ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 12 (427)

УДК 519.854

А.А. ГОЛИКОВ, Ю.Г. ЕВТУШЕНКО

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Для модифицированной функции Лагранжа (МФЛ) в задаче линейного программирования (ЛП) будет определено точное значение коэффициента штрафа, начиная с которого решение задачи линейного программирования находится в результате однократной минимизации выпуклой квадратичной функции на положительном ортанте.

Рассмотрим прямую и двойственную задачи линейного программирования

$$f_* = \min_{x\in X} c^\top x, \quad X = \{x \in R^n_+ : b - Ax = 0_m\}, \tag{1}$$

$$\max_{u\in U} b^\top u, \quad U = \|u \in R^m : c - A^\top u \geq 0_n\}. \tag{2}$$

Здесь и ниже A — матрица $m\times n$ ранга m, $m < n$, ее дефект $d = n - m$, ее векторы $c \in R^n$, $b \in R^m$, $x \in R^n_+$, $u \in R^m$, через 0_i обозначен нулевой i-мерный вектор.

Для решения задачи ЛП воспользуемся модифицированной функцией Лагранжа

$$H(x, u, \varepsilon) = c^\top x + u^\top(b - Ax) + \|b - Ax\|^2/2\varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — коэффициент штрафа, $\|a\|$ — евклидова норма вектора a из соответствующего пространства.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\min_{x\in R^n_+} H(x, \tilde u, \varepsilon) \tag{3}$$

при фиксированном векторе множителей Лагранжа $\tilde u$. Если $\tilde u \equiv 0_m$, то задача (3) связана с методом внешних квадратичных штрафных функций. Приводимые ниже результаты очевидным образом распространяются и на этот случай.

Будем считать, что прямая задача ЛП (1) имеет единственное, быть может, вырожденное решение x_*. В этом решении $x^L_* > 0_l$ — совокупность положительных компонент, $l < m$. В случае невырожденного решения $l = m$. Обозначим индексное множество, соответствующее положительным компонентам вектора x_*, через I^L_*. Если x_* — вырожденное решение, то двойственная задача ЛП (2) имеет неединственное решение. Из множества решений U_* двойственной задачи (2) выделим решение u_*, ближайшее в евклидовой норме к некоторому заданному вектору $\tilde u$. Поэтому u_* является решением задачи

$$\min\{\|u - \tilde u\|^2/2 : c - A^\top u \geq 0_n,\ b^\top u \geq f_*\}, \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 96-01-01046) и по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта № 96-15-96124).

и в точке $[x_*, u_*]$ выполнены условия Куна–Таккера для задачи (1), которые можно более детально записать в виде

$$\begin{aligned} &v_*^L = c^L - B_L^\top u_* = 0_l, \quad x_*^L > 0_l; \quad v_*^S = c^S - B_S^\top u_* = 0_s, \quad x_*^S = 0_s; \\ &v_*^N = c^N - N^\top u_* > 0_d, \quad x_*^N = 0_d; \qquad B_L x_*^L = b. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь матрица A представлена в соответствии с разбиением вектора невязок $v_* = c - A^\top u_*$ ограничений двойственной задачи (2) на нулевые $[[v_*^L]^\top, [v_*^S]^\top] = [v_*^B]^\top = 0_m$ и положительные $v_*^N > 0_d$ компоненты и имеет вид $A = [B \vdots N]$. Используя это разбиение, получим $[x_*]^\top = [[x_*^B]^\top, [x_*^N]^\top]$. В свою очередь матрица B представлена в соответствии с разбиением вектора x_*^B на положительные x_*^L и нулевые x_*^S компоненты, т.е. $B = [B_L \vdots B_S]$. В силу единственности решения x_* матрица B состоит из $l + s = m$ линейно независимых столбцов.

Для дальнейшего потребуется вектор $\eta = (B^\top B)^{-1}(c^B - B\tilde{u})$, который легко приводится к виду $\eta = B^{-1}(u_* - \tilde{u})$.

Лемма. *Решение u_* задачи (4) представимо в виде*

$$u_* = \tilde{u} + B\eta = \tilde{u} + B_L\eta^L + B_S\eta^S,$$

где $\eta^S \leq 0_s$.

Доказательство. Вектор u_* является единственным решением задачи (4), следовательно, существуют такие множители Лагранжа $\bar{x} \geq 0_n$, $\bar{t} \geq 0$, что точка $[u_*, \bar{x}, \bar{t}]$ удовлетворяет условиям Куна–Таккера для задачи (4)

$$\begin{aligned} &D(\bar{x})v_* = 0_n, \quad v_* = c - A^\top u_* \geq 0_n, \quad \bar{x} \geq 0_n; \\ &u_* - \tilde{u} - \bar{t}b + A\bar{x} = 0_m, \quad b^\top u_* = f_*, \quad \bar{t} \geq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая, что точка $[x_*, u_*]$ удовлетворяет условиям Куна–Таккера (5), перепишем соотношения (6) в виде

$$v_*^B = c^B - B^\top u_* = 0_m, \quad \bar{x}^B \geq 0_m; \qquad v_*^N = c^N - N^\top u_* > 0_d, \quad \bar{x}^N = 0_d; \tag{7}$$

$$u_* - \tilde{u} - \bar{t}b + B\bar{x}^B = 0_m, \quad b^\top u_* = f_*, \quad \bar{t} \geq 0. \tag{8}$$

Решая систему уравнений (7) и (8), получим

$$\bar{x}^B = \bar{t}(B^\top B)^{-1}B^\top b - \eta \geq 0_m, \quad u_* = \tilde{u} + \bar{t}Mb + B\eta. \tag{9}$$

Здесь $M = I - B(B^\top B)^{-1}B^\top$ — матрица проектирования и, т.к. вектор b лежит в пространстве столбцов матрицы B_L, то $Mb = 0_m$. Из невырожденности матрицы B следует, что существует только один вектор $\eta = \begin{bmatrix} \eta^L \\ \eta^S \end{bmatrix}$ такой, что $u_* - \tilde{u} = B\eta = B_L\eta^L + B_S\eta^S$. Покажем, что $-\eta^S \geq 0_s$. Из условия $Bx_*^B = b$ следует

$$x_*^B = (B^\top B)^{-1}B^\top b = \begin{bmatrix} x_*^L \\ x_*^S \end{bmatrix} \begin{matrix} > 0_l, \\ = 0_s. \end{matrix}$$

С учетом этого из (9) получаем

$$\bar{x}^B = \begin{bmatrix} \bar{x}^L \\ \bar{x}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{t}x_*^L - \eta^L \\ -\eta^S \end{bmatrix} \geq 0_m, \tag{10}$$

что и завершает доказательство леммы.

Определим величину

$$\varepsilon_* = \begin{cases} \min\limits_{i \in I_*^L,\, (\eta^L)^i > 0} (x_*^L)^i / (\eta^L)^i; \\ +\infty, \qquad \text{если } (\eta^L)^i \leq 0 \text{ при всех } i \in I_*^L. \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть задача ЛП* (1) *имеет единственное, быть может, вырожденное решение x_*. Тогда при любом $0 < \varepsilon \le \varepsilon_*$, где ε_* определяется формулой* (11),

1) *единственным решением задачи* (3) *является вектор $x(\varepsilon)$ с компонентами $x^L(\varepsilon) = x^L_* - \varepsilon\eta^L \ge 0_l$, $x^S(\varepsilon) = -\varepsilon\eta^S \ge 0_s$ и $x^N(\varepsilon) = 0_d$;*
2) *решение двойственной задачи* (2) *определяется по формуле*

$$u_* = \bar{u} + [b - Ax(\varepsilon)]/\varepsilon. \tag{12}$$

Доказательство. Необходимые и достаточные условия минимума для задачи (3) запишем в следующем виде:

$$\varepsilon(c^L - B_L^\top \tilde{u}) - B_L^\top(b - B_L x^L(\varepsilon) - B_s x^S(\varepsilon)) = 0_l, \quad x^L(\varepsilon) \ge 0_l; \tag{13}$$
$$\varepsilon(c^S - B_S^\top \tilde{u}) - B_L^\top(b - B_L x^L(\varepsilon) - B_s x^S(\varepsilon)) = 0_s, \quad x^S(\varepsilon) \ge 0_s; \tag{14}$$
$$\varepsilon(c^N - N^\top \tilde{u}) - N_L^\top(b - B_L x^L(\varepsilon) - B_s x^S(\varepsilon)) \ge 0_d, \quad x^N(\varepsilon) = 0_d. \tag{15}$$

Так как матрица $B = [B_L \vdots B_s]$ невырождена, то система уравнений в (13), (14) имеет единственное решение

$$x^B(\varepsilon) = \begin{bmatrix} x^L(\varepsilon) \\ x^S(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^L_* - \varepsilon\eta^L \\ -\varepsilon\eta^S \end{bmatrix} \ge 0_m. \tag{16}$$

Подставляя его в (15), получаем $\varepsilon(c^N - N^\top\tilde{u}) - N^\top(b - B_L x^L_* + \varepsilon B_L \eta^L + \varepsilon B_s \eta^S) = \varepsilon(c^N - N^\top(\tilde{u} + B\eta)) = \varepsilon(c^N - N^\top u_*) = \varepsilon v^N_* > 0_d$ при любом положительном ε.

Утверждение леммы о том, что $\eta^S \le 0_s$, и диапазон изменения ε из условия теоремы обеспечивают выполнение неравенства (16). Следовательно, система (13)-(15) совместна и утверждение 1) доказано.

Доказательство утверждения 2) получается подстановкой решения $x(\varepsilon)$ из 1) в формулу (12). $\square$

Замечание 1. Отметим важный частный случай невырожденного решения x_* задачи (1). Тогда при любом $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ индексы ненулевых компонент векторов $x(\varepsilon)$ и x_* совпадают. С вычислительной точки зрения это дает возможность приближенно решить задачу (3). Определив индексное множество положительных компонент решения $x(\varepsilon)$, сразу получаем оптимальный базис — матрицу B.

Замечание 2. Как следует из формул (10) и (16), между решением $x(\varepsilon)$ задачи (3) и множителями Лагранжа $\bar{x}$ для задачи (4) существует определенная связь. Формула (10) справедлива при любом $\bar{t} \ge 1/\varepsilon_*$. Полагая $\bar{t} = 1/\varepsilon$, из (10) и (16) имеем $x^B(\varepsilon) = \varepsilon\bar{x}^B$ при любом $0 < \varepsilon \le \varepsilon_*$.

2. Известно (см., напр., [1]), что задача (3) является двойственной к задаче

$$\max_{u \in U} b^\top u - \|u - \tilde{u}\|^2/2\varepsilon, \quad U = \{u \in R^m : c - A^\top u \ge 0_n\} \tag{17}$$

и решения $x(\varepsilon)$ и $u(\varepsilon)$ соответственно задач (3) и (17) связаны между собой соотношением

$$u(\varepsilon) = \tilde{u} + (b - Ax(\varepsilon))/\varepsilon.$$

В силу этой двойственности прямым следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда единственное решение задачи* (17) *не зависит от ε и совпадает с вектором u_*, который является решением задачи* (2), *ближайшим к вектору $\tilde{u}$ в евклидовой норме.*

Замечание 3. По-видимому, первой работой, в которой рассматривался вопрос о совпадении решения задачи (17) (в случае $\tilde{u} \equiv 0_m$) с решением задачи (2), была работа [2]. Для этого же случая в [3]–[5] были получены оценки ε_*, использующие множитель Лагранжа $\bar{t}$ для задачи (4). В предположении разрешимости задачи ЛП результат о конечности метода МФЛ (задача (3)) был впервые получен в [6]. В [7] этот вопрос подробно исследован с помощью функции чувствительности.

Литература

1. Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию.* – М.: Наука, 1983. – 384 с.
2. Удзава Х. *Итерационные методы вогнутого программирования* // К.Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. – М.: Ин. лит., 1962. – С. 228–245.
3. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. *Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука, 1976. – 192 с.
4. Mangasarian O.L., Meyer R.R. *Nonlinear perturbation of linear programs* // SIAM J. Control and Optim. – 1979. – V. 17. – № 6. – P. 745–752.
5. Mangasarian O.L. *Normal solutions of linear programs* // Math. Program. Study. – 1984. – V. 22. – P. 206–216.
6. Поляк Б.Т., Третьяков Н.В. *Об одном итерационном методе линейного программирования и его экономической интерпретации* // Экономика и матем. методы. – 1972. – Т. 8. – № 5. – С. 740–751.
7. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. *Модифицированные функции Лагранжа.* – М.: Наука, 1989. – 400 с.

Вычислительный центр
Российской Академии наук

Поступила
19.06.1997