ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 11 (462)

Эту работу посвящаем дорогому другу и учителю
профессору А.Д. Ляшко в связи с его 70-летием

УДК 519.63

В.Н. АБРАШИН, А.А. ЕГОРОВ, Н.Г. ЖАДАЕВА

ЭКОНОМИЧНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В работе предлагаются и исследуются экономичные итерационные методы решения стационарных задач математической физики с использованием метода Галёркина [1], [2]. В [2] был впервые предложен метод расщепления в сочетании с методом конечных элементов для двухмерных параболических уравнений конвекции-диффузии. Эта идея получила дальнейшее развитие при разработке методов решения более широкого класса нестационарных задач [3]–[5]. Следует однако отметить, что построение экономичных разностных схем на основе метода суммарной аппроксимации (покомпонентного расщепления) [2], [3], когда исходный оператор разбивается на четыре одномерных неотрицательных оператора, приводит к ограничениям на коэффициенты исходного уравнения более жестким, чем условие эллиптичности. Кроме того, при использовании этого метода возникают, на наш взгляд, существенные трудности, связанные, во-первых, с ограничениями на выбор шагов сетки для обеспечения устойчивости алгоритма, и, во-вторых, с наличием дополнительных требований на конфигурацию конечного элемента.

В развитие работ [6], [7] в [8]–[10] был предложен многокомпонентный вариант метода переменных направлений, который обладает абсолютной устойчивостью при разбиении оператора на произвольное число, вообще говоря, некоммутируемых операторов и относится к методам расщепления полной аппроксимации. В [11], [12] на основе данного метода построены экономичные алгоритмы решения конечно-элементных разностных схем (количество разбиений четыре и шесть), при этом неестественные ограничения, возникающие при использовании метода расщепления, в этих работах сняты.

Отметим, что при решении стационарных задач математической физики трудности, возникающие при разработке экономичных итерационных методов, значительно возрастают. В частности, упомянутый метод суммарной аппроксимации практически неприменим как итерационный метод установления, поскольку требует существенного уменьшения итерационного параметра для достижения заданной точности. Наличие в исходном дифференциальном операторе смешанных производных не позволяет также эффективно использовать и классический метод переменных направлений, требующий коммутируемость операторов разбиения. В данной статье конструируются и изучаются итерационные схемы многокомпонентного метода переменных направлений в сочетании с методом конечных элементов для решения стационарных уравнений типа конвекции-диффузии. Результаты, полученные в работе, позволяют существенно расширить область применения указанного класса методов, ранее используемых лишь в качестве конечно-разностных итерационных схем для эллиптических краевых задач [13]–[15].

В области G с границей Γ, $G \subset \mathbf{R}^2$ — ограниченная односвязная область, $\Gamma \in \mathbf{C}^2$, рассмотрим эллиптическую краевую задачу второго порядка со смешанными производными

$$Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x}A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}Y(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}Z(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} = F(x,y), \quad (x,y) \in G, \quad (1)$$

$$u(x,y) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Преобразуем задачу (1), (2). Разделив в (1) симметричную и кососимметричную части оператора L с помощью преобразования $C = (Y-Z)/2$, $D = (Y+Z)/2$ [2], получим уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x}A\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}B\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}D\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}D\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}C\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}C\frac{\partial u}{\partial x} = F. \quad (3)$$

Будем предполагать, что коэффициенты и правая часть уравнения (3) удовлетворяют условиям

$$A, B, C, D \in \mathbf{C}^2(G), \quad F \in \mathbf{C}^1(G), \quad |C| \le \gamma_0,$$

$$\gamma_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) \le A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + 2D\xi_1\xi_2 \le \gamma_1(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2,$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 = \mathrm{const} > 0$.

Сформулируем обобщенную постановку задачи (1), (2): требуется найти функцию $u = u(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, удовлетворяющую равенству

$$I(u,v) = (F,v), \quad (4)$$

$$I(u,v) = \int_G \left(A\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + D\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + D\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - C\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

$(F,v) = \int\limits_G Fv\, dx\, dy$, $v = v(x,y)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. При сделанных ограничениях задача (4) имеет единственное решение $u(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$.

Для приближенного решения (4) используем метод конечных элементов. Рассмотрим прямоугольник $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ такой, что $G \subset \Pi$. Разобьем Π на подобласти прямыми $x_i = a + ih_x$, $i = 0, \ldots, N_x$, $y_j = b + jh_y$, $j = 0, \ldots, N_y$, N_x, N_y — положительные целые числа. Каждый из образовавшихся прямоугольников разделим диагональю на два треугольника, т. е. осуществим триангуляцию области G. Множество полученных треугольников обозначим через $\Theta = \{T\}$ (отметим, что при разбиении на треугольники мы не уточняем ориентацию диагоналей). Пусть $\widetilde{\Theta} = \{T \in \Theta : T \subset \overline{G}\}$, $\widetilde{\Gamma}$ — граница $\widetilde{G} = \bigcup\limits_{T \in \widetilde{\Theta}} T$, $\widetilde{R}^h = \{(i,j) : (x_i, y_j) \in \widetilde{G} \setminus \widetilde{\Gamma}\}$, $\widetilde{S}^h = \{(i,j) : (x_i, y_j) \in \widetilde{\Gamma}\}$. Каждому узлу (x_i, y_j), $(i,j) \in \widetilde{R}^h$, поставим в соответствие функцию $\varphi_{ij}(x,y) : \widetilde{G} \to \mathbf{R}$ с компактным носителем K_{ij}, линейную в каждом треугольнике $T \in \widetilde{\Theta}$:

$$\varphi_{ij}(x_m, y_n) = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) = (x_m, y_n), \\ 0, & (x_i, y_j) \ne (x_m, y_n), \end{cases} \quad (i,j), (m,n) \in \widetilde{R}^h.$$

Пусть $u = u_{ij}$, $i = 0, \ldots, N_x$, $j = 0, \ldots, N_y$, — сеточная функция, определенная в узлах (x_i, y_j). Построим линейную комбинацию

$$u^h(x,y) = \sum_{(i,j) \in \widetilde{R}^h} u_{ij}\varphi_{ij}(x,y). \quad (5)$$

Обозначим линейную оболочку функций (5) через $\overset{\circ}{M}{}^h \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^{1,h}$, $\overset{\circ}{M}{}^h \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. Тогда, учитывая, что множество функций $\{\varphi_{ij} : (i,j) \in \widetilde{R}^h\}$ является базисом в пространстве $\overset{\circ}{M}{}^h$, решение u^h по методу Галёркина находим из системы линейных алгебраических уравнений

$$I(u^h, \varphi_{ij}) = (F, \varphi_{ij}),$$

которую можно записать в операторном виде

$$\Lambda u = f, \tag{6}$$

где $u = \{u_{ij}\} \in \overset{\circ}{Q}{}^h$, $\overset{\circ}{Q}{}^h = \{u_{ij} : (i,j) \in \widetilde{R}^h \cup \widetilde{S}^h;\ u_{ij} = 0,\ (i,j) \in \widetilde{S}^h\}$, $f_{ij} = W_{ij}^{-1} \int\limits_G F\varphi_{ij}\, dx\, dy$, $W_{ij} = \int\limits_G \varphi_{ij}\, dx\, dy$, $(i,j) \in \widetilde{R}^h$. Оператор Λ определяется следующим образом: $\Lambda u = A^h u + B^h u + D^h u + C^h u$,

$$(A^h u)_{ij} = \sum_{k=-1}^{1} A^{(ij)}_{i+k,j} u_{i+k,j}, \quad (B^h u)_{ij} = \sum_{k=-1}^{1} B^{(ij)}_{i,j+k} u_{i,j+k},$$
$$(D^h u)_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{2} (\overset{\alpha}{D}{}^h u)_{ij}, \quad (\overset{\alpha}{D}{}^h u)_{ij} = \sum_{k,l=-1}^{1} \overset{\alpha}{D}{}^{(ij)}_{i+k,j+l} u_{i+k,j+l},$$
$$(C^h u)_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{2} (\overset{\alpha}{C}{}^h u)_{ij}, \quad (\overset{1}{C}{}^h u)_{ij} = C^{(ij)}_{i+1,j} u_{i+1,j} + C^{(ij)}_{i-1,j} u_{i-1,j}, \quad (\overset{2}{C}{}^h u)_{ij} = C^{(ij)}_{i,j+1} u_{i,j+1} + C^{(ij)}_{i,j-1} u_{i,j-1},$$
$$(\overset{3}{C}{}^h u)_{ij} = C^{(ij)}_{i+1,j+1} u_{i+1,j+1} + C^{(ij)}_{i-1,j-1} u_{i-1,j-1}, \quad (\overset{4}{C}{}^h u)_{ij} = C^{(ij)}_{i-1,j+1} u_{i-1,j+1} + C^{(ij)}_{i+1,j-1} u_{i+1,j-1},$$
$$A^{(ij)}_{mn} = W_{ij}^{-1} \int_\Omega A \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x}\, dx\, dy, \quad B^{(ij)}_{mn} = W_{ij}^{-1} \int_\Omega B \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y}\, dx\, dy,$$
$$\overset{1}{D}{}^{(ij)}_{mn} = W_{ij}^{-1} \int_\Omega D \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x}\, dx\, dy, \quad \overset{2}{D}{}^{(ij)}_{mn} = W_{ij}^{-1} \int_\Omega D \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y}\, dx\, dy,$$
$$C^{(ij)}_{mn} = W_{ij}^{-1} \int_\Omega C \left(\frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right) dx\, dy, \quad \Omega = K_{ij} \cap K_{mn} \cap G.$$

Для решения задачи (6) используем итерационный процесс многокомпонентного метода переменных направлений

$$\frac{\overset{s+1}{u}_\alpha - \overset{s}{\tilde{u}}}{\tau} + \sigma \Lambda_\alpha \big(\overset{s+1}{u}{}^{(\alpha)} - \overset{s}{u}{}^{(\alpha)} \big) + \sum_{\beta=1}^{6} \Lambda_\beta \overset{s}{u}{}^{(\beta)} = f, \quad \alpha = 1, \ldots, 6, \tag{7}$$

$$u^{(\alpha)} = u_\alpha, \quad \alpha = 1,3,5,6, \quad u^{(2)} = (u_1, u_2), \quad u^{(4)} = (u_3, u_4), \quad u_\alpha \in \overset{\circ}{Q}{}^h, \quad \alpha = 1, \ldots, 6,$$
$$(\Lambda_1 u^{(1)})_{ij} = 0,5\big((A^h u_1)_{ij} + (\overset{1}{C}{}^h u_1)_{ij} \big), \quad (\Lambda_2 u^{(2)})_{ij} = 0,5\big((B^h u_2)_{ij} + (\overset{2}{C}{}^h u_2)_{ij} \big) + (\overset{2}{D}{}^h u_1)_{ij},$$
$$(\Lambda_3 u^{(3)})_{ij} = 0,5\big((B^h u_3)_{ij} + (\overset{2}{C}{}^h u_3)_{ij} \big), \quad (\Lambda_4 u^{(4)})_{ij} = 0,5\big((A^h u_4)_{ij} + (\overset{1}{C}{}^h u_4)_{ij} \big) + (\overset{1}{D}{}^h u_3)_{ij},$$
$$(\Lambda_5 u^{(5)})_{ij} = (\overset{3}{C}{}^h u_5)_{ij}, \quad (\Lambda_6 u^{(6)})_{ij} = (\overset{4}{C}{}^h u_6)_{ij}, \quad \overset{s}{\tilde{u}} = \frac{1}{6} \sum_{\alpha=1}^{6} \overset{s}{u}_\alpha.$$

Группы компонент метода $(\overset{s+1}{u}_1, \overset{s+1}{u}_2)$, $(\overset{s+1}{u}_3, \overset{s+1}{u}_4)$, $(\overset{s+1}{u}_5, \overset{s+1}{u}_6)$ на каждой итерации вычисляются независимо друг от друга с помощью скалярных прогонок и поэтому метод (7) можно назвать блочно распараллеленным.

Исследуем сходимость итерационного процесса (7) при $\sigma = \sigma_0 = 6$. Введем в пространстве $\overset{\circ}{Q}{}^h$ скалярное произведение и норму $(u, y) = \sum\limits_{(i,j) \in \widetilde{R}^h} u_{ij} y_{ij} h_x h_y$, $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$. Умножим (7) скалярно на $\tau\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)} = \Lambda_\alpha \overset{s+1}{u}{}^{(\alpha)} - \Lambda_\alpha \overset{s}{u}{}^{(\alpha)}$ и просуммируем по $\alpha = 1, \ldots, 6$:

$$\sum_{\alpha=1}^{6} \big(\overset{s+1}{u}_\alpha - \overset{s}{\tilde{u}}, \Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}\big) + \sigma_0\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{6} \big\|\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}\big\|^2 - \\ - 0,5\tau^2 \Big\| \sum_{\alpha=1}^{6} \Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)} \Big\|^2 + 0,5\|r(s+1)\|^2 = 0,5\|r(s)\|^2, \quad (8)$$

где $r(s) = \sum\limits_{\alpha=1}^{6} \Lambda_\alpha \overset{s}{u}{}^{(\alpha)} - f$. Преобразуем выражение в левой части равенства (8). Введем обозначение $\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)} = \overset{s}{u}_\alpha - \overset{s}{u}_\beta$. Тогда нетрудно показать, что справедливо тождество

$$\sum_{\alpha=1}^{6} \big(\overset{s+1}{u}_\alpha - \overset{s}{\tilde{u}}, \Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}\big) = \tau \sum_{\alpha=1}^{6} \big(\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}, \overset{s+1}{u}_{\alpha t}\big) + \frac{1}{\sigma_0} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha>\beta}}^{6} \big(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, \Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)} - \Lambda_\beta \overset{s+1}{u_t}{}^{(\beta)}\big),$$

которое с учетом соотношения $\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)} - \Lambda_\beta \overset{s+1}{u_t}{}^{(\beta)} = -\sigma_0^{-1}\tau^{-2} \overset{s+1}{v}{}^{(\alpha,\beta)}$ принимает вид

$$\frac{1}{\sigma_0} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha>\beta}}^{6} \big(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, \Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)} - \Lambda_\beta \overset{s+1}{u_t}{}^{(\beta)}\big) = -\frac{1}{\sigma_0}\tau^{-2} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha>\beta}}^{6} \big(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, \overset{s+1}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\big) = \\ = 0,5\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\big(\tau^2 \|\overset{s+1}{v}_t\|^2_{\mathrm{III}} - \|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} - \|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}}\big),$$

где $\|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}} = \sum\limits_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha>\beta}}^{6} \big(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, \overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\big)$. Из равенства

$$0,5\sigma_0\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{6} \big\|\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}\big\|^2 - 0,5\tau^2 \Big\| \sum_{\alpha=1}^{6} \Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)} \Big\|^2 = 0,5\tau^2 \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha>\beta}}^{6} \big\|\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)} - \Lambda_\beta \overset{s+1}{u_t}{}^{(\beta)}\big\|^2 = 0,5\sigma_0^{-2}\tau^{-2} \|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}}$$

вытекает оценка

$$\sigma_0\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{6} \big\|\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}\big\|^2 - 0,5\tau^2 \Big\| \sum_{\alpha=1}^{6} \Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)} \Big\|^2 \geq \sigma_0^{-2}\tau^{-2} \|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}}.$$

Отличительной особенностью излагаемой здесь методики доказательства сходимости аддитивного итерационного процесса (7) является тот факт, что некоторые из операторов разбиения Λ_α могут быть неотрицательными, т. е. допускается их вырождение. В нашем случае $\Lambda_\alpha > 0$, $\alpha = 1, \ldots, 4$, а $\Lambda_5, \Lambda_6 \geq 0$. Пусть $\Lambda_{\alpha_0} \geq c_0 > 0$, где в качестве α_0 можно взять одно из значений α, для которого оператор Λ_α является положительно-определенным. Тогда с учетом проведенных выше преобразований из (8) приходим к неравенству

$$\tau\big(\Lambda_{\alpha_0} \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha_0)}, \overset{s+1}{u}_{\alpha_0 t}\big) + 0,5\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} + 0,5\sigma_0^{-2}\|\overset{s+1}{v}_t\|^2_{\mathrm{III}} + 0,5\|r(s+1)\|^2 \leq \\ \leq 0,5\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}} + 0,5\|r(s)\|^2. \quad (9)$$

Поскольку $y_{\alpha_0}^2 = y_\alpha^2 - 2y_\alpha(y_\alpha - y_{\alpha_0}) + (y_\alpha - y_{\alpha_0})^2$, то, суммируя это равенство по $\alpha = 1, \ldots, 6$ и применяя ε-неравенство, получим оценку

$$\tau\big(\Lambda_{\alpha_0} \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha_0)}, \overset{s+1}{u}_{\alpha_0 t}\big) \geq c_0\sigma_0^{-1}\tau\bigg((1-\varepsilon)\sum_{\alpha=1}^{6} \|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\|^2 + \big(1 - \tfrac{1}{\varepsilon}\big)\sum_{\alpha=1}^{6} \|\overset{s+1}{v_t}{}^{(\alpha,\alpha_0)}\|^2\bigg), \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (10)$$

С учетом последнего неравенства из (9) имеем

$$c_1\tau\sum_{\alpha=1}^{6}\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\|^2+0,5\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_{\mathrm{III}}^2+\big(0,5\sigma_0^{-2}+c_0\sigma_0^{-1}(1-1/\varepsilon)\tau\big)\|\overset{s+1}{v}_t\|_{\mathrm{III}}^2+$$

$$+0,5\|r(s+1)\|^2\le 0,5\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}}^2+0,5\|r(s)\|^2, \quad (11)$$

где $c_1=c_0\sigma_0^{-1}(1-\varepsilon)$. Просуммируем уравнение (7) по $\alpha=1,\ldots,6$ $(\sigma=\sigma_0)$

$$\frac{\overset{s+1}{\tilde{u}}-\overset{s}{\tilde{u}}}{\tau}+\sum_{\beta=1}^{6}\Lambda_\beta\overset{s+1(\beta)}{u}=f. \quad (12)$$

В силу равенства $\sum\limits_{\alpha=1}^{6}\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\|^2=\sigma_0\|\overset{s+1}{\tilde{u}}_t\|^2+\sigma_0^{-1}\|\overset{s+1}{v}_t\|_{\mathrm{III}}^2$ и вытекающего из (12) очевидного свойства $\overset{s+1}{\tilde{u}}_t=(\overset{s+1}{\tilde{u}}-\overset{s}{\tilde{u}})/\tau=-r(s+1)$ для первого слагаемого (11) получим выражение

$$c_1\tau\sum_{\alpha=1}^{6}\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\|^2=c_1\tau\big(\sigma_0\|r(s+1)\|^2+\sigma_0^{-1}\|\overset{s+1}{v}_t\|_{\mathrm{III}}^2\big). \quad (13)$$

Представим константу c_1 в виде суммы $c_1=\theta_0+\theta_1$, $\theta_0,\theta_1=\mathrm{const}>0$. Тогда с учетом (13) из (11) приходим к неравенству

$$0,5(1+2\theta_0\sigma_0\tau)\|r(s+1)\|^2+\theta_1\tau\sum_{\alpha=1}^{6}\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\|^2+\big(0,5\sigma_0^{-2}+c_0\sigma_0^{-1}(1-1/\varepsilon)\tau+\theta_0\sigma_0^{-1}\tau\big)\|\overset{s+1}{v}_t\|_{\mathrm{III}}^2+$$

$$+0,5\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_{\mathrm{III}}^2\le 0,5\|r(s)\|^2+0,5\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}}^2. \quad (14)$$

Для оценки величины $\sum\limits_{\alpha=1}^{6}\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\|^2$ воспользуемся тождеством

$$\overset{s+1}{u}_{\alpha t}=-\Big(\sigma_0^{-1}\tau^{-1}\sum_{\beta=1}^{6}(\overset{s}{u}_\alpha-\overset{s}{u}_\beta)+\sigma_0\tau\Lambda_\alpha\overset{s+1(\alpha)}{u}_t+r(s)\Big),$$

которое следует непосредственно из (7). Возводя последнее равенство скалярно в квадрат и суммируя по $\alpha=1,\ldots,6$, получим следующее соотношение:

$$\sum_{\alpha=1}^{6}\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\|^2=\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\sum_{\alpha=1}^{6}\Big\|\sum_{\beta=1}^{6}(\overset{s}{u}_\alpha-\overset{s}{u}_\beta)\Big\|^2+\sigma_0^2\tau^2\sum_{\alpha=1}^{6}\|\Lambda_\alpha\overset{s+1(\alpha)}{u}_t\|^2+2\sigma_0\tau\sum_{\alpha=1}^{6}(\Lambda_\alpha\overset{s+1(\alpha)}{u}_t,r(s))+$$

$$+\sigma_0\|r(s)\|^2-2\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha>\beta}}^{6}\big(\overset{s}{v}^{(\alpha,\beta)},\Lambda_\alpha\overset{s+1(\alpha)}{u}_t-\Lambda_\beta\overset{s+1(\beta)}{u}_t\big)+2\sigma_0^{-1}\tau^{-1}\sum_{\alpha=1}^{6}\Big(\sum_{\beta=1}^{6}(\overset{s}{u}_\alpha-\overset{s}{u}_\beta),r(s)\Big). \quad (15)$$

Так как

$$\sigma_0^2\tau^2\sum_{\alpha=1}^{6}\|\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u}{}_t^{(\alpha)}\|^2+2\sigma_0\tau\sum_{\alpha=1}^{6}\big(\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u}{}_t^{(\alpha)},r(s)\big)+\sigma_0\|r(s)\|^2=\sigma_0^2\tau^2\sum_{\alpha=1}^{6}\|\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u}{}_t^{(\alpha)}\|^2-$$

$$-\sigma_0\tau^2\Big\|\sum_{\alpha=1}^{6}\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u}{}_t^{(\alpha)}\Big\|^2+\sigma_0\|r(s+1)\|^2=\sigma_0^{-1}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_{\mathrm{III}}^2+\sigma_0\|r(s+1)\|^2,$$

$$-2\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha>\beta}}^{6}\big(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)},\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u}{}_t^{(\alpha)}-\Lambda_\beta \overset{s+1}{u}{}_t^{(\beta)}\big)=2\sigma_0^{-1}\tau^{-2}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha>\beta}}^{6}\big(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)},\overset{s+1}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\big)=$$

$$=\sigma_0^{-1}\tau^{-2}\big(\|\overset{s+1}{v}\|_{\mathrm{III}}^2+\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}}^2-\tau^2\|\overset{s+1}{v}_t\|_{\mathrm{III}}^2\big),\quad 2\sigma_0^{-1}\tau^{-1}\sum_{\alpha=1}^{6}\Big(\sum_{\beta=1}^{6}(\overset{s}{u}_\alpha-\overset{s}{u}_\beta),r(s)\Big)=0,$$

то из равенства (15) получим

$$\sum_{\alpha=1}^{6}\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\|^2=2\sigma_0^{-1}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_{\mathrm{III}}^2+\sigma_0^{-1}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}}^2+\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\sum_{\alpha=1}^{6}\Big\|\sum_{\beta=1}^{6}\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\Big\|^2-\sigma_0^{-1}\|\overset{s+1}{v}_t\|_{\mathrm{III}}^2+\sigma_0\|r(s+1)\|^2.$$

Окончательно из (14) имеем оценку

$$(1+2c_1\sigma_0\tau)\|r(s+1)\|^2+\sigma_0^{-2}\tau^{-2}(1+4\theta_1\sigma_0\tau)\|\overset{s+1}{v}\|_{\mathrm{III}}^2+$$
$$+\sigma_0^{-2}\big[1+2\sigma_0\big(\theta_0-\theta_1+c_0(1-1/\varepsilon)\big)\tau\big]\|\overset{s+1}{v}_t\|_{\mathrm{III}}^2\le\|r(s)\|^2+\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}}^2. \quad (16)$$

Отсюда видно, что для неотрицательности последнего слагаемого в левой части (16) необходимо выполнение условия $0,5c_0\big(\sigma_0^{-1}(1-\varepsilon)+1/\varepsilon-1\big)\le\theta_0<c_0$. Это неравенство всегда имеет место при $0,35\le\varepsilon<1$. В частности, если $\varepsilon=1/2$, то можно положить $\theta_0=(13/24)c_0$, $\theta_1=(11/24)c_0$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *При $\sigma=\sigma_0$ для аддитивного итерационного метода (7) справедлива оценка*

$$\overset{s}{Q}{}^2\le\Big(\frac{1}{q}\Big)^s\overset{\circ}{Q}{}^2, \quad (17)$$

где $\overset{s}{Q}{}^2=\|r(s)\|^2+\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_{\mathrm{III}}^2$, $q=\min\{1+2c_1\sigma_0\tau,1+4\theta_1\sigma_0\tau\}$, c_1, θ_1 — положительные постоянные.

Следует отметить, что из теоремы, вообще говоря, не следует сходимость итерационного процесса (7). Оценка (17) лишь гарантирует стремление к нулю невязки метода $r(s)=\sum\limits_{\alpha=1}^{6}\Lambda_\alpha\overset{s}{u}{}^{(\alpha)}-f$ и сходимость компонент друг к другу, т. е. выполнение условий $\|r(s)\|\to 0$ и $\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}}\to 0$ при $s\to\infty$. Однако малость $r(s)$ не обеспечивает малости естественной невязки $\Lambda\overset{s}{\tilde{u}}-f$ в силу рассогласованности отдельных компонент решения $\overset{s}{\tilde{u}}$.

Для получения оценки сходимости введем сеточную функцию погрешности $\overset{s}{\rho}=\overset{s}{\tilde{u}}-u$. Тогда, используя тождество

$$\overset{s}{u}_\alpha=\overset{s}{\tilde{u}}+\frac{1}{\sigma_0}\sum_{\beta=1}^{6}(\overset{s}{u}_\alpha-\overset{s}{u}_\beta)=\overset{s}{\tilde{u}}+\frac{1}{\sigma_0}\sum_{\beta=1}^{6}\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}$$

и выражение для $r(s)$, имеем

$$\Lambda\overset{s}{\rho}=-\sum_{\alpha=1}^{6}\Lambda_\alpha\Big(\frac{1}{\sigma_0}\sum_{\beta=1}^{6}\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\Big)+r(s). \quad (18)$$

Умножим (18) скалярно на $\overset{s}{\rho}$ и оценим правую часть полученного равенства с помощью стандартных теорем вложения

$$\|\overset{s}{\rho}\|_\Lambda \le \left(\sum_{\alpha=1}^{6}\sigma_0\Delta\left\|\frac{1}{\sigma_0}\sum_{\beta=1}^{6}\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\right\|^2\right)^{1/2} + \delta^{-1/2}\|r(s)\|,$$

где $\Lambda > \delta$, $\Delta = \max\limits_{\alpha}\Delta_\alpha$, $\Lambda_\alpha < \Delta_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,6$. Из последнего соотношения и оценок

$$\|r(s)\|^2 \le \left(\frac{1}{q}\right)^s \overset{\circ}{Q}{}^2, \quad \|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}} \le \sigma_0^2\tau^2\left(\frac{1}{q}\right)^s \overset{\circ}{Q}{}^2,$$

очевидным образом вытекающих из (17), следует неравенство

$$\|\overset{s}{\rho}\|_\Lambda \le (\delta^{-1/2} + (\sigma_0\Delta)^{1/2}\tau)\left(\frac{1}{q^s}\right)^{1/2}\overset{\circ}{Q}, \tag{19}$$

которое позволяет сформулировать теорему сходимости метода (7).

Теорема 2. *При $\sigma = \sigma_0$ итерационный процесс* (7) *сходится и для его скорости сходимости справедлива оценка* (19).

Из теоремы 2 следует, что в соответствии с оценкой (19), в правую часть которой входит выражение $\sigma_0^{1/2}\Delta^{1/2}\tau$, скорость сходимости метода (7) регулируется соотношением между итерационным параметром τ и сеточным шагом $h = \max(h_x, h_y)$. Это условие сходимости соответствует ограничению на τ, характерному для классического метода переменных направлений.

Можно получить и другую оценку сходимости метода (7). Из равенства (18) следует выражение

$$\overset{s}{\rho} = -\sum_{\alpha=1}^{6}\widetilde{\Lambda}_\alpha\left(\frac{1}{\sigma_0}\sum_{\beta=1}^{6}\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\right) + \Lambda^{-1}r(s),$$

$\widetilde{\Lambda}_\alpha = \Lambda^{-1}\Lambda_\alpha = E\Big/\Big(E + \sum\limits_{\beta=1}^{6}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta\Big)$, откуда вытекает, что для сходимости метода необходимо требование ограниченности оператора $\Lambda^{-1}\Lambda_\alpha$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, $\|\Lambda^{-1}\Lambda_\alpha\| < \Delta_0$, $\Delta_0 = \mathrm{const} > 0$, $\alpha = 1,\dots,6$. *Тогда аддитивный итерационный метод* (7) *сходится и для его скорости сходимости имеет место оценка*

$$\|\overset{s}{\rho}\| \le \delta^{-1}\|r(s)\| + \Delta_0\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}}. \tag{20}$$

Оценка (20) не накладывает дополнительного ограничения на соотношение между τ и h, имеющее место в (19). При условии коммутируемости операторов Λ_α норма $\|\widetilde{\Lambda}_\alpha\| < 1$ и скорость сходимости метода несколько выше.

Доказательство теорем 1–3 было проведено при $\sigma = \sigma_0$, что формально соответствует чисто неявной итерационной схеме метода установления (12). Аналогичные результаты нетрудно получить и для $\sigma_0/2 < \sigma < \sigma_0$. Более подробно рассмотрим случай $\sigma = \sigma_0/2$ (симметричная схема).

Теорема 4. *Пусть $\sigma = \sigma_0/2$, $0,25\mu_0\theta_0\sigma^2\tau^2 \ge \mu_1\Delta^{-1}$, $\mu_0 + \mu_1 = 1$, μ_0, μ_1 — положительные константы, $\Delta > \Lambda_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,6$. Тогда для итерационного метода* (7) *справедлива оценка*

$$\overset{s}{Q}{}^2 \le \left(\frac{1}{q}\right)^s \overset{\circ}{Q}{}^2,$$

где $\overset{s}{Q}{}^2 = \|r(s)\|^2 + (1-4\gamma)^{-1}\sigma^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}}$, $q = \frac{1+4\gamma}{1-4\gamma}$, *если* $q = \frac{1-4\gamma}{1+4\gamma}(1 + 4\mu_0\theta_1\sigma\tau) \le 1$; $\overset{s}{Q}{}^2 = \|r(s)\|^2 + \sigma^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}}$, $q = \min\{1+4\gamma,\ 1 + 4\mu_0\theta_1\sigma\tau\}$, *если* $|1-4\gamma| \le 1$; $\gamma = \mu_1\sigma^{-1}\Delta^{-1}\tau$.

Доказательство. Обратимся к основному соотношению, полученному в теореме 1,

$$\tau\sum_{\alpha=1}^{6}\big(\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}, \overset{s+1}{u}_{\alpha t}\big) + 0,5\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} + 0,5\sigma_0^{-2}\|\overset{s+1}{v_t}\|^2_{\mathrm{III}} + 0,5\|r(s+1)\|^2 \le$$
$$\le 0,5\sigma_0^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}} + 0,5\|r(s)\|^2. \quad (21)$$

Для оценки первого слагаемого в (21) воспользуемся неравенствами $(\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}, \overset{s+1}{u}_{\alpha t}) \ge c_0\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\|^2$, $\Delta^{-1}\|\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}\|^2 \le (\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}, \overset{s+1}{u}_{\alpha t})$, где $\Delta > \Lambda_\alpha$ — верхняя граница спектра операторов Λ_α, $\alpha = 1,\ldots,6$. Пусть $\mu_0+\mu_1 = 1$, $\mu_j > 0$, $j = 0,1$. Тогда с учетом (10) из (21) получим

$$0,5\|r(s+1)\|^2 + 0,5\sigma^{-2}\tau^{-2}(1+4\mu_0\theta_1\sigma\tau)\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} + 0,5\sigma_0^{-2}\big[1+2\mu_0\sigma(\theta_0-\theta_1+$$
$$+c_0(1-1/\varepsilon))\tau\big]\|\overset{s+1}{v_t}\|^2_{\mathrm{III}} + \mu_0\theta_0\sigma\tau\|\overset{s+1}{\tilde u_t}\|^2 + \mu_1\sigma^{-1}\Delta^{-1}\tau\left\|\sum_{\alpha=1}^{6}\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}\right\|^2, \quad (22)$$

где $\theta_0+\theta_1 = c_1$, $c_1 = c_0\sigma^{-1}(1-\varepsilon)$. Принимая во внимание тождества

$$\overset{s+1}{\tilde u_t} = -0,5\big(r(s+1)+r(s)\big), \quad \tau\sum_{\alpha=1}^{6}\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)} = r(s+1)-r(s),$$

преобразуем два последних слагаемых в левой части (22):

$$\mu_0\theta_0\sigma\tau\|\overset{s+1}{\tilde u_t}\|^2 + \mu_1\sigma^{-1}\Delta^{-1}\tau\left\|\sum_{\alpha=1}^{6}\Lambda_\alpha \overset{s+1}{u_t}{}^{(\alpha)}\right\|^2 = 0,25\mu_0\theta_0\sigma\tau\|r(s+1)+r(s)\|^2 +$$
$$+\mu_1\sigma^{-1}\Delta^{-1}\tau^{-1}\|r(s+1)-r(s)\|^2 = \big(0,25\mu_0\theta_0\sigma\tau - \mu_1\sigma^{-1}\Delta^{-1}\tau^{-1}\big)\|r(s+1)+r(s)\|^2 +$$
$$+2\mu_1\sigma^{-1}\Delta^{-1}\tau^{-1}\big(\|r(s+1)\|^2+\|r(s)\|^2\big).$$

Если τ удовлетворяет неравенству $0,25\mu_0\theta_0\sigma^2\tau^2 \ge \mu_1\Delta^{-1}$, то при тех же предположениях относительно констант θ_0, θ_1 получим оценку

$$(1+4\gamma)\|r(s+1)\|^2 + \sigma^{-2}\tau^{-2}(1+4\mu_0\theta_1\sigma\tau)\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} \le (1-4\gamma)\|r(s)\|^2 + \sigma^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}},$$

$\gamma = \mu_1\sigma^{-1}\Delta^{-1}\tau^{-1}$, из которой и следует утверждение теоремы. □

Для сходимости итерационного процесса (7) при $\sigma = \sigma_0/2$ справедливы теоремы, аналогичные теоремам 2, 3.

Замечание. Предложенный в работе подход может быть эффективно использован при построении алгоритмов декомпозиции области. В этом случае применение многокомпонентного метода переменных направлений в сочетании с методом конечных элементов позволяет конструировать явные итерационные схемы на минимальных подобластях [12].

Литература

1. Марчук Г.И. *Методы расщепления.* – М.: Наука, 1988. – 264 с.
2. Marchuk G.I., Kuzin V.I. *On the combination of finite element and splitting-up methods in the solution of parabolic equations* // J. Comput. Phys. – 1983. – V. 52. – № 2. – P. 237–272.
3. Кузин В.И. *Численная модель глобальной циркуляции океана, основанная на методе конечных элементов с расщеплением* // Численное моделирование динамики океана и внутренних водоемов. – Новосибирск, 1984. – С. 118–140.
4. Лаевский Ю.М. *Методы декомпозиции области при решении двумерных параболических уравнений* // Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа. – Новосибирск, 1987. – С. 112–128.

5. Лаевский Ю.М. *Об одном алгоритме декомпозиции области без налегания подобластей при решении параболических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32. – № 11. – С. 1744–1755.
6. Peaceman D.W., Rachford H.H *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations* // J. Soc. Industr. and Appl. Math. – 1955. – V. 3. – № 1. – P. 28–41.
7. Douglas J. *On the numerical integration of* $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = \partial u/\partial t$ *by implicit methods* // J. Soc. Industr. and Appl. Math. – 1955. – V. 3. – № 1. – P. 42–65.
8. Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г. *Разностные схемы для задач математической физики в области произвольной формы* // Дифференц. уравнения и их применение. – Вильнюс, 1988. – № 43. – С. 22–30.
9. Абрашин В.Н. *Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 2. – С. 314–323.
10. Абрашин В.Н., Муха В.А. *Об одном классе экономичных разностных схем для решения многомерных задач математической физики* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 10. – С. 1186–1199.
11. Абрашин В.Н., Лэхтиков С.Н. *О сочетании методов переменных направлений и конечных элементов при решении задач математической физики.* I // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 7. – С. 1161–1169.
12. Абрашин В.Н., Лэхтиков С.Н. *О сочетании методов переменных направлений и конечных элементов при решении задач математической физики.* II // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 7. – С. 889–897.
13. Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г. *Об одном методе композиции построения итерационных алгоритмов решения стационарных задач математической физики* // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 7. – С. 948–958.
14. Абрашин В.Н., Егоров А.А., Жадаева Н.Г., Самарская Н.Г. *Итерационный многокомпонентный метод переменных направлений решения стационарных задач математической физики* // Тр. ин-та матем. НАН Беларуси. – 1999. – Т. 3. – С. 99–105.
15. Абрашин В.Н. *Многокомпонентные итерационные методы переменных направлений* // Матем. моделир. – 2000. – Т. 12. – № 2. – С. 45–58.

Институт математики Национальной
Академии Наук Беларуси,
Белорусский государственный университет

Поступила
05.05.2000