Известия вузов. Математика
2013, №8, с. 86–93

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ, Ш.К. АБИКЕНОВА, А.Ж. ЖУБАНЫШЕВА, Г.Е. ТАУГЫНБАЕВА

ЗАДАЧИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ В КОНТЕКСТЕ КОМПЬЮТЕРНОГО (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО) ПОПЕРЕЧНИКА

Аннотация. В статье исследованы три конкретизации компьютерного (вычислительного) поперечника — дискретизация решений волнового уравнения, численное дифференцирование и восстановление функций.

Ключевые слова: компьютерный (вычислительный) поперечник, дискретизация решений уравнений в частных производных, дискретизация оператора, восстановление функций, информативная мощность данного набора функционалов, предельная погрешность.

УДК: 519.6

Данная статья относится к теме "Поперечники множеств", восходящей к А.Н. Колмогорову [1], первоначальная идея в которой заключалась в нахождении подпространства данной конечной размерности, наилучшим образом приближающего данное множество в данной метрике среди всех других подпространств той же размерности. Различные реализации этой идеи привели к разным видам поперечников.

В русле такого же подхода здесь определен поперечник, где в качестве приближающего объекта в оптимизационной задаче выступают вычислительные агрегаты (все определения даны ниже). Основания к этому следующие. Исследования явлений действительного мира математическими методами проводятся по схеме: от наблюдений и экспериментов к построению математической модели с последующим изучением математическими средствами, которые завершаются выводами в рамках модели и их сравнением с реальными фактами. Компьютер дает возможность запомнить и оперировать с большими конечными массивами чисел и производит над ними четыре арифметические операции. При этом вычисление функционалов — основных носителей числовой информации, как правило, не может быть математически точным, поэтому самое лучшее, на что можно рассчитывать, — это точность, с которой заданы сами используемые значения функционалов. К тому же излишняя точность вычислений при реализации алгоритма приводит к неоправданному увеличению объема памяти и количества арифметических операций, поскольку не улучшает заложенного в алгоритме порядка точности.

Математическим эквивалентом изложенных положений является *компьютерный* (*вычислительный*) *поперечник* (сокращенно К(В)П), к определению которого перейдем [2]–[3].

Задача восстановления по неточной информации имеет различные постановки [2]–[6].

Поступила 12.12.2012

Исходным в каждой из них является определение

$$\delta_N(\varepsilon^{(N)})_Y = \inf_{(l^{(N)},\varphi_N)\in D_N} \sup\left\{ \left\| u(\cdot;f) - \varphi_N(z_1,\ldots,z_N;\cdot)\right\|_Y : f\in F \quad \text{и} \right.$$
$$\left. \left| l_N^{(j)}(f) - z_j\right| \le \varepsilon_N^{(j)} \ (j=1,\ldots,N) \right\} \equiv \inf_{(l^{(N)},\varphi_N)\in D_N} \sup\left\{ \left\| u(\cdot;f) - \varphi_N\big(l_N^{(1)}(f) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)},\ldots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)};\cdot\big)\right\|_Y : f\in F,\ \left|\gamma_N^{(j)}\right| \le 1 \ (j=1,\ldots,N) \right\}, \quad (1)$$

где $\varepsilon^{(N)} \equiv \left\{\varepsilon_N^{(j)}\right\}_{j=1}^N$ — неотрицательная последовательность. В случае $\varepsilon_N^{(j)} \equiv 0$ $(j = 1, 2, ..., N)$ речь будет идти о задаче восстановления по точной информации.

Здесь $l_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)}$ — набор функционалов $l^{(N)}$, заданных на линейной оболочке функционального класса F, определенная на $C^N \times \Omega_Y$ числовая функция $\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;y)$ — алгоритм переработки приближенной информации об f, полученной от функционалов $l_N^{(1)}(f),\ldots,l_N^{(N)}(f)$ с точностью $\varepsilon^{(N)}$, после чего как функция от y приобретает статус *вычислительного агрегата* для приближенного вычисления оператора $(Tf)(y) = u(y;f)$, D_N — данный набор комплексов $\big(l_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)};\varphi_N\big) \equiv \big(l^{(N)},\varphi_N\big)$.

В рамках приведенных обозначений и определений задача К(В)П в собирательном смысле заключается в последовательном решении трех задач (записи $A << B$ и $A \succ\prec B$ соответственно означают $|A| \le cB$ и одновременное выполнение $A << B$ и $B << A$):

$$\text{К(В)П-}1^0: \ \text{находится} \ \succ\prec \delta_N(0)_Y, \quad (2)$$

$$\text{К(В)П-}2^0: \ \text{находится} \ \{\widetilde{\varepsilon}_N\} \ \text{такое, что} \ \delta_N(0)_Y \succ\prec \delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N)_Y, \quad (3)$$

с одновременным выполнением

$$\text{К(В)П-}3^0: \ \forall \eta_N \uparrow +\infty: \ \overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N(\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N)_Y}{\delta_N(0)_Y} = +\infty. \quad (4)$$

По существу речь будет идти о нахождении $\succ\prec \delta_N(0)$ и $\widetilde{\varepsilon}_N$.

Название “компьютерный (вычислительный) поперечник” объясняется следующим.

Поперечник (*с уточнением “вычислительный”*) — оптимизация проводится по наборам вычислительных агрегатов.

Компьютерный — вычислительные агрегаты строятся по приближенным значениям функционалов $l_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)}$ как носителей числовой информации с последующей переработкой по алгоритму φ_N в полном соответствии с описанием компьютера как технического устройства.

На *алгоритм переработки информации* $\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;y)$ не налагаются какие-либо ограничения, кроме принадлежности пространству Y как функции $y\in\Omega_Y$ при любых фиксированных $z_1,\ldots,z_N$. Оценка сверху предполагает конкретизацию $\overline{\varphi}_N$, без каких-либо предварительных условий, с сопутствующей алгоритмической сложностью (содержащую, в частности, количество арифметических операций для своей реализации), обусловленную лишь требованиями самой задачи по информации, полученной от N функционалов обеспечить порядок оценки снизу.

К(В)П-1^0 содержит (см. [2]–[3]) в качестве конкретизаций известные поперечники Колмогорова, Корнейчука, Тихомирова, Темлякова и т. п., в аппроксимационных задачах — ряды Фурье по всевозможным системам, всевозможные базисы, включая вейвлет-системы и жадные алгоритмы. Однако, например, поперечник “кодирования” не включается в схему К(В)П.

Данное сообщение посвящено трем конкретизациям сформулированной общей задачи восстановления.

1. Задача дискретизации решений задачи Коши для волнового уравнения $(s = 1, 2, \dots)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \quad \left(u = u\,(x,t)\,, \quad 0 \le t < \infty, \quad x \equiv (x_1, \dots, x_s) \in R^s\right),$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0,1)^s, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = f_2\,(x) \in W_2^{r_2}(0,1)^s\,(x \in R^s)\,,$$

где $W_p^r(0,1)^s$ — классы Соболева (см., например, в [7]–[8]), $\widehat{f}\,(m) = \int\limits_{[0,1]^s} f\,(x)\,e^{-2\pi i(m,x)}dx$ — тригонометрические коэффициенты Фурье, $Z_+ = \{1, 2, ...\}$, $\|g(x,t)\|_{L^{2,\infty}} = \sup\limits_{t \ge 0} \|g(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)^s}$.

Теорема 1. *Пусть заданы целое положительное число s, числа r_1 и r_2 такие, что $r_1 > 2 + s/2$, $r_2 > 1 + s/2$. Тогда имеют место соотношения*

К(В)П-1^0:

$$\delta_N(\overline{0}_N)_{L^{2,\infty}} \equiv \min_{\substack{N_1 \in Z_+,\ N_2 \in Z_+: \\ N_1 + N_2 = N}} \inf_{\substack{m^{(1)},\dots,m^{(N_1)} \\ n^{(1)},\dots,n^{(N_2)},\,\varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0,1)^s \\ f_2 \in W_2^{r_2}(0,1)^s}} E_1 \succ\prec N^{-\frac{\min\{r_1, r_2+1\}}{s}},$$

где $E_1 = \left\|u(x,t;f_1,f_2) - \varphi_N(\overset{\wedge}{f_1}(m^{(1)}), \dots, \overset{\wedge}{f_1}(m^{(N_1)}), \overset{\wedge}{f_2}(n^{(1)}), \dots, \overset{\wedge}{f_2}(n^{(N_2)}); x, t)\right\|_{L^{2,\infty}}$.

К(В)П-2^0:

$$\delta_N(\overline{0}_N)_{L^{2,\infty}} \succ\prec \delta_N\big(\widetilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)},N_2^{(0)}} = (\widetilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)}}, \widetilde{\varepsilon}_{N_2^{(0)}})\big)_{L^{2,\infty}} \equiv$$

$$\equiv \min_{\substack{N_1 \in Z_+,\, N_2 \in Z_+: \\ N_1 + N_2 = N}} \inf_{\substack{m^{(1)},\dots,m^{(N_1)} \\ n^{(1)},\dots,n^{(N_2)},\,\varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0,1)^s \\ f_2 \in W_2^{r_2}(0,1)^s}} E_2 \succ\prec N^{-\frac{\min\{r_1, r_2+1\}}{s}},$$

где

$$\begin{aligned} E_2 = \Big\{ \big\|u(x,t;f_1,f_2) - \varphi_N(\overset{\wedge}{f_1}(m^{(1)}) + \gamma_{N_1}^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(1)}, \dots, \overset{\wedge}{f_1}(m^{(N_1)}) + \gamma_{N_1}^{(N_1)}\widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(N_1)}, \\ \overset{\wedge}{f_2}(n^{(1)}) + \gamma_{N_2}^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_{N_2}^{(1)}, \dots, \overset{\wedge}{f_2}(n^{(N_2)}) + \gamma_{N_2}^{(N_2)}\widetilde{\varepsilon}_{N_2}^{(N_2)}; x, t)\big\|_{L^{2,\infty}} : \\ f_1 \in W_2^{r_1}(0,1)^s, \quad f_2 \in W_2^{r_2}(0,1)^s, \quad \big|\gamma_N^{(j_1)}\big| \le 1 \\ (j_1 = 1, \dots, N_1), \quad \big|\gamma_N^{(j_2)}\big| \le 1 \quad (j_2 = 1, \dots, N_2)\Big\}, \end{aligned}$$

и где для N_1 и N_2 $(N_1 + N_2 = N)$

$$\widetilde{\varepsilon}_{N_1,N_2} \equiv (\widetilde{\varepsilon}_{N_1},\ \widetilde{\varepsilon}_{N_2}) = (\widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(1)},\ \widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(2)}, \dots, \widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(N_1)},\ \widetilde{\varepsilon}_{N_2}^{(1)},\ \widetilde{\varepsilon}_{N_2}^{(2)}, \dots, \widetilde{\varepsilon}_{N_2}^{(N_2)})$$

есть N-мерный вектор с компонентами

$$\widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)} = N_1^{-r_1/s-1/2} \quad (j_1 = 1, 2, \dots, N_1),$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{N_2}^{(j_2)} = \begin{cases} N_2^{-\frac{r_2+1}{s}}, & s = 1; \\ N_2^{-\frac{r_2+1}{s}}\,(\ln N_2)^{-\frac{1}{2}}\,, & s = 2; \\ N_2^{-\frac{r_2+1}{s} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right)} = N_2^{-\frac{r_2}{s} - \frac{1}{2}}, & s > 2 \quad (j_2 = 1, 2, \dots, N_2), \end{cases}$$

$N_1^{(0)}$ *и* $N_2^{(0)}$ $(N_1^{(0)}+N_2^{(0)}=N)$ *— одна из пар, реализующих минимум погрешности дискретизации,* $\overline{0}_N$ *— нулевой* N*-мерный вектор, причем для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

К(В)П-3^0: $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\delta_N(\eta_N\widetilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)},N_2^{(0)}})_{L^{2,\infty}}}{\delta_N(\overline{0}_N)_{L^{2,\infty}}}=\infty.$

Замечание. Правильные порядки дискретизации по точной информации в теореме 1 установлены в [7].

2. Точные порядки компьютерного (вычислительного) поперечника при дискретизации операторов дифференцирования функций. Основным методом приближенного вычисления производных является замена их на соответствующие конечные разности: $f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Вместе с тем, как это утверждается в ([8], с. 389), "*... разностный метод аппроксимации элементов компакта* X *требует катастрофически большого числа узлов по сравнению с оптимальным количеством вещественных параметров* $N_{опт}(\varepsilon)$", причем "*вывод о крайней неэффективности разностного метода по количеству потребных для аппроксимации вещественных параметров имеет общий характер и справедлив для любой разностной схемы*". Поэтому задача отыскания новых методов является актуальной.

Теорема 2. *Пусть даны целое положительное число* s $(s=1,2,\dots)$ *и неотрицательные числа* r, α_j $(j=1,2,\dots,s)$ *такие, что* $r>\alpha_1+\dots+\alpha_s$ *(производные* $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ *понимаются в смысле Вейля). Тогда для* $\widetilde{\varepsilon}_N=N^{-r/s-1/2}$ $(N=n^s,\ n=1,2,\dots)$ *справедливы соотношения*

К(В)П-1^0:

$$\delta_N(0)_{L^2}\equiv\inf_{m^{(1)},\dots,m^{(N)}\in Z^s;\varphi_N}\ \sup_{f\in W_2^r(0,1)^s}\Big\|f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(x)-$$
$$-\varphi_N\big(\widehat{f}(m^{(1)}),\dots,\widehat{f}(m^{(N)});x\big)\Big\|_{L^2(0,1)^s}\succ\prec N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}};$$

К(В)П-2^0:

$$\delta_N(0)_{L^2}\succ\prec\delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N=N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}})_{L^2}\equiv\inf_{m^{(1)},\dots,m^{(N)}\in Z^s;\varphi_N}\sup\Big\{\Big\|f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(x)-$$
$$-\varphi_N\big(\widehat{f}(m^{(1)})+\gamma_N^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_N,\dots,\widehat{f}(m^{(N)})+\gamma_N^{(N)}\widetilde{\varepsilon}_N;x\big)\Big\|_{L^2(0,1)^s}:$$
$$f\in W_2^r(0,1)^s,\ \ \Big|\gamma_N^{(j)}\Big|\le 1\ \ (j=1,\dots,N)\Big\}\succ\prec N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}},$$

причем для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

К(В)П-3^0: $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\delta_N(\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N=\eta_N N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}})_{L^2}}{\delta_N(0)_{L^2}}=+\infty.$

Прокомментируем теорему 2. Таким образом, в случае, когда гладкость функции определяется принадлежностью к многомерным классическим пространствам Соболева, а информация снимается с тригонометрических коэффициентов Фурье — одного из основных функционалов, задача приближенного дифференцирования решена в полном объеме. Именно, выписаны точные порядки $\delta_N(0)_{L^2}\succ\prec N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}}$ восстановления производных в идеальном случае, когда используются *точные* значения функционалов. Величины $\delta_N(0)_{L^2}$ называем информативной мощностью данного класса функционалов, в изучаемом в теореме 2 случае — тригонометрических коэффициентов Фурье. После чего вычислена величина погрешности тригонометрических коэффициентов Фурье $\widetilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}$, сохраняющая порядок идеального восстановления, но с определяющим ее дополнительным условием — сколь угодно медленное бесконечное увеличение этой погрешности ведет к потере порядка восстановления по точной информации.

Интересным и неожиданным фактом в теореме 2 является и то обстоятельство, что предельная погрешность $\widetilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}$ не зависит от порядка дифференцирования функций $\alpha \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$.

3. Как правильно использовать в вычислительной практике многочлены Лагранжа? Пусть $D_N^{(*)} = \{(l_1(f), \ldots, l_N(f)) : l_j(f)$ — *любые линейные функционалы на линейной оболочке* $F = W_p^r(0,1)$ *такие, что* $|l_j(1)| \le 10$ $(j = 1, \ldots, N)$ $\} \times \{\varphi_N\}$.

Теорема 3. *Пусть даны числа* $1 \le p < q \le \infty$ *и* r $(r = 1, 2, \ldots)$ *такие, что* $r - (1/p - 1/q) > 0$. *Тогда при* $\widetilde{\varepsilon}_N = N^{-(r-(1/p-1/q))}$ *выполнены соотношения*

К(В)П-1^0: $\delta_N(0)_{L^q} \equiv$

$$\equiv \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N^{(*)}} \sup_{f \in W_p^r(0,1)} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \ldots, l_N(f); x)\|_{L^q(0,1)} \succ\prec N^{-\left(r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)}, \quad (5)$$

К(В)П-2^0: $\delta_N(0)_{L^q} \succ\prec \delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N)_{L^q} \equiv \inf\limits_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N^{(*)}} \sup\limits_{\substack{f \in W_p^r(0,1) \\ |\gamma_N^{(j)}| \le 1 \ (j=1,\ldots,N)}} \big\| f(x) -$

$$-\varphi_N(l_1(f) + \gamma_N^{(1)} \widetilde{\varepsilon}_N, \ldots, l_N(f) + \gamma_N^{(N)} \widetilde{\varepsilon}_N; x) \big\|_{L^q(0,1)} \succ\prec N^{-\left(r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)}, \quad (6)$$

причем для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

К(В)П-3^0:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\delta_N\big(\eta_N \widetilde{\varepsilon}_N = \eta_N N^{-\left(r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)}\big)_{L^q}}{\delta_N(0)_{L^q}} = +\infty. \quad (7)$$

То же самое справедливо для класса Никольского $H_p^r(0,1)$ и $Y = L^\infty \equiv C$.

Верхняя оценка в (5), (6) реализуется на интерполяционных сплайнах Лагранжа $L_{N,r}^{(i)}(x; f)$. При $r \ge 2$ функция $L_{N,r}^{(i)}(x; f)$ определена на отрезке $i(r-1)/N \le x \le (i+1)(r-1)/N$ в виде алгебраического многочлена

$$L_{N,r}^{(i)}(x; f) = \sum_{j=0}^{r-1} f\left(\frac{i(r-1)+j}{N}\right) \prod_{\substack{t=0 \\ t \ne j}}^{r-1} \frac{N}{j-t} \left(x - \frac{i(r-1)+t}{N}\right) \quad (i = 0, \ldots, k-1)$$

порядка $(r-1)$, где $N = (r-1)k$ $(r = 2, 3, \ldots; k = 2, 3, \ldots)$.

При $r = 1$ под $L_{N,1}^{(i)}(x; f)$ $(i = 0, \ldots, N-1)$ понимаем линейную на $\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right]$ функцию, совпадающую с f в точках $\frac{i}{N}$ и $\frac{i+1}{N}$.

И, наконец, $L_N(x; f) = \sum\limits_{j=0}^{N} f\left(\frac{j}{N}\right) \prod\limits_{\substack{t=0 \\ t \ne j}}^{N} \frac{N}{j-t} \left(x - \frac{t}{N}\right)$ — собственно многочлен Лагранжа.

Как это следует из соотношений (5), (6), при повышении гладкости r восстанавливаемых функций повышается скорость интерполяции $\succ\prec N^{-(r-(1/p-1/q))}$, но одновременно усложняется базовый интерполяционный сплайн — многочлен Лагранжа степени $r-1$ с равноотстоящими узлами.

Отметим, что это согласуется с результатами статьи [5], где количество узлов $N = n$ многочлена Лагранжа — оптимального приближающего агрегата, совпадает с показателем гладкости $r = n$ класса Соболева.

Далее, вычислительные агрегаты, построенные по всей возможной линейной информации с переработкой произвольными алгоритмами φ_N, содержат в себе, можно сказать, все *мыслимые* вычислительные средства. В частности, понятия и методы численного анализа и вычислительной математики: линейный поперечник, поперечник Фурье (ортопоперечник), частичные суммы рядов Фурье по всевозможным ортонормированным системам (включая системы, состоящие из всплесков) и разложений по базисам, линейные методы суммирования рядов Фурье, не могут улучшить порядок приближения (детали отмечены в [2]–[3]).

Из теоремы 3 можно сделать определенные выводы общего характера. В ([9], с. 192) дается следующая рекомендация: *не следует использовать в вычислительной практике алгебраические интерполяционные многочлены с равноотстоящими узлами при значительном числе узлов.*

На основе соотношений (5)–(7) приходим к выводу, что многочлен Лагранжа необходимо использовать не глобально на всем отрезке, а локально в сплайн-форме. Тогда восстановление (более того — интерполяция) будет наилучшим в смысле двух “абсолютов”: (2) и (5) — информативной мощности всех возможных линейных функционалов и предельной погрешности (3)–(4) и (6)–(7) соответственно.

Приведем результаты численных экспериментов, где в качестве показателя точности восстановления примем величины $(M > N)$

$\Delta_{\text{лагр.}}(f;N;M) = \max\limits_{x=x_0,x_1,\dots,x_M} |f(x) - L_N(x;f)|$ и

$\Delta_{\text{спл.}}(f;r;k;N;M) = \max\limits_{i=0,\dots,k-1} \max\big\{\big|f(x) - L^{(i)}_{N,r}(x;f)\big| : x = x_j \in \big[\frac{(r-1)i}{N}, \frac{(r-1)(i+1)}{N}\big],$ $j = 0,\dots,M\big\}.$

Тогда

Функция $f(x) = \frac{1}{x^2+0.25}$ ([10], с. 28)			
Порядок равномерного разбиения $N = (r-1)k = 100$		Погрешности Δ в M узлах $M = 1000,\ x_j = j/M\ (j = 0,1,\dots,M)$	
$r-1$	k	$\Delta_{\text{спл.}}$	$\Delta_{\text{лагр.}}$
2	50	3.11E-14	1.48E-04
4	25	1.56E-14	
5	20	1.23E-14	
10	10	5.44E-15	
20	5	3.55E-15	
25	4	1.78E-15	
50	2	4.00E-15	

Здесь погрешности Δ вычислены двумя способами — на Visual Basic и на Maple, с одними и теми же результатами при заложенной точности $\varepsilon = 10^{-16}$ (вычисления проведены совместно с СНС лаборатории научных вычислений ИТМ и НВ Н. Наурызбаевым).

Прокомментируем динамику лагранжевой сплайн-интерполяции: лагранжева сплайн-интерполяция во всех случаях в 10^{10}–10^{11} раз лучше интерполяции полиномом Лагранжа, причем точность убывает по мере продвижения от левого конца отрезка $[0,1]$ к правому.

Литература

[1] Kolmogorov A.N. *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*, Ann. Math. (2) **37**, 107–110 (1936).

[2] Темиргалиев Н. *Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье*, Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков Евразийского национального ун-та им. Л.Н. Гумилева, Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева, 1–194 (2010).

[3] Темиргалиев Н. *Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований.* Электронное издание. Ин-т теоретической матем. и научн. вычисл., Астана, Евразийск. ун-т им. Л.Н. Гумилева, 1–256 (2012).

[4] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. *Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью*, Матем. сб. **193** (3), 79–100 (2002).

[5] Марчук А.Г., Осипенко К.Ю. *Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек*, Матем. заметки **17** (3), 359–368 (1975).

[6] Plaskota L. *Noisy information and computational complexity* (Cambridge University Press, 1996).

[7] Абикенова Ш., Темиргалиев Н. *О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения*, Дифференц. уравнения **46** (8), 1201–1204 (2010).

[8] Локуциевский О.В., Гавриков М.Б. *Начала численного анализа* (ТОО “Янус”, М., 1995).

[9] Бабенко К.И. *Основы численного анализа* (Наука, М., 1986).

[10] Рябенький В.С. *Введение в вычислительную математику* (Физматлит, М., 1994).

Н. Темиргалиев

*профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мирзояна, д. 2, г. Астана, 010000, Республика Казахстан,*

e-mail: ntmath10@mail.ru

Ш.К. Абикенова

*старший научный сотрудник, лаборатория научных вычислений,
Институт теоретической математики и научных вычислений,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мирзояна, д. 2, г. Астана, 010000, Республика Казахстан,*

e-mail: Shabik_29@mail.ru

А.Ж. Жубанышева

*старший научный сотрудник, лаборатория теоретической математики,
Институт теоретической математики и научных вычислений,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мирзояна, д. 2, г. Астана, 010000, Республика Казахстан,*

e-mail: axaulezh@mail.ru

Г.Е. Таугынбаева

*докторант, Институт теоретической математики и научных вычислений,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мирзояна, д. 2, г. Астана, 010000, Республика Казахстан,*

e-mail: galija_1981tau@mail.ru

N. Temirgaliev, Sh.K. Abikenova, A.Zh. Zhubanysheva, and G.E. Taugynbaeva

Discretization of solutions to a wave equation, numerical differentiation, and function reconstruction for a computer (computing) diameter

Abstract. We study three concretizations for a computer (computing) diameter, namely, the discretization of solutions to the Klein–Gordon equation, numerical differentiation, and the function reconstruction.

Keywords: computer (computing) diameter, discretization of solutions to differential equations, operator discretization, function reconstruction, informative cardinality of given set of functionals, limiting accuracy.

N. Timergaliev

Professor, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computation,
L.N. Gumilev Eurasian National University,
2 Mirzoyana str., Astana, 010000 Republic of Kazakhstan,

e-mail: ntmath10@mail.ru

Sh.K. Abikenova

Senior research worker, Laboratory of Scientific Computation,
Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computation,
L.N. Gumilev Eurasian National University,
2 Mirzoyana str., Astana, 010000 Republic of Kazakhstan,

e-mail: Shabik_29@mail.ru

A.Zh. Zhubanysheva

Senior research worker, Laboratory of Theoretical Mathematics,
Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computation,
L.N. Gumilev Eurasian National University,
2 Mirzoyana str., Astana, 010000 Republic of Kazakhstan,

e-mail: axaulezh@mail.ru

G.E. Taugynbaeva

Doctor's degree worker, Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computation,
L.N. Gumilev Eurasian National University,
2 Mirzoyana str., Astana, 010000 Republic of Kazakhstan,

e-mail: galija_1981tau@mail.ru