ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 6 (421)

УДК 513.881

С.Д. УМАЛАТОВ

ОБ ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ КЁТЕ, СВЯЗАННОМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Рассмотрим на полосе $\Pi = \{(x,y) \in R^2 : |x| < \infty,\ |y| \le 1\}$ дифференциальное уравнение

$$\alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\beta \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad (\alpha - \beta^2 > 0) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(x,y)\big|_{y=\pm 1} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pm 1} = 0. \tag{2}$$

Обозначим через U класс функций $u(x,y) \in C^4(\Pi)$, являющихся решениями уравнения (1) и удовлетворяющих краевым условиям (2).

Пусть $r \in N$ и функция $g_r(x) \in C^4(-\infty,\infty)$ такая, что

$$g_r(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le r+1; \\ 0, & |x| \ge r+2. \end{cases}$$

Тогда для любой функции $u(x,y) \in U$ функция $u_r(x,y) = u(x,y) g_r(x) \in C^4(\Pi)$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha \frac{\partial^4 u_r}{\partial x^4} + 2\beta \frac{\partial^4 u_r}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_r}{\partial y^4} = \varphi_r(x,y) \tag{3}$$

с краевыми условиями

$$u_r(x,y)\big|_{y=\pm 1} = \frac{\partial u_r}{\partial y}\Big|_{y=\pm 1} = 0, \tag{4}$$

где функция

$$\varphi_r(x,y) = 4\left(\alpha \frac{\partial^3 u_r}{\partial x^3} + \beta \frac{\partial^3 u_r}{\partial x \partial y^2}\right) g_r' + 2\left(3\alpha \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right) g_r'' + 4 \frac{\partial u_r}{\partial x} g_r''' + \alpha u_r g_r^{\mathrm{IV}}$$

равна нулю вне интервалов $r+1 < |x| < r+2$.

С помощью преобразований Фурье

$$u_r^*(y,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u_r(x,y) e^{-i\lambda x}\,dx, \quad \varphi_r^*(y,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(x,y) e^{-i\lambda x}\,dx$$

в силу (3)–(4) получаем краевую задачу

$$\frac{d^4 u_r^*}{dy^4} - 2\beta\lambda^2 \frac{d^2 u_r^*}{dy^2} + \alpha\lambda^4 u_r^* = \varphi_r^*, \tag{5}$$

$$u_r^*(y,\lambda)\big|_{y=\pm 1} = \frac{du_r^*(y,\lambda)}{dy}\Big|_{y=\pm 1} = 0. \tag{6}$$

Имеет место очевидная

Лемма 1. $\lambda = 0$ *не является собственным значением краевой задачи* (5)–(6).

Обозначим через $(\frac{r}{2}+i\frac{m}{2})$ $(r, m < 0)$ одно из комплексных чисел $\pm\sqrt{\beta \pm i\sqrt{\alpha - \beta^2}}$. Вычисления показывают, что собственные значения краевой задачи (5)–(6) задаются уравнением

$$m^2 \operatorname{sh}^2 r\lambda - r^2 \sin^2 m\lambda = 0. \tag{7}$$

Легко убедиться, что система из уравнения (7) и уравнения

$$\frac{d}{d\lambda}(m^2 \operatorname{sh}^2 r\lambda - r^2 \sin^2 m\lambda) = 0$$

не имеет решений, т. е. справедлива

Лемма 2. *Среди собственных значений краевой задачи* (5)–(6) *нет кратных.*

Лемма 3. *Если* λ — *собственное значение краевой задачи* (5)–(6), *то числа* $\overline{\lambda}$, $-\lambda$, $-\overline{\lambda}$ *также являются собственными значениями этой краевой задачи.*

Лемма 4. *Вещественных собственных значений краевая задача* (5)–(6) *не имеет.*

Доказательство. Достаточно показать, что нет собственных значений $\lambda > 0$. Пусть $\varphi(\lambda) = m \operatorname{sh} r\lambda - r \sin m\lambda$. Имеем $\varphi'(\lambda) = (m \operatorname{sh} r\lambda - r \sin m\lambda)' = mr(\operatorname{ch} r\lambda - \cos m\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$ и $\varphi(0) = 0$, следовательно, $m^2 \operatorname{sh}^2 r\lambda - r^2 \sin^2 m\lambda > 0$ при всех $\lambda > 0$. $\square$

Следствие. Чисто мнимых собственных значений краевая задача (5)–(6) не имеет.

Лемма 5. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $k(\varepsilon) \in N$ *такое, что при всех* $k > k(\varepsilon)$ *в* ε*-окрестности точки*

$$\lambda_k = \frac{1}{2(r+im)}\left[\ln\frac{r^2}{m^2} + i(2k+1)\pi\right] \tag{8}$$

существует ровно одно собственное значение краевой задачи (5)–(6), *причем в первой четверти комплексной плоскости при* $|\lambda| > |\lambda_{k(\varepsilon)}|$ *других собственных значений нет.*

Доказательство. Обозначим через $\psi(\lambda) = (m^2e^{2r\lambda}+r^2e^{-2im\lambda})+(m^2e^{-2r\lambda}+r^2e^{2im\lambda}-2(r^2+m^2))$ левую часть равенства (7). Пусть $h(\lambda) = m^2e^{2r\lambda}+r^2e^{-2im\lambda} = r^2e^{-2im\lambda}\Big(\frac{m^2}{r^2}e^{2(r+im)\lambda}+1\Big)$. Ясно, что $h(\lambda_k) = 0$. На окружности $\lambda = \lambda_k + \varepsilon e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$,

$$h(\lambda) = r^2e^{-2im(\lambda_k+\varepsilon e^{it})}(1 - e^{2(r+im)\varepsilon e^{it}}) = r^2e^{-2im(\lambda_k+\varepsilon e^{it})}(1 - e^{\varepsilon_1 e^{i(t+t_0)}}),$$

где $\varepsilon_1 = 2|r+im|\varepsilon$, $t_0 = \arg(r+im)$. Но $1-e^{\varepsilon_1 e^{i(t+t_0)}} \ne 0$ при $0 \le t \le 2\pi$, т.е. существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\left|\frac{m^2}{r^2}e^{2(r+im)\lambda}+1\right| \ge \delta$ на окружностях $|\lambda - \lambda_k| = \varepsilon$ для всех $k \in N$. Имеем

$$|r^2e^{-2im(\lambda_k+\varepsilon e^{it})}| \ge c|e^{-2im\lambda_k}|, \quad c > 0.$$

Очевидно, для любого $\gamma > 0$ найдется $k(\gamma)$ такое, что $|m^2e^{-2r\lambda}+r^2e^{2im\lambda}| < \gamma$ на всех окружностях $|\lambda - \lambda_k| = \varepsilon$ из первой четверти при $k > k(\gamma)$, т. е. $|\psi(\lambda) - h(\lambda)| < |h(\lambda)|$ на всех окружностях $|\lambda - \lambda_k| = \varepsilon$, начиная с некоторого $k(\varepsilon)$. Доказательство завершает применение теоремы Руше ([1], т. 1, с. 425). $\square$

В силу приведенных лемм мы можем обозначить собственные значения краевой задачи (5)–(6) через λ_{jn}, где j — номер четверти, в которой находится собственное значение, а n — номер собственного значения из j-й четверти.

Пусть $G(y, \eta, \lambda)$ — функция Грина краевой задачи (5)–(6). Из определения следует, что $G(y, \eta, \lambda)$ — мероморфная функция параметра λ с простыми полюсами в точках λ_{jn}, $j = \overline{1,4}$; $n \in N$, а также что справедлива следующая

Лемма 6. *Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $c(\varepsilon) > 0$ такое, что выполнено неравенство*

$$|G(y, \eta, \lambda)| \le c(\varepsilon)|\lambda|^{-3} \tag{9}$$

для всех $-1 \le y, \eta \le 1$ и $\{\lambda : |\lambda - \lambda'_{jn}| \ge \varepsilon\}$.

Лемма 7. *Имеет место разложение*

$$G(y, \eta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{4} \frac{G_{jn}(y, \eta)}{\lambda - \lambda_{jn}}, \tag{10}$$

и ряд справа сходится равномерно в области

$$\Omega = \{(y, \eta, \lambda) \in R^3 : -1 \le y, \eta \le 1,\ -\infty < \lambda < \infty\},$$

причем

$$G_{jn}(y, \eta) = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{jn}} G(y, \eta, \lambda) = b_{jn}(y)\overline{b}_{jn}(\eta), \tag{11}$$

где $b_{jn}(\cdot)$ — собственная функция краевой задачи (5)–(6), соответствующая собственному значению λ_{jn} и такая, что

$$\int_{-1}^{1} |b_{jn}(\eta)|^2 d\eta = 1.$$

Доказательство (ср. [3]). Так как по лемме 1 и лемме 4 среди собственных значений λ_{jn}, $j = \overline{1,4}$, $n \in N$, нет вещественных, то по теореме Миттаг-Леффлера ([1], т. 2, с. 296) имеет место разложение (10), сходящееся в каждой точке области Ω. Из оценки вычета функции $G(y, \eta, \lambda)$ относительно полюса λ_{jn} и леммы 5 имеем неравенство

$$|G_{jn}(y, \eta)| \le c_1|\lambda_{jn}|^{-3} \le c_2 n^{-3}, \tag{12}$$

и при вещественном λ в силу леммы 5 получаем, что

$$|\lambda - \lambda_{jn}| \ge c'_3|\lambda_{jn}| \ge c_3 n, \tag{13}$$

где $c_2, c_3 > 0$ не зависят от $n \in N$. Неравенства (12)–(13) обеспечивают равномерную сходимость ряда справа в (10).

Вторая часть леммы следует из свойств ([2], с.47) $G(y, \eta, \lambda)$. $\square$

Используя явный вид функции Грина, получаем оценку для производных

$$\left| \frac{\partial^k G_{jn}(y, \eta)}{\partial y^{k-m} \partial \eta^m} \right| \le c_4 |\lambda_{jn}|^{k-3} \le c_5 n^{k-3}, \quad c_5 > 0.$$

Лемма 8. *Решение краевой задачи (3)–(4) представимо на прямоугольнике $\Pi_r = \{(x, y) \in R^2 : |x| \le r,\ |y| \le 1\}$ в виде равномерно сходящегося вместе со всеми своими производными ряда*

$$u_r(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{4} c_{jn}(r) e^{i\lambda_{jn} x} b_{jn}(y),$$

где

$$c_{jn}(r) = \begin{cases} i \int_{-1}^{1} \overline{b}_{jn}(\eta) d\eta \int_{-r-2}^{-r-1} \varphi_r(\xi, \eta) e^{-i\lambda_{jn}\xi} d\xi, & j = 1, 2, \\ \\ -i \int_{-1}^{1} \overline{b}_{jn}(\eta) d\eta \int_{r+1}^{r+2} \varphi_r(\xi, \eta) e^{-i\lambda_{jn}\xi} d\xi, & j = 3, 4. \end{cases}$$

Доказательство. Так как $G(y,\eta,\lambda)$ — функция Грина краевой задачи (5)–(6), то при $\lambda \neq \lambda_{jn}$, в частности, при вещественном λ имеем

$$u_r^*(y,\lambda) = \int_{-1}^{1} G(y,\eta,\lambda)\varphi_r^*(\eta,\lambda)d\eta.$$

Применим к $u_r^*(y,\lambda)$ обратное преобразование Фурье и воспользуемся леммой 7. Получим

$$u_r(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{1}\int_{-r-2}^{r+2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4} G_{jn}(y,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)\frac{e^{i\lambda(x-\xi)}}{\lambda-\lambda_{jn}}d\xi\,d\eta\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4} M_{jn}(x,y,\lambda)d\lambda,$$

где

$$M_{jn}(x,y,\lambda) = \int_{-1}^{1}\int_{-r-2}^{r+2} G_{jn}(y,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)\frac{e^{i\lambda(x-\xi)}}{\lambda-\lambda_{jn}}d\xi\,d\eta.$$

Покажем, что

$$R_N(x,y) = \left(\int_{|\lambda|\le A} + \int_{|\lambda|>A}\right)\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{j=1}^{4} M_{jn}(x,y,\lambda)d\lambda = R_N^{(1)}(x,y) + R_N^{(2)}(x,y) \rightrightarrows 0$$

на Π_r при $N\to\infty$. В силу леммы 7 $R_N^{(1)}(x,y)\to 0$, $N\to\infty$, равномерно на Π_r. Оценим $R_N^{(2)}(x,y)$. Интегрируя $\int_{-r-2}^{r+2}\varphi_r(\xi,\eta)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi$ по частям, с учетом (12) и (13) получим

$$M_{jn}(x,y,\lambda) = \frac{1}{i\lambda}\int_{-1}^{1}\int_{-r-2}^{r+2} G_{jn}(y,\eta)\frac{\partial\varphi_r}{\partial\xi}\frac{e^{i\lambda(x-\xi)}}{\lambda-\lambda_{jn}}d\xi\,d\eta,$$

$$|M_{jn}(x,y,\lambda)| \le c_1|\lambda_{jn}|^{-3}|\lambda-\lambda_{jn}|^{-1}|\lambda|^{-1}\int_{-1}^{1}\int_{-r-2}^{r+2}\left|\frac{\partial\varphi_r}{\partial\xi}\right|d\xi\,d\eta \le cn^{-3}|\lambda|^{-2}, \quad c>0.$$

Поэтому

$$|R_N^{(2)}(x,y)| \le c\sum_{n=N}^{\infty} n^{-3}\int_{|\lambda|>A}|\lambda|^{-2}d\lambda \to 0, \quad N\to\infty.$$

Итак,

$$u_r(x,y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{1}\int_{-r-2}^{r+2} G_{jn}(y,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)\frac{e^{i\lambda(x-\xi)}}{\lambda-\lambda_{jn}}d\xi\,d\eta\,d\lambda. \tag{14}$$

Ряд справа сходится равномерно на Π_r. Меняя порядок интегрирования в (14), сделав интеграл по λ внутренним, и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(x-\xi)}}{\lambda-\lambda_{jn}}d\lambda = 2\pi i\begin{cases}\operatorname{sign}(x-\xi)e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)}, & (x-\xi)\operatorname{Im}\lambda_{jn}>0;\\ 0, & (x-\xi)\operatorname{Im}\lambda_{jn}<0,\end{cases}$$

получим

$$u_r(x,y) = i\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1}\int_{-r-2}^{-r-1} G_{jn}(y,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)}d\xi\,d\eta -$$
$$-\sum_{j=3}^{4}\int_{-1}^{1}\int_{r+1}^{r+2} G_{jn}(y,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)}d\xi\,d\eta\Big\}. \tag{15}$$

Из оценок для функции Грина следует, что при некотором $\lambda>0$ на прямоугольнике Π_r выполнено неравенство

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^m\partial y^{k-m}}\int_{-1}^{1}\int_{-r-2}^{-r-1} G_{jn}(y,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)}d\xi\,d\eta\right| \le \frac{ce^{-\alpha n}}{n^{3-k}}, \quad c>0.$$

Ясно, что такие неравенства справедливы и для второй группы слагаемых ряда (15), поэтому этот ряд на прямоугольнике Π_r сходится равномерно вместе со всеми своими производными. Для завершения доказательства леммы достаточно в (15) учесть равенство (11). $\square$

Пусть M — класс функций $u(x,y) \in U$ таких, что существуют равномерные на $[-1,1]$ пределы $v^-_{mk}(y)$ и $v^+_{mk}(y)$ функций $e^{-i\lambda_{jn}x}\dfrac{\partial^k u(x,y)}{\partial x^m \partial y^{k-m}}$ при $x \to -\infty$, $j = 1,2$, и $e^{-i\lambda_{jn}x}\dfrac{\partial^k u(x,y)}{\partial x^m \partial y^{k-m}}$ при $x \to \infty$, $j = 3,4$ $(0 \le m \le k \le 3,\ n \in N)$ соответственно. Топологию на M зададим системой преднорм

$$\|u(x,y)\|_r = \max \sum_{i+j=0}^{4} \left\{ \left| \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y_j} \right| : |x| \le r,\ |y| \le 1 \right\}, \quad r = 1,2,\ldots \tag{16}$$

Очевидно, пространство $M \ne \varnothing$, например, $u(x,y) = y^2 - 1 \in M$.

Теорема 1. *Для любой функции $u(x,y) \in M$ справедливо представление*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{4} c_{jn} e^{i\lambda_{jn}x} b_{jn}(y),$$

и ряд справа сходится абсолютно в топологии, задаваемой системой преднорм (16). *Здесь*

$$c_{jn} = \begin{cases} \int_{-1}^{1} \psi^-(\eta,\lambda_{jn}) \overline{b}_{jn}(\eta) d\eta, & j = 1,2; \\ \\ \int_{-1}^{1} \psi^+(\eta,\lambda_{jn}) \overline{b}_{jn}(\eta) d\eta, & j = 3,4, \end{cases}$$

где $b_{jn}(\cdot)$ — собственная функция краевой задачи (5)–(6), *а $\psi^{\pm}(\eta,\lambda_{jn})$ — линейная комбинация функций $v^{\pm}_{m3}(\eta)$, $\lambda_{jn} v^{\pm}_{m2}(\eta)$, $\lambda^2_{jn} v^{\pm}_{m1}(\eta)$, $\lambda^3_{jn} v^{\pm}_{m0}(\eta)$ соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-r-2}^{-r-1} \varphi_r(\xi,\eta) e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)} d\xi = e^{i\lambda_{jn}x} \int_{-r-2}^{-r-1} \varphi_r(\xi,\eta) e^{-i\lambda_{jn}\xi} d\xi, \quad j = 1,2.$$

Последовательно интегрируя по частям и учитывая, что при

$$\xi = -r-2,\ \xi = -r-1, \quad g'_r(\xi) = g''_r(\xi) = g'''_r(\xi) = 0,$$

с помощью интегральной теоремы о среднем получаем

$$\int_{-r-2}^{-r-1} \varphi_r(\xi,\eta) e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)} d\xi = \int_{-r-2}^{-r-1} \psi(\xi,\eta,\lambda_{jn}) e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)} g'_r(\xi) d\xi =$$
$$= \psi(\tau,\eta,\lambda_{jn}) e^{i\lambda_{jn}(x-\tau)} \int_{-r-2}^{-r-1} g'_r(\xi) d\xi = e^{i\lambda_{jn}(x-\tau)} \psi(\tau,\eta,\lambda_{jn}), \tag{17}$$

где $-r-2 \le \tau \le -r-1$ и

$$\psi(\xi,\eta,\lambda_{jn}) = \alpha_1 (u(\xi,\eta))'''_{\xi^3} + \alpha_2 (u(\xi,\eta))'''_{\xi^2\eta} + \alpha_3 (u(\xi,\eta))'''_{\xi\eta^2} + \alpha_4 (u(\xi,\eta))'''_{\eta^3} +$$
$$+ \lambda_{jn} \big(\alpha_5 (u(\xi,\eta))''_{\xi^2} + \alpha_6 (u(\xi,\eta))''_{\xi\eta} + \alpha_7 (u(\xi,\eta))''_{\eta^2}\big) + \lambda^2_{jn} \big(\alpha_8 (u(\xi,\eta))'_{\xi} + \alpha_9 (u(\xi,\eta))'_{\eta}\big) + \alpha_{10} \lambda^3_{jn} u(\xi,\eta)$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10}$ — некоторые числа).

То же самое справедливо и для интеграла

$$\int_{r+1}^{r+2} \varphi_r(\xi,\eta) e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)} d\xi, \quad j = 3,4.$$

В силу ограничений на функции из M

$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to-\infty} \psi(\tau,\eta,\lambda_{jn})e^{-i\lambda_{jn}\tau} = \psi^-(\eta,\lambda_{jn}), \quad j=1,2, \\ \lim_{\tau\to\infty} \psi(\tau,\eta,\lambda_{jn})e^{-i\lambda_{jn}\tau} = \psi^+(\eta,\lambda_{jn}), \quad j=3,4, \end{aligned} \tag{18}$$

причем функции $\psi^{\pm}(\eta,\lambda_{jn})$ непрерывны на $[-1,1]$.

Для функции

$$u_{jn}(x,y,r) = \int_{-1}^{1}\int_{-r-2}^{-r-1} G_{jn}(y,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)}d\xi\, d\eta$$

при $|x|\le r$ с учетом (17) получим неравенство

$$|u_{jn}(x,y,r)| \le c_1|\lambda_{jn}|^{-3}|\lambda_{jn}|^3 e^{-\operatorname{Im}\lambda_{jn}} = c_1 e^{-\operatorname{Im}\lambda_{jn}}, \quad j=1,2.$$

Аналогично

$$|u_{jn}(x,y,r)| = \left|\int_{-1}^{1}\int_{r+1}^{r+2} G_{jn}(y,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)}d\xi\, d\eta\right| \le c_2 e^{\operatorname{Im}\lambda_{jn}}, \quad j=3,4.$$

Так как $|\operatorname{Im}\lambda_{jn}| \ge c_3 n$, то из этих оценок следует, что ряд (15) равномерно сходится при $|x|\le r$ и $|y|\le 1$. Отсюда, переходя к пределу, с учетом (17) и (18) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} u_{jn}(x,y,r) &= \lim_{r\to\infty}\int_{-1}^{1}\int_{-r-2}^{-r-1} G_{jn}(y,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)}d\xi\, d\eta = \\ &= e^{i\lambda_{jn}x}\int_{-1}^{1} G_{jn}(y,\eta)\psi^-(\eta,\lambda_{jn})d\eta = \\ &= e^{i\lambda_{jn}x}\int_{-1}^{1} b_{jn}(y)\overline{b}_{jn}(\eta)\psi^-(\eta,\lambda_{jn})d\eta = \\ &= e^{i\lambda_{jn}x} b_{jn}(y)\int_{-1}^{1} \overline{b}_{jn}(\eta)\psi^-(\eta,\lambda_{jn})d\eta = \\ &= c_{jn}e^{i\lambda_{jn}x}b_{jn}(y), \quad j=1,2. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} u_{jn}(x,y,r) &= \lim_{r\to\infty}\int_{-1}^{1}\int_{r+1}^{r+2} G_{jn}(y,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)e^{i\lambda_{jn}(x-\xi)}d\xi\, d\eta = \\ &= e^{i\lambda_{jn}x} b_{jn}(y)\int_{-1}^{1} \overline{b}_{jn}(\eta)\psi^+(\eta,\lambda_{jn})d\eta = c_{jn}e^{i\lambda_{jn}x}b_{jn}(y), \quad j=3,4. \end{aligned}$$

Итак,

$$u(x,y) = \lim_{r\to\infty} u_r(x,y) = \lim_{r\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4} u_{jn}(x,y,r) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4} c_{jn}e^{i\lambda_{jn}x}b_{jn}(y),$$

причем ряд этот сходится равномерно и абсолютно со всеми своими производными на каждом прямоугольнике Π_r, $r=1,2,\dots$, следовательно, сходится абсолютно в топологии пространства M. $\square$

Напомним, если матрица $[a_r(n)]_{n,r\in N}$ такая, что $0\le a_r(n)\le a_{r+1}(n)$ для всех $r,n\in N$ и $\sup\limits_r a_r(n) > 0$ для всех $n\in N$, то пространство Фреше последовательностей

$$l_1[a_r(n)] = \left\{\xi = (\xi_n)_{n\in N} : |\xi|_r = \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|a_r(n) < \infty \quad \forall r\in N\right\}$$

называют пространством Кёте.

Последовательность элементов $(e_n)_{n\in N}$ счетно-нормированного пространства $(E,\ (\|\cdot\|_r))$ называют абсолютным базисом в E, если каждый элемент пространства E может быть единственным образом разложен по элементам $(e_n)_{n\in N}$ в абсолютно сходящийся в топологии E ряд. Пространство Фреше E с абсолютным базисом $(e_n)_{n\in N}$ ([4]) изоморфно пространству Кёте $l_1[\|e_n\|_r]$.

Упорядочим систему функций $(e^{i\lambda_{jn}x}b_{jn}(y))_{n\in N\,,j=\overline{1,4}}$ в виде последовательности $(B_m(x,y))_{m\in N}$ с $B_{4(n-1)+j}(x,y)=e^{i\lambda_{jn}x}b_{jn}(y)$.

Теорема 2. *Система функций $(B_m(x,y))_{m\in N}$ образует абсолютный базис в пространстве M.*

Доказательство. По теореме 1 каждую функцию $u(x,y)\in N$ можно представить в виде

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}c_mB_m(x,y), \tag{19}$$

где ряд справа сходится абсолютно в топологии пространства M. Собственные функции $(b_{jn}(\eta))_{n\in N,\,j=\overline{1,4}}$ краевой задачи (5)–(6) обладают ([3]) свойством ортогональности

$$\int_{-1}^{1}[2\beta\overline{b}'_{jn}b'_{km}+\alpha[\overline{\lambda}_{jn}^2+\lambda_{km}^2]\overline{b}_{jn}b_{km}]d\eta=0,\quad (j,n)\neq(k,m),$$

откуда следует единственность представления (19). $\square$

Введем новую систему преднорм $(|||\cdot|||_r)$ на M, полагая для $u(x,y)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}c_mB_m(x,y)$ из M

$$|||u(x,y)|||_r=\sum_{m=1}^{\infty}|c_m|\,\|B_m(x,y)\|_r.$$

Теорема 3. *Счетно-нормированное пространство $\widetilde{M}=(M,(|||\cdot|||_r))$ можно изометрически отобразить в пространство Кёте $l_1[\|B_m(x,y)\|_r]$.*

Доказательство. Построим отображение $T:\widetilde{M}\to l_1[\|B_m(x,y)\|_r]$ так, чтобы

$$T(u(x,y))=T\Big(\sum_{m=1}^{\infty}c_mB_m(x,y)\Big)=(c_m)_{m\in N}.$$

Это можно сделать в силу теоремы 2. Из равенств

$$\|T(u(x,y))\|_r=\|(c_m)_{m\in N}\|_r=\sum_{m=1}^{\infty}|c_m|\,\|B_m(x,y)\|_r=|||u(x,y)|||_r$$

следует изометричность отображения T. $\square$

Литература

1. Маркушевич М.А. *Теория аналитических функций.* – М.: Наука, 1968.
2. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969.
3. Ковальчук В.Е., Умалатов С.Д. *Кратная базисность системы собственных функций одного дифференциального оператора четвертого порядка* // Известия СКНЦ ВШ (естеств. науки). – 1979. – № 4. – С. 18–22.
4. Драгилев М.М. *Базисы в пространствах Кёте.* – Ростов-на-Дону. – 1983.

Грозненский нефтяной институт

Поступили
первый вариант 03.07.1993
окончательный вариант 08.10.1996