

Аннотация

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины являются: получение базовых знаний по теории краевых задач для аналитических функций и связанным с ней разделам анализа.

Теория краевой задачи Римана–Гильберта и тесно связанная с ней теория сингулярных интегральных уравнений была создана и развита в результате усилий главным образом советских математиков. Многие достижения в этой области связаны с именами ученых, работавших в разные годы в Казанском университете.

Таким образом, помимо общенаучного и прикладного интереса, изучение этого курса позволяет познакомить аспирантов с достижениями казанской математической школы. К числу базовых знаний в этой области относятся такие концепции и факты, как интеграл типа Коши и его граничные свойства, их использование при решении задачи о скачке, решение краевой задачи Римана методом факторизации на контурах различных типов, влияние особенностей коэффициентов на разрешимость краевой задачи Римана, преобразование Гильберта и его свойства, решение задачи Шварца, решение краевой задачи Гильберта путем редукции к задаче Шварца, сингулярный интегральный оператор и его свойства, сведение характеристического сингулярного интегрального уравнения к краевой задаче Римана, решение полного сингулярного интегрального уравнения, понятие индекса, понятие оператора Нетер.

При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения задач, связанных с приложениями краевых задач.

2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры

Данная учебная дисциплина включена в раздел Б1.В.ДВ.2 ООП. Осваивается на 2 курсе, в 4 семестре.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) в соответствии с ФГОС ВО программ подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

В результате изучения данной дисциплины аспирант

- **должен знать:** основные понятия и результаты по теории краевых задач (интеграл типа Коши и его граничные свойства, их использование при решении задачи о скачке, решение краевой задачи Римана методом факторизации на контурах различных типов, влияние особенностей коэффициентов на разрешимость краевой задачи Римана, преобразование Гильберта и его свойства, решение задачи Шварца, решение краевой задачи Гильберта путем редукции к задаче Шварца, сингулярный интегральный оператор и его свойства, сведение характеристического сингулярного интегрального уравнения к краевой задаче Римана, решение полного сингулярного интегрального уравнения, понятие индекса, понятие оператора);

- **должен уметь:** вычислять интегралы типа Коши. Уметь решать краевую задачу Римана, краевую задачу Гильберта и характеристическое сингулярное интегральное уравнение; вычислять индексы полных сингулярных интегральных уравнений.

- **должен владеть:** методами анализа граничных свойств простейших интегральных представлений, методами факторизации и регуляризации краевых задач, теории операторов Нетер;

- **должен демонстрировать способность и готовность:** квалифицированно обсуждать основные понятия и результаты по теории краевых задач (интеграл типа Коши и его граничные свойства, их использование при решении задачи о скачке, решение краевой задачи Римана методом факторизации на контурах различных типов, влияние особенностей коэффициентов на разрешимость краевой задачи Римана, преобразование Гильберта и его свойства, решение задачи Шварца, решение краевой задачи Гильберта путем редукции к задаче Шварца, сингулярный интегральный оператор и его свойства, сведение характеристического сингулярного интегрального уравнения к краевой задаче Римана, решение полного сингулярного интегрального уравнения, понятие индекса, понятие оператора Нетер);

- **вычислять** интегралы типа Коши, уметь решать краевую задачу Римана, краевую за-

дачу Гильберта и характеристическое сингулярное интегральное уравнение, индексы полных сингулярных интегральных уравнений;

- **понимать место и роль** теории краевых задач для аналитических функций в современной математике и иметь представление о ее связи с другими разделами математики, в том числе уравнениями с частными производными, геометрией, топологией, алгеброй, функциональным анализом; связь краевых задач для аналитических функций с гидро- и аэродинамикой, теорией упругости, физикой и другими прикладными науками;

- **владеть аппаратом** краевых задач для аналитических функций при решении творческих задач, а также навыками самостоятельных исследований и уметь на основе полученных знаний составлять модели в прикладных науках, а также гибко владеть широким арсеналом методов, позволяющих эффективно решать соответствующие математические задачи;

- **уметь ориентироваться** в истории создания теории краевых задач для аналитических функций и владеть основными его методами; адекватно излагать полученные результаты и оформлять их в виде научных публикаций, применять полученные знания на практике.

В результате освоения дисциплины у обучающегося формируются компетенции:

Универсальные:

способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1);

готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);

Общепрофессиональные:

способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1).

Профессиональные:

способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в профессиональной области, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов (ПК-1);

способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях (ПК-2);

способность к преподаванию механико-математических дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов проведенных теоретических и экспериментальных исследований (ПК-3).

4. Структура и содержание дисциплины (модуля)

№	Раздел Дисциплины	Се- местр	Лекции	Практиче- ские заня- тия	Лаборатор- ные работы	Самостоя- тельная работа
1	Тема 1. Интеграл типа Коши и его свойства. Формула Племели - Сохоцкого. Задача о скачке.	4	4	4	0	12
2	Тема 2. Решение задачи Римана на замкнутых и разомкнутых контурах методом факторизации.	4	4	4	0	12
3	Тема 3. Преобразование Гильберта. Задача Шварца. Краевая задача Гильберта.	4	4	4	0	12
4	Тема 4. Сингулярный интегральный оператор. Сингулярные интегральные уравнения и их свойства.	4	4	4	0	12
5	Тема 5. Обобщенная краевая зада-	4	2	2	0	24

	ча Римана (ОКЗР). Теорема единственности. Решение ОКЗР для элементарных двухфазных структур.					
	ИТОГО		18	18	0	72

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Интеграл типа Коши и его свойства. Формула Племели - Сохоцкого. Задача о скачке.

Тема 2. . Решение задачи Римана на замкнутых и разомкнутых контурах методом факторизации.

Тема 3. Преобразование Гильберта. Задача Шварца. Краевая задача Гильберта.

Тема 4. Сингулярный интегральный оператор. Сингулярные интегральные уравнения и их свойства.

Тема 5. Обобщенная краевая задача Римана (ОКЗР). Теорема единственности. Решение ОКЗР для элементарных двухфазных структур.

5. Образовательные технологии

Курс лекций и практических занятий, организованных по стандартной технологии в интерактивной форме с живым диалогом между преподавателем и студентом. Использование мультимедийных средств и интернета.

В течение семестра аспиранты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому практическому занятию, делают самостоятельные доклады. Частично темы изучаются в форме творческой лаборатории, когда в работе принимают участие все аспиранты в коллективном обдумывании путей решения задач по вопросу, изложенному в лекции.

6. Учебно-методическое обеспечение для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН КУРСА

Тема 1. Интеграл типа Коши и его свойства. Формула Племели - Сохоцкого. Задача о скачке.

лекционное занятие

Интеграл типа Коши и его свойства. Формула Племели - Сохоцкого. Задача о скачке.

практическое занятие

Вычисление интегралов типа Коши и сингулярных интегралов с ядром Коши, в том числе с помощью формулы Племели - Сохоцкого. Решение задачи о скачке.

Тема 2. Решение задачи Римана на замкнутых и разомкнутых контурах методом факторизации.

лекционное занятие

Решение задачи Римана на замкнутых и разомкнутых контурах методом факторизации.

практическое занятие

Решение однородной задачи Римана на замкнутых и разомкнутых контурах. Решение неоднородной задачи Римана на замкнутых и разомкнутых контурах методом факторизации.

Тема 3. Преобразование Гильберта. Задача Шварца. Краевая задача Гильберта.

лекционное занятие

Преобразование Гильберта. Задача Шварца. Краевая задача Гильберта.

практическое занятие

Вычисление сингулярных интегралов с ядром Гильберта. Преобразование Гильберта. Решение задачи Шварца. Решение краевой задачи Гильберта.

Тема 4. Сингулярный интегральный оператор. Сингулярные интегральные уравнения и их свойства.

лекционное занятие

Сингулярный интегральный оператор. Сингулярные интегральные уравнения и их свойства.

практическое занятие

Решение характеристических сингулярных интегральных уравнений. Решение некоторых типов

полных сингулярных интегральных уравнений.

Тема 5. Обобщенная краевая задача Римана (ОКЗР).

лекционное занятие

Решение ОКЗР для эллипса в классе кусочно-мероморфных функций с фиксированной главной частью.

практическое занятие

Решение ОКЗР для круга – обобщенная теорема Милн-Томсона.

7. Фонд оценочных средств

7.1. Регламент дисциплины

Оценка «отлично»

Оценка "отлично" ставится аспирантам, которые:

- решили не менее 13 задач из домашних заданий;
- полностью справились с задачами контрольных работ;
- при ответе на зачете демонстрируется владение понятийным аппаратом и глубокое знание программного материала, ответ излагается логично, последовательно и не требует дополнительных пояснений.

Оценка «хорошо»

Оценка "хорошо" ставится аспирантам, которые:

- решили не менее 10 задач из домашних заданий;
- справились с задачами контрольной работы, допускаются незначительные неточности;
- при ответе на зачете демонстрируется владение понятийным аппаратом и твёрдое знание программного материала, допускают отдельные погрешности и неточности при ответе.

Оценка «удовлетворительно»

Оценка "удовлетворительно" ставится аспирантам, которые:

- решили не менее 8 задач из домашних заданий;
- справились с 1 задачей в контрольной работе;
- при ответе на зачете демонстрируется владение понятийным аппаратом и минимальное знание программного материала, необходимое для предстоящей научно-исследовательской работы.

7.2. Оценочные средства текущего контроля

Тема 1. Интеграл типа Коши и его свойства. Формула Племели - Сохоцкого. Задача о скачке.

домашнее задание, примерные вопросы:

Вычисление интегралов типа Коши и сингулярных интегралов с ядром типа Коши. Формула Племели - Сохоцкого. Задача о скачке.

Тема 2. Решение задачи Римана на замкнутых и разомкнутых контурах методом факторизации.

домашнее задание, примерные вопросы:

Решение однородной задачи Римана на замкнутых и разомкнутых контурах. Решение неоднородной задачи Римана на замкнутых и разомкнутых контурах методом факторизации.

Тема 3. Преобразование Гильберта. Задача Шварца. Краевая задача Гильберта.

домашнее задание, примерные вопросы:

Вычисление сингулярных интегралов с ядром Гильберта. Решение задачи Шварца и краевой задачи Гильберта.

Тема 4. Сингулярный интегральный оператор. Сингулярные интегральные уравнения и их свойства.

домашнее задание, примерные вопросы:

Решение характеристических сингулярных интегральных уравнений и некоторых классов полных сингулярных интегральных уравнений.

Тема 5. . Обобщенная краевая задача Римана

домашнее задание, примерные вопросы:

Решение ОКЗР для параболического включения в классе кусочно-мероморфных функций с фиксированной главной частью.

Пример письменной работы.

1. Решить краевую задачу: $\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t) + \frac{2t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}$, если

$$i, 2i \in D^+, \quad -i, -2i \in D^-$$

2. Решить характеристическое СИУ: $(t^2 - 2)\varphi(t) + \frac{3t}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \frac{2t}{t^2 + 1}$, если

$$i, 2i \in D^+, \quad -i, -2i \in D^-$$

Итоговая форма контроля

7.3. Вопросы к зачету

Примерные вопросы к зачету: все виды текущего контроля успеваемости и аттестации по итогам освоения дисциплины оцениваются по 100-балльной рейтинговой системе, принятой к КФУ.

1. Интеграл типа Коши, достаточное условие существования главного значения интеграла типа Коши.
2. Задача об аналитической продолжимости функции, заданной на замкнутом простом контуре, в области D .
3. Формула перестановки Пуанкаре-Бертрана.
4. Обращение сингулярного интеграла с ядром Коши в случае замкнутого контура. Формулы обращения Гильберта.
5. Поведение интеграла типа Коши в окрестности конечных точек контура интегрирования.
6. Интеграл типа Коши по прямой.
7. Задача Римана для одного простого гладкого замкнутого контура. Понятие индекса. Задача о скачке.
8. Построение канонической функции. Решение однородной и неоднородной задач.
9. Решение задачи Римана для одного простого разомкнутого контура.
10. Краевая задача Римана для конечного числа гладких контуров.
11. Краевая задача Римана в случае произвольной кусочно-гладкой линии с конечным числом точек пересечения и разрывными коэффициентами.
12. Решение задачи обращения интеграла типа Коши в случае, когда все компоненты контура замкнуты.
13. Решение задачи обращения в общем случае.
14. Краевая задача Римана для полуплоскости.
15. Интегральные уравнения с ядром Коши. Решение характеристического уравнения и союзного с ним.
16. Регуляризация полного уравнения. Теоремы Нетера.
17. Сингулярные интегральные уравнения в случае кусочно-гладкой линии интегрирования и разрывных коэффициентов.
18. Решение характеристического уравнения и союзного с ним.
19. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Гильберта.
20. Сингулярные интегральные уравнения, содержащие комплексно сопряженные неизвестные.
21. Постановка задач Дирихле, Шварца и Гильберта. Оператор Шварца. Решение задачи Шварца.
22. Решение задачи Гильберта. Метод регуляризующего множителя.
23. Решение задачи Гильберта для круга и плоскости методом симметрии.
24. Сведение ОКЗР в случае гиперболического включения к задаче о «клине».

7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции для данной дисциплины	Оценочное средство

УК-1	способностью к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	Способность к самостоятельному изучению и разбору литературы для подготовки к зачету.	Вопросы к зачету №1-24
ОПК-1	способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Способность использования метода разрешения.	Вопросы к зачету №11,24.
ПК-1	Способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в области математики и механики, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов.	Освоение основных свойств интеграла типа Коши при доказательстве формулы перестановки Пуанкаре-Бертрана	Вопрос к зачету №3
ПК-2	Способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях	Способность приводить строгое математическое доказательство утверждений в области теории краевых задач теории аналитических функций	Вопросы к зачету №1-24
ПК-3	Способность к преподаванию механико-математических дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов проведенных теоретических и экспериментальных исследований	Всестороннее и глубокое понимание изучаемой дисциплины.	Вопросы к зачету №21-23.

8. Методические указания для обучающихся при освоении дисциплины (модуля)

Вначале необходимо изучить теоретическую часть, рассказанную на лекции. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса и формулировки основных теорем. После лекции проводится практическое занятие, на котором разбирается изложенный на лекции материал и решаются задачи по теме лекции. После практического занятия в качестве самостоятельной работы следует выполнить письменное домашнее задание. При этом студенты должны использовать основные понятия и теоремы как текущей, так и предыдущих лекций. Выполненное письменное домашнее задание должно быть сдано преподавателю перед началом следующего практического занятия. Также при освоении дисциплины аспирантам необходимо выполнить контрольную работу. Первая задача контрольной работы по темам 1-3, вторая задача по темам 4,5.

9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

9.1. Основная литература

1. И.И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. Санкт-Петербург: Лань, 2009. - 432 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=322
2. Математические основы обратных краевых задач: учеб. пособие к курсу "Обратные краевые задачи механики жидкости и газа" / Н. Б. Ильинский, Д. Ф. Абзалилов; Казан. гос. ун-т, Мех.-мат. фак. Казань: [КГУ], 2005.; Ч. 1. 2005. 55 с.
3. Обносов Ю.В. Краевые задачи теории гетерогенных сред. – Казань: Каз. гос. ун-т, 2009. -205с.
4. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи. - М.: Физматлит, 2005. - 720 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2745
5. Карчевский, Михаил Миронович. Математические модели механики сплошной среды : учеб. пособие / М.М. Карчевский, Р.Р. Шагидуллин . Казань : Казан. гос. ун-т, 2007 . 211 с. : ил. ; 20 . Предм. указ.: с. 207-209 . Библиогр.: с. 210-211 (26 назв.) .? ISBN 5-98180-355-X, 250.

9.2 Дополнительная литература

1. Теория функций комплексной переменной: учебник для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. Издание 6-е, стереотипное. Москва: Физматлит, 2010. 336 с.
2. Теория функций комплексной переменной: учебник для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. Издание 6-е, стереотипное. Москва: Физматлит, 2010. 336 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=48167
3. Треногин В. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М. Физматлит, 2009, 312с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2341

9.3. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. М.А. Евграфов Аналитические функции - http://lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=45&pl1_id=134
2. И.Б. Симоненко, Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана - http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=2509&option_lang=rus
3. А.И Маркушевич, Теория аналитических функций т.2 - http://lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=45&pl1_id=252
4. И.И. Привалов Введение в теорию функций комплексного переменного - http://lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=45&pl1_id=322
5. Ф.Д. Гахов, Краевая задача Римана для системы функций. - http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=8344&option_lang=rus

10. Материально-техническое и программное обеспечение дисциплины (модуля)

Аудитория, оснащенная мультимедийным оборудованием вместимостью до 15 человек, компьютерный класс на 10 рабочих мест с выходом в интернет, принтер, проектор, экран, ноутбук.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО аспирантуры (Приказ Минобрнауки РФ от 30.07.2014 № 866)

Автор: профессор Ю.В.Обносов

Рецензенты: профессор Б.А. Кац, профессор С.Р. Насыров

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института математики и механики КФУ от 29 августа 2015 года, протокол № 11.