varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]\ (K_\varepsilon(y^*) \bigcap Y = \{y^*\})$,

(ii) $\forall y^* \in P(Y)\ \forall y, y' \in Y\ (((y_1 < y_1^* < y_1') \,\&\, (y_2' < y_2^* < y_2)) \implies y^* \notin H(y,y'))$.

В случае, когда множество векторных оценок Y конечно, $G(Y) = P(Y)$ (напр., [2], [3]). Поэтому с учетом включения $L(Y) \subseteq P(Y)$ из теоремы 1 получаем

Следствие 1. Для того чтобы бикритериальная задача $(Y,2)$ с конечным множеством векторных оценок Y была разрешима с помощью ЛСК, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (ii) теоремы 1.

Отметим, что для любой векторной задачи, у которой $0 < |Y| < \infty$, множество $\Lambda(Y)$ непусто, поскольку в этом случае $L(Y) \neq \emptyset$ и $L(Y) \subseteq \Lambda(Y)$ (напр., [12]–[15]).

Используя следствие 1, найдем достаточные, а также необходимые условия разрешимости с помощью ЛСК бикритериальной задачи $(Y,2)$ с конечным множеством векторных оценок, проверка которых менее трудоемка, чем проверка условий следствия 1.

Предварительно определим два множества:

$$Y_1 = y_1(X) = \{u \in \mathbf{R} : u = y_1(x),\ x \in X\},$$
$$Y_2 = y_2(X) = \{v \in \mathbf{R} : v = y_2(x),\ x \in X\}.$$

Следствие 2. Пусть $|Y| < \infty$. Тогда для того чтобы бикритериальная задача $(Y,2)$ была разрешима с помощью ЛСК, достаточно условия

$$\forall u, u', u'' \in Y_1\ \forall v, v', v'' \in Y_2\ (((u < u' < u'') \,\&\, (v < v' < v'')) \implies$$
$$\implies ((2u' \leq u + u'') \,\&\, (2v' \leq v + v''))). \quad (4)$$

Доказательство. Для любых векторов $y^* \in P(Y)$ и $y, y' \in Y$, удовлетворяющих неравенствам $y_1 < y_1^* < y_1'$ и $y_2' < y_2^* < y_2$, на основании условия (4) справедливы неравенства

$$y_1' - y_1^* \geq y_1^* - y_1, \quad y_2 - y_2^* \geq y_2^* - y_2'.$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} 0 \leq (y_1' - y_1^*)(y_2 - y_2^*) - (y_1^* - y_1)(y_2^* - y_2') = (y_1' - y_1^*)(y_2 - y_2^*) + (y_1^* - y_1)(y_2 - y_2^*) - \\ - (y_1^* - y_1)(y_2^* - y_2') - (y_1^* - y_1)(y_2 - y_2^*) = ((y_1' - y_1^*) + (y_1^* - y_1))(y_2 - y_2^*) - \\ - (y_1^* - y_1)((y_2^* - y_2') + (y_2 - y_2^*)) = (y_1' - y_1)(y_2 - y_2^*) - (y_1^* - y_1)(y_2 - y_2') = \begin{vmatrix} y_1^* - y_1 & y_2^* - y_2 \\ y_1' - y_1 & y_2' - y_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. выполняется условие (ii) теоремы 1. Для завершения доказательства следствия 2 осталось воспользоваться следствием 1. □

Следствие 3. Пусть $|Y| < \infty$. Тогда для того чтобы бикритериальная задача $(Y, 2)$ была разрешима с помощью ЛСК, достаточно условия

$$\forall u, u' \in Y_1 \quad \left(u < u' \implies u' \geq u \frac{\max\{v - v' : v, v' \in Y_2\}}{\min\{v - v' > 0 : v, v' \in Y_2\}} \right). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть выполняется условие (5). Тогда для любых векторов $y^* \in P(Y)$ и $y, y' \in Y$, удовлетворяющих неравенствам $y_1 < y_1^* < y_1'$ и $y_2' < y_2^* < y_2$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq (y_1' - y_1^*) \min\{v - v' > 0 : v, v' \in Y_2\} - (y_1^* - y_1) \max\{v - v' : v, v' \in Y_2\} \leq \\ \leq (y_1' - y_1)(y_2 - y_2^*) - (y_1^* - y_1)(y_2 - y_2') = \begin{vmatrix} y_1^* - y_1 & y_2^* - y_2 \\ y_1' - y_1 & y_2' - y_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. выполняется условие (ii) теоремы 1, а следовательно, на основании следствия 1 задача $(Y, 2)$ разрешима с помощью ЛСК. □

В [16]–[18] были получены различные достаточные условия разрешимости с помощью ЛСК для векторных задач (Y, n), $|Y| < \infty$, с произвольным числом критериев. По сравнению с некоторыми из них (напр., с теоремой 2 [18]) при $n = 2$ следствия 2 и 3 являются более сильными утверждениями.

В работах [10], [21] приводились результаты вычислительного эксперимента о процентном содержании количества эффективных оценок, находимых ЛСК, в числе всех эффективных оценок для классических бикритериальных задач дискретного программирования с MINSUM–MINMAX–критериями и MINMAX–MINMAX–критериями. Заметим, что на основании следствия 2 или 3 такого класса задачи можно свести за полиномиальное время к эквивалентным задачам с теми же критериями и разрешимым с помощью ЛСК (подобный алгоритм сведения см. в [16]–[18]).

Приведем необходимое условие разрешимости с помощью ЛСК бикритериальной задачи с конечным множеством векторных оценок.

Следствие 4. Пусть $|Y| < \infty$. Для того чтобы бикритериальная задача $(Y, 2)$ была разрешима с помощью ЛСК, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{y_2^* - y_2^{oo}}{y_1^{oo} - y_1^*} \leq \frac{y_2^o - y_2^*}{y_1^* - y_1^o} \quad \forall y^* \in P(Y) \setminus L(Y), \tag{6}$$

где $y^o \in L(Y, (1, 2))$, $y^{oo} \in L(Y, (2, 1))$.

Доказательство. Пусть бикритериальная задача $(Y, 2)$ разрешима с помощью ЛСК. Тогда в силу следствия 1 выполняется условие (ii) теоремы 1, из которого выводим формулу

$$\forall y^* \in P(Y) \; \forall y, y' \in Y \quad \left(((y_1 < y_1^* < y_1') \,\&\, (y_2' < y_2^* < y_2)) \implies \frac{y_2^* - y_2'}{y_1' - y_1^*} \leq \frac{y_2 - y_2^*}{y_1^* - y_1} \right).$$

Отсюда с очевидностью вытекают неравенства (6). □

Замечание 1. Выполнение неравенств (6) для некоторой оценки $y^* \in P(Y) \setminus L(Y)$ является необходимым и достаточным условием нахождения с помощью ЛСК по крайней мере одной эффективной оценки из множества $P(Y) \setminus L(Y)$ бикритериальной задачи $(Y, 2)$, $|Y| < \infty$. Необходимость вытекает из следствия 4, а достаточность легко доказать методом от противного.

На основании замечания 1 ЛСК с вероятностью $1/2$ находит по крайней мере одну эффективную оценку из множества $P(Y) \setminus L(Y)$ бикритериальной задачи $(Y, 2)$ с конечным множеством векторных оценок Y.

Замечание 2. Основной результат статьи (теорема 1) не может быть распространен на случай векторной задачи (Y, n) при $n \geq 3$, поскольку, как показано в [15], даже включение $L(Y) \subseteq G(Y)$ не является достаточным условием для нахождения множества $L(Y)$ с помощью ЛСК.

Литература

1. Михалевич В.С., Волкович В.Л. *Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем.* – М.: Наука, 1982. – 288 с.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* – М.: Наука, 1982. – 256 с.
3. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. *Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем.* – М.: Наука, 1986. – 296 с.
4. Штойер Р. *Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения.* – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.
5. Geoffrion A.M. *Proper efficiency and the theory of vector maximization* // J. Math. Anal. and Appl. – 1968. – V. 22. – № 3. – P. 618–630.
6. Емеличев В.А., Перепелица В.А. *Сложность дискретных многокритериальных задач* // Дискретн. матем. – 1994. – Т. 6. – Вып. 1. – С. 3–33.
7. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *О неразрешимости векторных задач дискретной оптимизации на системах подмножеств в классе алгоритмов линейной свертки критериев* // Докл. РАН. – 1994. – Т. 334. – № 1. – С.9–11.
8. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *О задачах векторной дискретной оптимизации на системах подмножеств, неразрешимых с помощью алгоритмов линейной свертки* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34. – № 7. – С. 1082–1094.
9. Кравцов М.К. *Неразрешимость задач векторной дискретной оптимизации в классе алгоритмов линейной свертки критериев* // Дискретн. матем. – 1996. – Т. 8. – Вып. 2. – С. 89–96.
10. Меламед И.И., Сигал И.Х. *Исследование линейной свертки критериев в многокритериальном дискретном программировании* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1995. – Т. 35. – № 8. – С. 1260–1270.
11. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Янушкевич О.А. *Условия парето-оптимальности в одной дискретной векторной задаче на системе подмножеств*// Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1995. – Т. 35. – № 11. – С. 1641–1652.
12. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. *Оптимизация по последовательно применяемым критериям.* – М.: Советское радио, 1975. – 192 с.

13. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Янушкевич О.А. *Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи дискретной оптимизации* // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58. – № 3. – С. 365–371.
14. Емеличев В.А., Гладкий А.А., Янушкевич О.А. *О многокритериальных задачах нахождения лексикографических оптимумов* // Весцi АНБ. Сер. фiз.-матэм. навук. – 1996. – № 3. – С. 82–86.
15. Емеличев В.А., Гирлих Э., Янушкевич О.А. *Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи* // Дискретн. анал. и исслед. операций. Сер. 1. – 1997. – Т. 4. – № 2. – С. 3–14.
16. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Янушкевич О.А. *Разрешимость векторной траекторной задачи на "узкие места" с помощью алгоритма линейной свертки критериев* // Докл. АН Беларуси. – 1996. – Т. 40. – № 4. – С. 29–33.
17. Кравцов М.К., Янушкевич О.А. *О разрешимости векторной задачи с помощью алгоритма линейной свертки критериев* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – № 4. – С. 502–509.
18. Гирлих Э., Ковалев М.М., Кравцов М.К., Янушкевич О.А. *Условия разрешимости векторных задач с помощью линейной свертки критериев* // Кибернет. и систем. анал. – 1997. – № 5. – С. 3–16.
19. Burkard R.E., Keiding H., Krarup J., Pruzan P.M. *A relationship between optimality and efficiency in multicriteria* 0-1 *programming problems*// Computers & Operations Research. – 1981. – V. 8. – № 4. – P. 241–247.
20. Емеличев В.А., Янушкевич О.А. *Условия парето-оптимальности в дискретных векторных задачах оптимизации* // Дискретн. матем. – 1997. – Т. 9. – Вып. 3 – С. 153–160.
21. Меламед И.И., Сигал И.Х. *Задача коммивояжера: некоторые вопросы теории, алгоритмы, эксперимент.* – М.: ВЦ РАН, 1997. – 32 с.

Научно-исследовательский институт
министерства экономики
и институт технической кибернетики
Национальной Академии наук
Республики Беларусь

Поступила
09.12.1997