ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 12 (427)

УДК 519.852

Э.Х. ГИМАДИ, В.В. ЗАЛЮБОВСКИЙ

ЗАДАЧА УПАКОВКИ В КОНТЕЙНЕРЫ: АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ ПОДХОД

1.

Одномерная задача упаковки в контейнеры [1] формулируется следующим образом. *Заданы список $S = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ предметов и вместимость контейнера B. Требуется предметы из списка S разместить в минимальное число контейнеров таким образом, чтобы сумма весов предметов в каждом контейнере не превосходила B.*

Далее a_i будем использовать для обозначения как предмета с номером i, так и его веса. Естественно предполагать, что $0 < a_i \le B$ для всех $i = 1, \dots, n$. Эта задача NP-трудна [2]. Уже в первых работах, посвященных задаче упаковки, был предложен целый ряд приближенных малотрудоемких алгоритмов и установлены гарантированные оценки их относительной погрешности в наихудшем случае [2]. Тогда же было отмечено, что поведение этих алгоритмов "в среднем" существенно отличается от полученных оценок, что по-видимому стимулировало появление статей, посвященных вероятностному исследованию этой задачи. Эти работы, как правило, содержат либо исследование отношения математического ожидания числа контейнеров, требуемых некоторым приближенным алгоритмом, к ожидаемому оптимальному числу контейнеров [3], [4], либо описание вероятностных свойств оптимального решения [5].

В настоящей работе для исследования качества приближенного алгоритма используется идея построения алгоритмов с оценками (ε, δ), предложенная в [6]. Суть этого подхода изложена в разделе 2. В разделе 3 описываются функции распределения весов предметов, рассматриваемые далее. Это так называемые B-асимметричные и B-регулярные списки. Раздел 4 содержит описание приближенного алгоритма $\mathcal{A}$ решения задачи упаковки в контейнеры и обоснование оптимальности этого алгоритма в случае детерминированных B-асимметричных и B-регулярных списков. Разделы 5–7 посвящены исследованию поведения модифицированного приближенного алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$ на списках со случайными весами предметов. Так в разделе 5 доказывается теорема о верхней оценке вероятности несрабатывания алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$. В разделах 6 и 7 устанавливаются условия асимптотической точности $\widetilde{\mathcal{A}}$ применительно к B-асимметричным и B-регулярным функциям распределения соответственно.

2.

Пусть имеется некоторый алгоритм $\mathcal{A}$ для решения оптимизационной задачи на минимум. Обозначим $F_{\mathcal{A}}(S)$, $F^*(S)$ — значения целевых функций на решении индивидуальной задачи S, получаемом с помощью алгоритма $\mathcal{A}$, и на оптимальном решении соответственно. Будем говорить, что алгоритм $\mathcal{A}$ *удовлетворяет оценкам* $(\varepsilon_n, \delta_n)$ на классе задач $\mathcal{K}_n$ размерности n, если для всех $S \in \mathcal{K}_n$ выполнено неравенство

$$Pr\{F_{\mathcal{A}}(S) > (1 + \varepsilon_n)F^*(S)\} \le \delta_n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 96-01-01591 и 97-01-00890).

Алгоритм $\mathcal{A}$ называется *асимптотически точным* на классе задач $\mathcal{K}$, если существуют такие последовательности (ε_n), (δ_n), что для любого n алгоритм $\mathcal{A}$ удовлетворяет оценкам $(\varepsilon_n, \delta_n)$ на подмножестве $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}$ задач размерности n и при этом $\varepsilon_n \to 0$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Параметры (ε_n) и (δ_n) можно рассматривать как оценки *относительной погрешности* и *вероятности несрабатывания* алгоритма соответственно.

Использование техники оценок $(\varepsilon_n, \delta_n)$ позволило установить условия асимптотической точности малотрудоемких приближенных алгоритмов для решения ряда трудноРешаемых задач дискретной оптимизации [7]–[12], в том числе для задачи упаковки в контейнеры для случайных списков с симметричными и невозрастающими функциями распределения весов [9], [11]. В данной работе исследуется модифицированный алгоритм решения задачи упаковки в контейнеры и проводится обоснование его асимптотической точности для существенно более широкого класса задач.

3.

Далее полагаем $a_i \in I_B$, где $I_B = \{1, 2, \dots, B\}$ (B целое). Введем в рассмотрение характеристическую функцию (х. ф.) χ_S списка S : $\chi_S(r)$ — число предметов веса r в списке S, $r \in I_B$. Будем использовать обозначения: $\lfloor x \rfloor$ — ближайшее целое число, не большее x; $\lceil x \rceil$ — ближайшее целое число, не меньшее x; $\{x\}$ — дробная часть x ($\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$).

Неотрицательную функцию f целочисленного аргумента $r \in I_b$ будем называть *b-асимметричной* (*b–симметричной*), если $f(r) \le f(b - r)$ ($f(r) = f(b - r)$) при $r = 1, \dots, \lfloor b/2 \rfloor$ и $f(r) = 0$ при $r > b$.

Понятно, что класс B-асимметричных функций включает в себя B-симметричные функции, неубывающие функции, функции с постоянным значением. Кроме того, асимметричность списка эквивалентна представлению его в виде максимального B-симметричного подсписка и оставшегося подсписка предметов, имеющих веса, превосходящие $B/2$.

Функцию f будем назвать *B-регулярной* при $B = 2^Q$, Q целое, если она представима в виде суммы 2^k-симметричных функций $f^{(k)}$, $k \in I_Q$,

$$f(r) = \sum_{k=1}^{Q} f^{(k)}(r), \quad r \in I_B.$$

Разложение B-регулярной функции f на 2^k-симметричные составляющие $f^{(k)}$, $k \in I_Q$, можно найти с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$f^{(k)}(r) = \begin{cases} f_k(2^k - r) & \text{при } 1 \le r < 2^{k-1}; \\ f_k(r) & \text{при } 2^{k-1} \le r \le 2^k; \\ 0 & \text{при } r > 2^k, \end{cases} \qquad f_{k-1}(r) = \begin{cases} f_k(r) - f^{(k)}(r) & \text{при } 1 \le r \le 2^{k-1}; \\ 0 & \text{при } r > 2^{k-1}, \end{cases} \tag{1}$$

где $f_Q(r) = f(r)$ при $r \in I_B$.

Из соотношений (1) следует, во-первых, что фигурирующие в них функции f_k являются 2^k-регулярными; во-вторых, необходимым и достаточным условием B-регулярности функции f является выполнение неравенств

$$f_k(r) \ge f^{(k)}(2^k - r), \quad r = 1, \dots, 2^{k-1}, \quad k \in I_Q;$$

в-третьих, разложение B-регулярной функции может быть записано в виде

$$f(r) = \sum_{k=k_r}^{Q} f^{(k)}(r), \quad r \in I_B,$$

где

$$k_B = Q; \quad k_r = \min\{\, k \mid r < 2^k \} = \lceil \log_2 (r + 1) \rceil, \quad 1 \le r < B.$$

Важным подклассом B-регулярных функций являются невозрастающие функции $f(r)$, $r \in I_B$, где $B = 2^Q$, Q — целое.

Лемма 1 ([9]). *Невозрастающая функция $f(r)$, $r \in I_B$, (где $B = 2^Q$, Q целое) является B-регулярной.*

4.

Будем называть *b-связкой* предмет веса b либо пару предметов с весами r и $b - r$ при $r = 1, \ldots, \lfloor b/2 \rfloor$.

Опишем приближенный алгоритм $\mathcal{A}$ упаковки предметов в контейнеры, предложенный авторами в [9]. В случае $B = 2^Q$, Q целое, алгоритм $\mathcal{A}$ последовательно для $k = Q, Q-1, \ldots, 1$ образует список 2^k-связок и упаковывает этот список в контейнеры по принципу алгоритма NFD ("следующий пригодный с предварительным упорядочением по невозрастанию"). Предметы подсписка $S' \subset S$, не вошедшие в полностью заполненные контейнеры, упаковываем с помощью NF-алгоритма ("следующий пригодный"). Описание алгоритмов NFD и NF можно найти в [1], [2].

В случае B-асимметричных списков, а также при $B \neq 2^Q$, Q целое, будем использовать упрощенную версию алгоритма $\mathcal{A}$: заполняем контейнеры B-связками, а оставшиеся предметы $a_i \in S'$ размещаем с помощью NF-алгоритма.

При $B \leq cn$, где $c > 0$ — константа, алгоритм $\mathcal{A}$ имеет линейную относительно n трудоемкость. Ясно, что при $\sum\{a_i \mid i \in S'\} \leq B$ алгоритм $\mathcal{A}$ приводит к точному решению задачи.

Лемма 2 ([9]). *В случае B–регулярных списков S алгоритм $\mathcal{A}$ находит точное решение задачи упаковки в контейнеры со значением целевой функции $F_{\mathcal{A}} = F_S^*$, равной*

$$\left\lceil \frac{1}{B} \sum_{r=1}^{B} r\chi_S(r) \right\rceil.$$

Лемма 3. *В случае B-асимметричных списков S упрощенный алгоритм $\mathcal{A}$ находит точное решение задачи упаковки в контейнеры со значением целевой функции, равной*

$$\sum_{r=\lceil (B+1)/2 \rceil}^{B} \chi_S(r) + \left\lceil \left\{ \frac{B+1}{2} \right\} \chi_S(\lfloor B/2 \rfloor) \right\rceil.$$

Доказательство. Действительно, в случае B-асимметричных списков упрощенный алгоритм $\mathcal{A}$ упаковывает предметы в минимальное число контейнеров, равное при нечетном B количеству $\sum\{\chi_S(r) \mid B/2 \leq r \leq B\}$ всех предметов, вес которых превышает половину вместимости контейнера. При четном B к этому числу добавляются $\lceil 0.5\chi_S(B/2) \rceil$ контейнеров, содержащих предметы веса $B/2$. Тогда добавочный член можно записать в виде $\lceil \{0.5(B+1)\}\chi_S(\lfloor B/2 \rfloor) \rceil$, что дает 0 и $\lceil 0.5\chi_S(B/2) \rceil$ соответственно при нечетных и четных B. $\square$

5.

Приступим теперь к исследованию задач упаковки в контейнеры со случайными списками $S = \{a_i \mid i \in I_n\}$, в которых веса предметов — независимые случайные величины с дискретной функцией распределения

$$p_r = Pr\{a_i = r\} \geq 0, \quad r = 1, \ldots, B; \quad \sum_{r=1}^{B} p_r = 1. \tag{2}$$

Далее исследуем класс $\mathcal{K}'_n$ задач упаковки предметов в контейнеры со следующим механизмом формирования случайных списков: в ходе n последовательных независимых испытаний очередной предмет a_i попадает в один из весовых классов $r = 1, \dots, B$ в соответствии с функцией распределения (2). При таком способе формирования значения $\chi_S(1), \dots, \chi_S(B)$ характеристической функции списка S являются, вообще говоря, зависимыми случайными величинами, поскольку они связаны соотношением $\sum\{\chi_S(r) \mid r \in I_B\} = n$.

Возникает естественный вопрос о возможности построения малотрудоемких алгоритмов решения задач из класса $\mathcal{K}'_n$ в случае функций распределения, обладающих свойствами, аналогичными тем, которые для детерминированных списков позволяют применить эффективный точный алгоритм $\mathcal{A}$. Поставленный вопрос не имеет тривиального ответа, поскольку соответствующее свойство функций распределения p_r для характеристических функций $\chi_S(r)$ конкретной реализации случайного списка, вообще говоря, не сохраняется.

Заметим, что в случае, когда веса предметов — случайные величины, определение класса задач связано с видом функции распределения (2).

Для решения задач из класса $\mathcal{K}'_n$ будем применять *модифицированный приближенный алгоритм* $\widetilde{\mathcal{A}}$, который использует решение, полученное с помощью алгоритма $\mathcal{A}$ для некоторого *оценочного* списка $\widetilde{S}$ при условии, что он мажорирует исходный список S, т. е. для любого весового класса $r = 1, \dots, B$ выполнены неравенства

$$\chi_S(r) \le \chi_{\widetilde{S}}(r). \tag{3}$$

Среди случайных списков S выделим множество S_Δ списков, у которых для всякого $r \in I_B$ выполнены соотношения

$$|\chi_S(r) - np_r| \le \Delta_r, \tag{4}$$

где $\Delta_r = 2(np_r(1-p_r)\ln n)^{1/2}$.

Применяем алгоритм $\widetilde{\mathcal{A}}$ только в том случае, если конкретная реализация случайного списка принадлежит множеству S_Δ, в противном случае считаем, что алгоритм не сработал.

Итак, в случае списка из S_Δ применяем сначала алгоритм $\mathcal{A}$ к оценочному списку $\widetilde{S}$, а затем, удалив из загруженных контейнеров предметы, не принадлежащие исходному списку S, получаем решение задачи с числом контейнеров $F_{\widetilde{\mathcal{A}}}$.

При оценивании вероятности несрабатывания алгоритма понадобятся неравенства для вероятностей больших отклонений суммы $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$, распределенных по закону Бернулли

$$Pr\{\xi_i = 1\} = p; \quad Pr\{\xi_i = 0\} = 1 - p, \quad i = 1, \dots, n.$$

Лемма 4 ([13], гл. 5, с. 131). *При* $\Delta \ge 0$

$$Pr\{S_n - np \ge \Delta\} \le \exp(-nH(p + \Delta/n)), \quad Pr\{S_n - np \le -\Delta\} \le \exp(-nH(p - \Delta/n)),$$

где $H(x) = x\ln(x/p) + (1-x)\ln((1-x)/(1-p))$.

Отсюда с учетом соотношений

$$-nH(p + \Delta/n) = -\frac{\Delta^2}{2np(1-p)} + o(1), \quad -nH(p - \Delta/n) = -\frac{\Delta^2}{2np(1-p)} + o(1),$$

верных при $\Delta = o(n^{2/3})$ ([13], гл. 5, с. 131), имеем

Следствие. При $\Delta = o(n^{2/3})$ справедливо неравенство

$$Pr\{|S_n - np| \ge \Delta\} \le c\exp\Big(-\frac{\Delta^2}{2np(1-p)}\Big),$$

где $c = 2(1 + o(1))$.

Теорема 1. *Вероятность несрабатывания алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$ на классе задач $\mathcal{K}'_n$ ограничена сверху величиной $O(B/n^2)$.*

Доказательство. Обозначив через A_r событие, задаваемое (4), для вероятности несрабатывания алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$ имеем

$$\delta_{\widetilde{\mathcal{A}}} = Pr\Big\{\bigcup_{r=1}^{B} \bar{A}_r\Big\} \leq \sum_{r=1}^{B} Pr(\bar{A}_r),$$

где $\bar{A}_r$ — событие, противоположное A_r.

Поскольку $\Delta_r \leq 2(np_r(1-p_r)\ln n)^{1/2} = o(n^{2/3})$, то согласно следствию из леммы 4 получим

$$\delta_{\widetilde{\mathcal{A}}} \leq c\sum_{r=1}^{B} \exp\Big(-\frac{\Delta_r^2}{2np_r(1-p_r)}\Big) = c\sum_{r=1}^{B} \exp\Big(-\frac{4np_r(1-p_r)\ln n}{2np_r(1-p_r)}\Big) = \frac{cB}{n^2}. \quad \square$$

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие. Если $B = o(n/\ln n)$, то $\delta_{\widetilde{\mathcal{A}}} = o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.

Перейдем теперь к оценке точности алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$ на классе задач $\mathcal{K}'_n$.

6.

В случае B-асимметричной функции p_r, $r = 1, \ldots, B$, применяем алгоритм $\widetilde{\mathcal{A}}$, полагая характеристическую функцию оценочного списка $\widetilde{S}$ равной

$$\chi_{\widetilde{S}}(r) = \lfloor np_r + \Delta_r \rfloor, \quad r = 1, \ldots, B. \tag{5}$$

Свойство оценочности (3) списка $\widetilde{S}$ вытекает из определения (5) и условий (4) срабатывания алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Теорема 2. *Алгоритм $\widetilde{\mathcal{A}}$ на классе $\mathcal{K}'_n$ задач упаковки в контейнеры с B-асимметричной функцией p_r имеет оценку относительной погрешности*

$$\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{A}}} = O\Big(\sqrt{\frac{B}{n/\ln n}}\ \Big)$$

и асимптотически точен при $B = o(n/\ln n)$.

Доказательство. Заметим, что в случае $\Delta_r = 2(np_r(1-p_r)\ln n)^{1/2}$, из B-асимметричности функции p_r следует B-асимметричность вектора Δ_r, т.к. при этом $(p_r - p_{B-r})(1 - p_r - p_{B-r}) \leq 0$, или $p_r(1-p_r) \leq p_{B-r}(1-p_{B-r})$, откуда $\Delta_r \leq \Delta_{B-r}$, $r = 1, \ldots, \lfloor B/2 \rfloor$. Поэтому B–асимметрична и характеристическая функция (5) оценочного списка $\widetilde{S}$ как целая часть линейной комбинации двух функций, являющихся B-асимметричными.

Оценим относительную погрешность $\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{A}}} = (F_{\widetilde{\mathcal{A}}} - F_S^*)/F_S^*$ алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$. Введем для удобства обозначение

$$\Sigma_r x_r = \sum_{r=\lceil (B+1)/2 \rceil}^{B} x_r.$$

В качестве оценки снизу для минимального значения целевой функции при нечетных B возьмем число $\Sigma_r \chi_S(r)$ (т. е. количество предметов, имеющих вес больше половины вместимости контейнера), а при четных B к этому числу добавим величину $\chi_S(B/2)/2$. Это с учетом (4) дает оценку снизу

$$F_S^* \geq \Sigma_r \chi_S(r) + \chi_S\left(\left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor\right)\left\{\frac{B+1}{2}\right\} \geq$$

$$\geq \Sigma_r(np_r - \Delta_r) + (np_{\lfloor B/2 \rfloor} - \Delta_{\lfloor B/2 \rfloor})\left\{\frac{B+1}{2}\right\} =$$

$$= n\left(\Sigma_r p_r + p_{\lfloor B/2 \rfloor}\left\{\frac{B+1}{2}\right\}\right) - \Sigma_r \Delta_r.$$

Получим верхнюю оценку для значения целевой функции после работы алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$

$$F_{\widetilde{\mathcal{A}}} \leq F^*_{\widetilde{S}} = \Sigma_r \chi_{\widetilde{S}}(r) + \left\lceil \chi_{\widetilde{S}}\left(\left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor\right)\left\{\frac{B+1}{2}\right\}\right\rceil \leq$$

$$\leq \Sigma_r(np_r + \Delta_r) + (np_{\lfloor B/2 \rfloor} + \Delta_{\lfloor B/2 \rfloor})\left\{\frac{B+1}{2}\right\} + \frac{1}{2}.$$

Оценим $\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{A}}}$, учитывая, что для B-асимметричной функции справедливо неравенство $\Sigma_r p_r + p_{\lfloor B/2 \rfloor}\{(B+1)/2\} \geq 1/2$,

$$\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{A}}} \leq \frac{\Sigma_r(np_r + \Delta_r) + (np_{\lfloor B/2 \rfloor} + \Delta_{\lfloor B/2 \rfloor})\{\frac{B+1}{2}\} + \frac{1}{2}}{n(\Sigma_r p_r + p_{\lfloor B/2 \rfloor}\{\frac{B+1}{2}\}) - \Sigma_r \Delta_r} - 1 \leq \frac{2\Sigma_r \Delta_r + 1/2}{n/2 - \Sigma_r \Delta_r}.$$

С учетом $\Delta_r \leq 2\sqrt{np_r \ln n}$ и $\Sigma_r \sqrt{p_r} \leq \sqrt{B}$ имеем

$$\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{A}}} \leq \frac{4\sqrt{n \ln n}\, \Sigma_r \sqrt{p_r} + 1/2}{n/2 - 2\sqrt{n \ln n}\, \Sigma_r \sqrt{p_r}} \leq 8\sqrt{\frac{B}{n/\ln n}} \frac{1 + \frac{1}{8\sqrt{n \ln n}}}{1 - 4(\frac{B}{n/\ln n})^{1/2}} = O\left(\sqrt{\frac{B}{n/\ln n}}\right).$$

В силу следствия из теоремы 1 имеем $\delta_{\widetilde{\mathcal{A}}} = o(1/(n \ln n))$ и, таким образом, алгоритм $\widetilde{\mathcal{A}}$ в условиях доказываемого утверждения имеет оценки $\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{A}}} \to 0$, $\delta_{\widetilde{\mathcal{A}}} \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. является асимптотически точным. □

Замечание. Если максимальный размер предмета ограничен числом R, меньшим B, то утверждение теоремы 2 можно скорректировать, заменив B на R.

7.

Перейдем теперь к анализу точности алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$ на классе $\mathcal{K}'_n$ задач с B-регулярной функцией распределения p_r.

Выпишем разложение функции p_r на 2^k-симметричные составляющие $p_r^{(k)}$, $k = 1, \dots, Q$,

$$p_r = \sum_{k=k_r}^{Q} p_r^{(k)}, \quad r = 1, \dots, B. \tag{6}$$

Введем обозначения для функций

$$\varphi(x) = nx + 2(nx \ln n)^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$g_r^{(k)} = \begin{cases} \lfloor \varphi(p_r^{(Q)}) \rfloor & \text{при } k = Q, \\ \lceil \varphi(p_r^{(k)}) \rceil & \text{при } 1 \leq k < Q \end{cases} \quad (r = 1, \dots, B)$$

и определим список $\widetilde{S}$ по его характеристической функции

$$\chi_{\widetilde{S}}(r) = \sum_{k=k_r}^{Q} g_r^{(k)}, \quad r = 1, \dots, B. \tag{7}$$

Лемма 5. *Список $\widetilde{S}$, определенный в (7), является B-регулярным, а в случае срабатывания алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$ и оценочным.*

Доказательство. Из 2^k-симметричности функций $p_r^{(k)}$ следует, что таковыми являются и функции $\sqrt{p_r^{(k)}}$. Очевидно также, что функции $\varphi(p_r^{(k)})$ являются 2^k-симметричными как линейные комбинации 2^k-симметричных функций $p_r^{(k)}$ и $\sqrt{p_r^{(k)}}$. Отсюда также следует 2^k-симметричность функций $g_r^{(k)}$. Все это в целом влечет B-регулярность указанного списка $\widetilde{S}$ в силу представления его характеристической функции $\chi_S(r)$ в виде суммы 2^k-симметричных функций.

Покажем, что при срабатывании алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$ список $\widetilde{S}$ является оценочным. Действительно, в этом случае выполнены неравенства

$$\chi_S(r) \le \lfloor np_r + \Delta_r \rfloor, \quad r = 1, \ldots, B.$$

С другой стороны, с учетом формулы (6) разложения функции распределения и неравенства $\left(\sum\limits_i x_i\right)^{1/2} \le \sum\limits_i x_i^{1/2}$, $x_i \ge 0$, убеждаемся в справедливости неравенств (3):

$$\lfloor np_r + \Delta_r \rfloor = \lfloor np_r + 2(np_r(1-p_r)\ln n)^{1/2} \rfloor \le$$
$$\le \lfloor np_r + 2(np_r \ln n)^{1/2} \rfloor = \Big\lfloor n \sum_{k=k_r}^{Q} p_r^{(k)} + 2\Big(n \ln n \sum_{k=k_r}^{Q} p_r^{(k)}\Big)^{1/2} \Big\rfloor \le$$
$$\le \Big\lfloor n \sum_{k=k_r}^{Q} p_r^{(k)} + 2\sqrt{n \ln n} \sum_{k=k_r}^{Q} \sqrt{p_r^{(k)}} \Big\rfloor = \Big\lfloor n \sum_{k=k_r}^{Q} \varphi(p_r^{(k)}) \Big\rfloor \le$$
$$\le \sum_{k=k_r}^{Q} g_r^{(k)} = \chi_{\widetilde{S}}(r), \quad r = 1, \ldots, B. \quad \square$$

Введем обозначение

$$\tilde{\varepsilon}_n = \left(\frac{B/\alpha_p}{n/\ln n}\right)^{1/2},$$

где $\alpha_p = \frac{1}{B} \sum\limits_{r=1}^{B} r p_r$ — отношение математического ожидания веса предмета к вместимости контейнера, ограничивающей максимально возможный вес предмета. Очевидно, $0 < \alpha_p \le 1$.

Лемма 6. *Для задачи из класса $\mathcal{K}_n'$ с B-регулярной функцией распределения в случае списка из множества S_Δ справедлива оценка снизу для оптимального значения целевой функции*

$$F_S^* \ge n\alpha_p(1 - \sqrt{3}\tilde{\varepsilon}_n).$$

Доказательство.

$$F_S^* \ge \frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B} r\chi_S(r) \ge \frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B} r(np_r - \Delta_r) \ge$$
$$\ge n\alpha_p - \frac{2}{B}\sqrt{n \ln n}\sum_{r=1}^{B} r\sqrt{p_r} \ge n\alpha_p - \frac{2}{B}\sqrt{n\ln n}\Big(\sum_{r=1}^{B} r \sum_{r=1}^{B} rp_r\Big)^{1/2} \ge$$
$$\ge n\alpha_p - \frac{2}{B}\sqrt{n\ln n}\Big(\frac{B(B+1)}{2}B\alpha_p\Big)^{1/2} \ge n\alpha_p - \sqrt{3n\ln n}\sqrt{B\alpha_p} = n\alpha_p(1 - \sqrt{3}\tilde{\varepsilon}_n). \quad \square$$

Лемма 7. *Для задачи из класса $\mathcal{K}'_n$ с B-регулярной функцией распределения приближенный алгоритм $\widetilde{\mathcal{A}}$ с оценочным списком $\widetilde{S}$ (7) в случае своего срабатывания гарантирует оценку сверху для приближенного значения целевой функции*

$$F_{\widetilde{\mathcal{A}}} \leq n\alpha_p(1 + 2\tilde{\varepsilon}_n + \tilde{\varepsilon}_n^2/\ln n).$$

Доказательство.

$$F_{\widetilde{\mathcal{A}}} \leq F^*_{\widetilde{S}} \leq \frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B} r\chi_{\widetilde{S}}(r) + 1 \leq \frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B} r \sum_{k=k_r}^{Q} g_r^{(k)} + 1 \leq$$
$$\leq \frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B} r\left(Q - k_r + \sum_{k=k_r}^{Q}\varphi(p_r^{(k)})\right) + 1 = \frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B} r\,(Q-k_r) +$$
$$+\frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B} r \sum_{k=k_r}^{Q}(np_r^{(k)} + 2\sqrt{n\ln np_r^{(k)}}) + 1 = \frac{1}{B}(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) + 1,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{r=1}^{B} r(Q-k_r) = \sum_{k=1}^{Q-1}(Q-k)\sum_{r=2^{k-1}}^{2^k-1} r = \sum_{k=1}^{Q-1}(Q-k)\frac{3\cdot 2^{k-1}-1}{2}2^{k-1} \leq$$
$$\leq \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{Q-1}(Q-k)4^k \leq \frac{3}{8}B^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4^k} \leq \frac{3}{8}B^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{0.5\cdot 2^k}{4^k} = \frac{3}{16}B^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \frac{B^2}{4};$$
$$\Sigma_2 = n\sum_{r=1}^{B} r\sum_{k=k_r}^{Q} p_r^{(k)} = n\sum_{r=1}^{B} r\cdot p_r = nB\alpha_p;$$
$$\Sigma_3 = 2\sqrt{n\ln n}\sum_{r=1}^{B} r\sum_{k=k_r}^{Q}\sqrt{p_r^{(k)}} \leq 2\sqrt{n\ln n}\sum_{r=1}^{B} r\sqrt{(Q-k_r+1)p_r} \leq$$
$$\leq 2\sqrt{n\ln n}\left(\sum_{r=1}^{B} rp_r\sum_{r=1}^{B} r(Q-k_r+1)\right)^{1/2} = 2\sqrt{n\ln n}(B\alpha_p(\Sigma_1 + \sum_{r=1}^{B} r))^{1/2} \leq$$
$$\leq 2B\sqrt{n\ln n}\sqrt{\alpha_p\left(\frac{B}{4} + \frac{B+1}{2}\right)} \leq 2B\sqrt{n\ln nB\alpha_p},$$

откуда при $B > 1$

$$F_{\widetilde{\mathcal{A}}} \leq n\alpha_p + 2\sqrt{n\ln nB\alpha_p} + B/4 + 1 <$$
$$< n\alpha_p\left(1 + 2\sqrt{\frac{B/\alpha_p}{n/\ln n}} + \frac{B/\alpha_p}{n}\right) = n\alpha_p(1 + 2\tilde{\varepsilon}_n + \tilde{\varepsilon}_n^2/\ln n). \quad \square$$

Теорема 3. *Алгоритм $\widetilde{\mathcal{A}}$ на классе $\mathcal{K}'_n$ задач упаковки в контейнеры с B-регулярной функцией распределения весов при $B/\alpha_p = o(n/\ln n)$ асимптотически точен.*

Доказательство. Поскольку $B \leq B/\alpha_p$, то $B = o(n/\ln n)$ и согласно следствию из теоремы 1 вероятность несрабатывания алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$ ограничена величиной $o(1/(n\ln n)) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом n, имеем дело с реализацией случайного списка S, для которой справедливы неравенства (3) и (4). Оценим погрешность получаемого решения с учетом леммы 6

$$\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \frac{F_{\widetilde{\mathcal{A}}} - F_S^*}{F_S^*} \le \frac{n\alpha_p(1 + 2\tilde{\varepsilon}_n + \tilde{\varepsilon}_n^2/\ln n)}{n\alpha_p(1 - \sqrt{3}\tilde{\varepsilon}_n)} - 1 =$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})\tilde{\varepsilon}_n(1 + (2-\sqrt{3})\tilde{\varepsilon}_n/\ln n)}{1 - \sqrt{3}\tilde{\varepsilon}_n} = O(\tilde{\varepsilon}_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \quad \square$$

Литература

1. Coffman E.G., Garey M.R., Johnson D.S. *Approximation algorithms for bin-packing. — An updated survey* // Algorithm Design for Computer System Design. CISM courses and lectures. – 1984. – № 284. – P. 49–106.
2. Johnson D.S., Demers A., Ullman J.D., Garey M.R., Graham R.L. *Worst-case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms* // SIAM J. Comput. – 1974. – V. 3. – № 4. – P. 299–325.
3. Frederickson G.N. *Probabilistic analysis for simple one- and two-dimensional bin packing algorithms* // Information Processing Letters. – 1980. – V. 11. – № 4–5. – P. 156–161.
4. Knödel W. *A bin packing algorithm with complexity* $O(n \log n)$ *and performance* 1 *in the stochastic limit* // Lect. Notes Comput. Sci. – 1981. – V. 118. – P. 369–377.
5. Rhee W.T., Talagrand M. *Optimal bin packing with items of random sizes.* III // SIAM J. Comput. – 1989. – V. 18. – № 3. – P. 473-486.
6. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. *Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации* // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1975. – Вып. 31. – С. 35–42.
7. Перепелица В.А., Гимади Э.Х. *К задаче нахождения минимального гамильтонова контура на графе со взвешенными дугами* // Дискретный анализ. – Новосибирск, 1969. – Вып. 15. – С. 57–65.
8. Гимади Э.Х., Перепелица В.А. *Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера* // Управляемые системы. – Новосибирск, 1974. – Вып. 12. – С. 35–45.
9. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В. *Асимптотически точный подход к решению одномерной задачи упаковки в контейнеры* // Управляемые системы. – Новосибирск, 1984. – Вып. 25. – С. 48–57.
10. Гимади Э.Х. *Обоснование априорных оценок качества приближенного решения задачи стандартизации* // Управляемые системы. – Новосибирск, 1987. – Вып. 27. – С. 12–27.
11. Гимади Э.Х. *О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов* // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988. – Т. 10. – С. 89–115.
12. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Сердюков А.И. *Алгоритм для приближенного решения задачи коммивояжера и его вероятностный анализ* // Сибирский журнал исследования операций. – Новосибирск, 1994. – Т. 1. – № 2. – С. 8–17.
13. Боровков А.А. *Теория вероятностей.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1986. – 432 с.

Институт математики
Сибирского отделения
Российской Академии наук

Поступила
03.02.1997