ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 5 (492)

УДК 517.9:518

П.Г. ДАНИЛАЕВ

СРАВНЕНИЕ ДВУХ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается условно-корректная задача нахождения младшего коэффициента уравнения параболического типа, который не зависит от времени. Ранее для ее решения использовался метод квазиобращения. В статье формулируется вариационная постановка задачи. Для ее решения предлагается использовать метод регуляризации. Доказана теорема о том, что в частном случае алгоритм регуляризации сводится к исследованию соответствующей задачи квазиобращения. Как следствие этого при продолжении решения уравнения параболического типа, когда переопределенные краевые условия заданы на всей границе, задача квазиобращения совпадает с частным случаем регуляризованной вариационной задачи.

1. *Постановка задачи определения младшего коэффициента в уравнении параболического типа.* Пусть неизвестен коэффициент $q(x)$ при младшем члене уравнения параболического типа

$$u_t - u_{xx} = q(x)u. \tag{1.1}$$

Следуя работам [1]–[4], задачу об определении этого коэффициента сформулируем как коэффициентную обратную ([5], с. 16): определить вектор-функцию $\{q(x), u(x,t)\}$ из условий

$$\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} = q(x)u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;\\
&u(0,t) = f_0(t), \qquad u_x(0,t) = f_1(t),\\
&u(1,t) = g_0(t), \qquad u_x(1,t) = g_1(t), \quad t > 0;\\
&u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le 1.
\end{aligned}$$

Преобразуем уравнение (1.1) к виду, не содержащему коэффициента $q(x)$. Для этого разрешим уравнение (1.1) относительно $q(x)$ и затем, учитывая, что $q_t = 0$, результат продифференцируем по переменной t

$$\begin{gathered}
q = (u_t - u_{xx})/u,\\
u_{tt}u - u_{xxt}u - u_t^2 + u_{xx}u_t = 0.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

В уравнении (1.2) перейдем от функции $u(x,t)$ к новой неизвестной функции $v = u_t/u$. Учитывая соотношения

$$\frac{u_{tt}}{u} = v^2 + v_t, \quad \frac{u_{xxt}}{u} = \frac{u_{xx}}{u}v + 2\frac{u_x}{u}v_x + v_{xx}, \quad \frac{u_x}{u} = \int_0^t v_x dt + \frac{u_{0x}}{u_0},$$

приходим к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения с соответствующим набором дополнительных условий

$$\begin{gathered}
v_t - v_{xx} = 2v_x\left[\int_0^t v_x(x,t)dt + \frac{u_{0x}}{u_0}\right], \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;\\
v(0,t) = \eta_0(t), \quad v_x(0,t) = \eta_1(t),\\
v(1,t) = \mu_0(t), \quad v_x(1,t) = \mu_1(t), \quad t > 0;
\end{gathered} \tag{1.3}$$

начальное условие $v(x,0)$ не задается. Задача в постановке (1.3), содержащей переопределенный набор краевых условий, является условно-корректной. После решения задачи (1.3) коэффициент $q(x)$ определяется по формуле

$$q(x) = v - \left(\int_0^t v_x dt\right)^2 + \frac{2u_{0x}}{u_0}\int_0^t v_x dt + \int_0^t v_{xx} dt + \frac{u_{0xx}}{u_0}.$$

Итак, коэффициентная обратная задача сведена к задаче (1.3) о продолжении решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Вопрос задания переопределенных краевых условий на всей границе области решения при исследовании задачи о продолжении решения уравнения параболического типа рассматривался в [6], где авторы исследуют устойчивость решений обратных задач с помощью оценок Карлемана. Но в отличие от [7] они получают оценки устойчивости как для "полного", так и для "неполного" набора исходных данных, используя новые оценки Карлемана [8]. Принципиальная разница состоит в том, что в [7] предполагается $t \in (-T;T)$, тогда как в [6] допускается существование решения параболического уравнения для $t \in (0;T)$.

2. *Постановка вариационной задачи.* Ранее [5] задача (1.3) решалась методом квазиобращения ([9], с. 275). Сформулируем вариационную постановку задачи ([10], с. 453): определить функцию $v(x,t)$, доставляющую минимум функционалу (невязке уравнения)

$$\int_0^t \int_0^1 \left(v_t - v_{xx} - 2v_x\left(\int_0^t v_x(x,t)dt + \frac{u_{0x}}{u_0}\right)\right)^2 dx\, dt \tag{2.1}$$

и удовлетворяющую переопределенному набору граничных условий

$$\begin{aligned} &v(0,t) = \eta_0(t), \quad v_x(0,t) = \eta_1(t), \\ &v(1,t) = \mu_0(t), \quad v_x(1,t) = \mu_1(t), \quad t > 0; \end{aligned} \tag{2.2}$$

начальное условие $v(x,0)$ не задается. Ввиду нелинейности уравнения задачи (1.3) будем рассматривать дифференциальный оператор следующим образом:

$$Pv = \overset{k}{v}_t - \overset{k}{v}_{xx} - 2\overset{k}{v}_x\left(\int_0^t \overset{k-1}{v}_x dt + \frac{u_{0x}}{u_0}\right), \tag{2.3}$$

где k — номер итерации.

Для решения задачи воспользуемся методом регуляризации ([11], с. 53). Заменим функционал (2.1), входящий в постановку задачи, минимизирующим функционалом

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_0^1 \left(\overset{k}{\widetilde{v}}_t - \overset{k}{\widetilde{v}}_{xx} - 2\overset{k}{\widetilde{v}}_x\left(\int_0^t \overset{k-1}{\widetilde{v}}_x(x,t)dt + \frac{u_{0x}}{u_0}\right)\right)^2 dx\, dt + \alpha \int_0^t \int_0^1 \Big(k_0(x,t)\overset{k}{\widetilde{v}}{}^2 + \\ &\quad + k_{01}(x,t)\overset{k}{\widetilde{v}}{}^2_t + k_{10}(x,t)\overset{k}{\widetilde{v}}{}^2_x + k_{20}(x,t)\overset{k}{\widetilde{v}}{}^2_{xx} + k_{11}(x,t)\overset{k}{\widetilde{v}}{}^2_{xt} + k_{02}(x,t)\overset{k}{\widetilde{v}}{}^2_{tt}\Big) dx\, dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Сглаживающий функционал (стабилизатор) введем так, чтобы набор дополнительных условий для уравнения Эйлера, составленного как условие минимума функционала, не был переопределенным. Выберем весовые коэффициенты $k_0(x,t)$, $k_{01}(x,t)$, $k_{10}(x,t)$, $k_{11}(x,t)$, $k_{20}(x,t)$, $k_{02}(x,t)$ как постоянные величины. Введем, как обычно, класс допустимых функций и, решив вариационную задачу, запишем уравнение Эйлера вместе с соответствующим набором граничных условий, дополнив его естественными граничными условиями. В результате приходим к решению краевой задачи

$$(1+\alpha k_{20})\overset{k}{\tilde{v}}_{x^{(4)}}+\alpha k_{02}\overset{k}{\tilde{v}}_{t^{(4)}}+\alpha k_{11}\overset{k}{\tilde{v}}_{x^{(2)}t^{(2)}}+[2(B-2A^2)-\alpha k_{10}]\overset{k}{\tilde{v}}_{x^{(2)}}+$$
$$+4A\overset{k}{\tilde{v}}_{xt}+2\overset{k}{\tilde{v}}_x\overset{k-1}{\tilde{v}}_x-(1+\alpha k_{01})\overset{k}{\tilde{v}}_{t^{(2)}}+2(C-4AB)\overset{k}{\tilde{v}}_x+2B\overset{k}{\tilde{v}}_t+\alpha k_0\overset{k}{\tilde{v}}=0,$$
$$\overset{k}{\tilde{v}}(0,t)=\eta_0(t),\quad \overset{k}{\tilde{v}}_x(0,t)=\eta_1(t),\quad \overset{k}{\tilde{v}}_{xt}(0,t)=0,\quad t>0;$$
$$\overset{k}{\tilde{v}}(1,t)=\mu_0(t),\quad \overset{k}{\tilde{v}}_x(1,t)=\mu_1(t),\quad \overset{k}{\tilde{v}}_{xt}(1,t)=0,\quad t>0;$$
$$\overset{k}{\tilde{v}}_{xxt}(x,0)=0,\quad \overset{k}{\tilde{v}}_{t^{(3)}}(x,0)=0,\quad \overset{k}{\tilde{v}}_{tt}(x,0)=0,$$
$$(1+\alpha k_{01})\overset{k}{\tilde{v}}_t(x,0)-\overset{k}{\tilde{v}}_{xx}(x,0)-2\overset{k}{\tilde{v}}_x\frac{u_{0x}}{u_0}=0,\quad 0\le x\le 1;$$
$$\overset{k}{\tilde{v}}_{xxt}(x,T)=0,\quad \overset{k}{\tilde{v}}_{t^{(3)}}(x,T)=0,\quad \overset{k}{\tilde{v}}_{tt}(x,T)=0,$$
$$(1+\alpha k_{01})\overset{k}{\tilde{v}}_t(x,T)-\overset{k}{\tilde{v}}_{xx}(x,T)-2A\overset{k}{\tilde{v}}_x(x,T)=0,\quad 0\le x\le 1;$$

где

$$A=\int_0^t\overset{k-1}{\tilde{v}}_x dt+\frac{u_{0x}}{u_0},\qquad B=\int_0^t\overset{k-1}{\tilde{v}}_{xx}dt+\frac{u_{0xx}}{u_0}-\Big(\frac{u_{0x}}{u_0}\Big)^2,$$
$$C=2\Big(\overset{k}{\tilde{v}}_{x^{(4)}}+2(B-2A^2)\overset{k}{\tilde{v}}_{x^{(2)}}+2(C-4AB)\overset{k}{\tilde{v}}_x+2B\overset{k}{\tilde{v}}_t+2\big(2A+\overset{k-1}{\tilde{v}}_x\big)\overset{k}{\tilde{v}}_{xt}-\overset{k}{\tilde{v}}_{t^{(2)}}\Big).$$

При численном решении задачи функция $\overset{k}{\tilde{v}}$ и ее производные, образующие нелинейность в формуле для вычисления коэффициента C, заменяются значениями функции $\overset{k-1}{\tilde{v}}$ и ее производными с предыдущей итерации, как это обычно делается при решении нелинейных уравнений.

3. *Сравнение регуляризованной задачи с задачей квазиобращения.*

Теорема 1. *Пусть в функционале* (2.4) *вариационной задачи* (2.4), (2.2) $k_0=k_{10}=k_{02}=k_{11}=k_{20}=0$, $k_{01}=\text{const}$. *Тогда задача квазиобращения является частным случаем регуляризованной вариационной задачи.*

Доказательство. Задача квазиобращения, соответствующая исходной, записывалась в виде [5]

$$-(1+\varepsilon_1\varepsilon_2)\tilde{\tilde{v}}_{tt}+\tilde{\tilde{v}}_{x^{(4)}}-\varepsilon_1\tilde{\tilde{v}}_{xx}+\varepsilon_1\tilde{\tilde{v}}_t=-f_t(x,t)-f_{xx}(x,t)+\varepsilon_1 f(x,t),\tag{3.1}$$
$$\tilde{\tilde{v}}(0,t)=\eta_0(t),\quad \tilde{\tilde{v}}_x(0,t)=\eta_1(t),$$
$$\tilde{\tilde{v}}(1,t)=\mu_0(t),\quad \tilde{\tilde{v}}_x(1,t)=\mu_1(t),\quad t>0;$$
$$(1+\varepsilon_1\varepsilon_2)\tilde{\tilde{v}}_t(x,0)-\tilde{\tilde{v}}_{xx}(x,0)-f(x,0)-\varepsilon_1\tilde{\tilde{v}}(x,0)=\varepsilon_1(v_0^*(x)-v_0(x)),$$

где $v_0^*(x)$ задается произвольно, в частном случае $v_0^*(x)=v_0(x)$;

$$(1+\varepsilon_1\varepsilon_2)\tilde{\tilde{v}}_t(x,T)-\tilde{\tilde{v}}_{xx}(x,T)-f(x,T)=0.$$

При построении уравнения (3.1) нелинейный дифференциальный оператор $Pv=v_t-v_{xx}-2v_x\Big(\int\limits_0^t v_x dt+\frac{u_{0x}}{u_0}\Big)$ рассматривался следующим образом:

$$Pv=\overset{k}{v}_t-\overset{k}{v}_{xx}-2\overset{k-1}{v}_x\Big(\int_0^t\overset{k-1}{v}_x dt+\frac{u_{0x}}{u_0}\Big).\tag{3.2}$$

Здесь всюду $\widetilde{\widetilde{v}} = \overset{k}{\widetilde{\widetilde{v}}}$, $f(x,t) = 2\overset{k-1}{\widetilde{\widetilde{v}}}_x\Big(\int\limits_0^t \overset{k-1}{\widetilde{\widetilde{v}}}_x dt + \frac{u_{0x}}{u_0}\Big)$. Учитывая, что $Pv = 0$, можно приближенно принять $-\varepsilon_1\widetilde{\widetilde{v}}_{xx} + \varepsilon_1\widetilde{\widetilde{v}}_t = \varepsilon_1 f(x,t)$ и записать уравнение (3.1) следующим образом:

$$-(1+\varepsilon_1\varepsilon_2)\widetilde{\widetilde{v}}_{tt} + \widetilde{\widetilde{v}}_{x^{(4)}} = -f_t(x,t) - f_{xx}(x,t). \tag{3.3}$$

Сравним регуляризованную задачу с задачей квазиобращения. Если в функционале (2.4) положить $k_0 = k_{10} = k_{11} = 0$, т. е. выбрать стабилизатор в виде

$$\Omega[\widetilde{v}(x,t)] = \int_0^t\int_0^1 \Big(k_{01}(x,t)\overset{k}{\widetilde{v}}{}_t^2 + k_{20}(x,t)\overset{k}{\widetilde{v}}{}_{xx}^2\Big)dx\,dt,$$

и рассматривать оператор Pv в виде (3.2) вместо (2.3), то приходим к следующей регуляризованной задаче:

$$-(1+\alpha k_{01})\overset{k}{\widetilde{v}}_{t^{(2)}} + (1+\alpha k_{20})\overset{k}{\widetilde{v}}_{x^{(4)}} = -f_t(x,t) - f_{xx}(x,t), \tag{3.4}$$

$$\overset{k}{\widetilde{v}}(0,t) = \eta_0(t), \quad \overset{k}{\widetilde{v}}_x(0,t) = \eta_1(t), \quad t > 0;$$

$$\overset{k}{\widetilde{v}}(1,t) = \mu_0(t), \quad \overset{k}{\widetilde{v}}_x = \mu_1(t), \quad t > 0;$$

$$(1+\alpha k_{01})\overset{k}{\widetilde{v}}_t(x,0) - \overset{k}{\widetilde{v}}_{xx}(x,0) - f(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1; \quad f(x,0) = 2\overset{k-1}{\widetilde{v}}_x(x,0)\frac{u_{0x}}{u_0};$$

$$(1+\alpha k_{01})\overset{k}{\widetilde{v}}_t(x,T) - \overset{k}{\widetilde{v}}_{xx}(x,T) - f(x,T) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

Если же еще принять $k_{20} = 0$, то уравнение (3.4) примет вид

$$-(1+\alpha k_{01})\overset{k}{\widetilde{v}}_{t^{(2)}} + \overset{k}{\widetilde{v}}_{x^{(4)}} = -f_t(x,t) - f_{xx}(x,t). \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) примем за основу при численном решении регуляризованной вариационной задачи.

Сравним задачу квазиобращения для уравнения (3.3) и регуляризованную задачу для уравнения (3.5). Уравнения (3.3), (3.5) формально совпадают. В уравнении (3.5) аналогом параметра ε_1 является параметр регуляризации α, а место параметра ε_2 занял весовой коэффициент k_{01}. Ту же аналогию дает и сравнение условий при $t = T$. Краевые условия при $x = 0$ и $x = 1$ совпадают. Сравним начальное условие для регуляризованной вариационной задачи

$$(1+\alpha k_{01})\overset{k}{\widetilde{v}}_t(x,0) - \overset{k}{\widetilde{v}}_{xx}(x,0) - f(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{3.6}$$

и для задачи квазиобращения

$$(1+\varepsilon_1\varepsilon_2)\widetilde{\widetilde{v}}_t(x,0) - \widetilde{\widetilde{v}}_{xx}(x,0) - f(x,0) - \varepsilon_1\widetilde{\widetilde{v}}(x,0) = \varepsilon_1(v_0^*(x) - v_0(x)), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3.7}$$

где $f(x,0) = 2\overset{k-1}{\widetilde{v}}_x(x,0)\frac{u_{0x}}{u_0}$. Если в (3.7) положить $v_0^*(x) = v_0(x)$, то для этих условий можно провести такую же аналогию, но условие (3.7) для задачи квазиобращения содержит дополнительное слагаемое. Если в (3.7) принять

$$v_0^*(x) = v_0(x) - \widetilde{\widetilde{v}}(x,0), \tag{3.8}$$

то оно совпадет с условием (3.6). Равенство (3.8) означает, что выбор начального условия $v_0^*(x)$ меняется в процессе решения задачи. К такому же результату мы приходим, рассматривая условие (3.7) в пределе при $\varepsilon_1 \to 0$. $\square$

Рассмотрим *частный случай* теоремы 1. При исследовании коэффициентной обратной задачи как частный случай возникает задача о продолжении решения уравнения параболического типа, когда переопределенные краевые условия задаются на всей границе:

$$v_t - v_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{3.9}$$

$$v(0,t) = \eta_0(t), \quad v_x(0,t) = \eta_1(t), \quad t > 0; \tag{3.10}$$

$$v(1,t) = \mu_0(t), \quad v_x(1,t) = \mu_1(t), \quad t > 0. \tag{3.11}$$

Эта задача следует из (1.3) при $f(x,t) = 2v_x\Big(\int\limits_0^t v_x dt + \frac{u_{0x}}{u_0}\Big) \equiv 0$. В этом предположении легко выписываются соответствующие задачи квазиобращения и вариационная с регуляризацией. Из их сравнения следует

Теорема 2 (следствие теоремы 1). *Пусть функция* $\overline{v}(x,t)$ *доставляет минимум функционалу*

$$\int_0^t \int_0^1 (\overline{v}_t - \overline{v}_{xx})^2 dx\, dt + \alpha \int_0^t \int_0^1 (k_0(x,t)\overline{v}^2 + k_{01}(x,t)\overline{v}_t^2 +$$
$$+ k_{10}(x,t)\overline{v}_x^2 + k_{20}(x,t)\overline{v}_{xx}^2 + k_{11}(x,t)\overline{v}_{xt}^2 + k_{02}(x,t)\overline{v}_{tt}^2) dx\, dt$$

и удовлетворяет условиям (3.10), (3.11). *Пусть в сглаживающем функционале весовые коэффициенты* $k_0 = k_{10} = k_{02} = k_{11} = k_{20} = 0$, $k_{01} = \mathrm{const}$. *Тогда регуляризованная вариационная задача и задача квазиобращения, соответствующие задаче* (3.9)–(3.11), *совпадают.*

4. *Результаты численного решения тестовой задачи.* Для оценки эффективности предложенного алгоритма решения КОЗ методом квазиобращения в [5] была построена следующая модельная задача:

$$u_t - u_{xx} = xu, \quad (x,t) \in (0;1) \times (0;T],$$
$$u(0,t) = \exp(t^3/3), \quad u_x(0,t) = t\exp(t^3/3), \quad t > 0;$$
$$u(1,t) = \exp(t + t^3/3), \quad u_x(1,t) = t\exp(t + t^3/3), \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 1, \quad x \in [0;1].$$

Она имеет точное аналитическое решение $u(x,t) = \exp(xt + t^3/3)$.

Вспомогательная функция $v(x,t)$ является решением задачи

$$v_t - v_{xx} = 2v_x \int_0^t v_x dt, \quad (x,t) \in (0;1) \times (0;T];$$
$$v(0,t) = t^2, \quad v_x(0,t) = 1, \quad t \in (0;T];$$
$$v(1,t) = 1 + t^2, \quad v_x(1,t) = 1, \quad t \in (0;T];$$
$$v(x,0) = x, \quad x \in [0;1],$$

точное решение которой $v(x,t) = x + t^2$. Запишем соответствующую регуляризованную задачу

$$-(1 + \alpha k_{01})\overset{k}{\widetilde{v}}_{t^{(2)}} + (1 + \alpha k_{20})\overset{k}{\widetilde{v}}_{x^{(4)}} = -f_t(x,t) - f_{xx}(x,t),$$

где

$$f(x,t) = 2\,\overset{k-1}{\widetilde{\widetilde{v}}}_x \int_0^t \overset{k-1}{\widetilde{\widetilde{v}}}_x dt, \quad (x,t) \in (0;1) \times (0;T];$$
$$\overset{k}{\widetilde{v}}(0,t) = t^2, \quad \overset{k}{\widetilde{v}}_x(0,t) = 1, \quad t \in (0;T];$$
$$\overset{k}{\widetilde{v}}(1,t) = 1 + t^2, \quad \overset{k}{\widetilde{v}}_x(1,t) = 1, \quad t \in (0;T];$$

$$(1+\alpha k_{01})\overset{k}{\widetilde{v}}_t(x,0)-\overset{k}{\widetilde{v}}_{xx}(x,0)-f(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1;\quad f(x,0)=0; \tag{4.1}$$
$$(1+\alpha k_{01})\overset{k}{\widetilde{v}}_t(x,T)-\overset{k}{\widetilde{v}}_{xx}(x,T)-f(x,T)=0,\quad 0\le x\le 1.$$

Для задачи квазиобращения аналог условия (4.1) имеет вид

$$(1+\varepsilon_1\varepsilon_2)\widetilde{\widetilde{v}}_t(x,0)-\widetilde{\widetilde{v}}_{xx}(x,0)-f(x,0)-\varepsilon_1\widetilde{\widetilde{v}}(x,0)=\varepsilon_1(v_0^*(x)-v_0(x)),$$

где начальное условие $v_0^*(x)$ при проведении числовых расчетов в [5] полагалось $v_0^*(x)-v_0(x)=0$, т. е. $v_0^*(x)=x$.

Для нахождения численного решения тестового примера методом квазиобращения использовался метод матричной прогонки ([12], с. 103) с итерациями. При $T\le 10^{-2}$, $\varepsilon_1\in[0,8;\,1]$, $\varepsilon_2=10^{-3}$ найденное значение коэффициента $q(x)$ практически совпадает с теоретическим. Необходимое число итераций составляло 5–8. В данные исходной задачи вносились и ошибки, относительная величина которых в норме C^2 составляла до 5%. Они почти не влияли на результат. Но при $T\ge 0,1$ точность восстановления q резко ухудшается в связи с нелинейностью задачи. Результаты многочисленных расчетов представлены в [5] графически.

Выводы. В работе показано, что при специальном выборе сглаживающего функционала (стабилизатора) решение коэффициентной обратной задачи в вариационной постановке сводится к той же начально-краевой задаче, к которой сводится решение коэффициентной обратной задачи методом квазиобращения.

Литература

1. Клибанов М.В. *Единственность решения двух обратных задач для системы Максвелла* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26. – № 7. – С. 1063–1071.
2. Клибанов М.В. *Обратные задачи в “целом” и карлемановские оценки* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 6. – С. 1035–1041.
3. Клибанов М.В. *Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 11. – С. 1947–1953.
4. Клибанов М.В., Данилаев П.Г. *О решении коэффициентных обратных задач методом квазиобращения* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 310. – № 3. – С. 528–532.
5. Данилаев П.Г. *Коэффициентные обратные задачи для уравнений параболического типа и их приложения.* – Казань: УНИПРЕСС, 1998. – 128 с.
6. Imanuvilov O.Ju., Yamamoto M. *Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate* // Inverse Problems. – 1998. – V. 14. – P. 1229–1245.
7. Klibanov M.V. *Inverse problems and Carleman estimates* // Inverse Problems. – 1992. – V. 8. – P. 575–596.
8. Fursikov A.V., Imanuvilov O.Ju. *Controllability of evolution equations* // Lectures Notes. – 1996. – V. 34. – Seoul, Korea: Seoul National University.
9. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. *Метод квазиобращения и его приложения.* – М.: Мир, 1970. – 336 с.
10. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – М.: Наука, 1970. – 512 с.
11. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1979. – 285 с.
12. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 590 с.

Казанский государственный технический университет

Поступила 01.06.2001