ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 512.518

В.А. АБИЛОВ, Ф.В. АБИЛОВА

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ–ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\mathbb{R}; e^{-x^2})$

Введение

Хорошо известно, что в вопросах приближения 2π-периодических функций существенную роль играет оператор сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ и определяемые с его помощью модули непрерывности различных порядков. Однако в вопросах, связанных с приближениями непериодических функций аналогичную роль играют операторы обобщенного сдвига и порождающиеся ими обобщенные модули непрерывности. Последние широко применяются в вопросах приближения непериодических функций как одной, так и многих переменных (см., напр., [1] и цитируемую там литературу). В данной статье операторы обобщенного сдвига применяются в вопросах приближения функций суммами Фурье–Эрмита и даются точные или слабые эквивалентные оценки колмогоровских поперечников некоторых классов функций.

1. Определения. Классы функций

Пусть $L_2 = L_2(\mathbb{R}; e^{-x^2})$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с весом e^{-x^2} и нормой $\|f\| = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f^2(x)dx}$.

Обозначим через $E_N(f) = \inf\limits_{P_N} \|f - P_N\|$ $(N = 1, 2, \dots)$ наилучшее приближение функции $f \in L_2$ алгебраическими многочленами $P_N(x)$ порядка не выше $N-1$.

Пусть

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

— ортонормированная система многочленов Эрмита ([2], с. 114) в пространстве L_2 и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) H_n(x) \quad \left(c_n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx \right) \tag{1}$$

— ряд Фурье–Эрмита функции $f \in L_2$,

$$S_N(f; x) = \sum_{0 \le n < N} c_n(f) H_n(x)$$

— частичные суммы ряда (1).

Хорошо известно, что

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(f)}, \quad E_N(f) = \|f - S_N(f)\| = \sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f)}. \tag{2}$$

В пространстве L_2 рассмотрим оператор

$$F_h(f) = F_h f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} f(x\sqrt{1-h^2} + ht) dt \quad (0 < h < 1),$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига. Оператор $F_h : L_2 \to L_2$ обладает следующими свойствами ([3], с. 557):

1) $F_h(f_1+f_2) = F_h(f_1) + F_h(f_2)$,
2) $F_h(\lambda f) = \lambda F_h(f)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$,
3) $F_0(f) = F_0 f(x) = f(x)$,
4) $\|F_h f\| \le \|f\|$,
5) $\|F_h f - f\| \to 0$ $(h \to 0+)$,
6) $F_h H_n(x) = (1-h^2)^{\frac{n}{2}} H_n(x)$.

Определим теперь разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, следующим образом:

$$\Delta_h(f;x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E) f(x),$$

$$\Delta_h^k(f;x) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1}(f;x);x) = (F_h - E)^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f(x),$$

где $F_h^0 f(x) = f(x)$, $F_h^i f(x) = F_h(F_h^{i-1} f(x))$ $(i = 1,2,\dots,k;\ k = 1,2,\dots)$ и E — единичный оператор в пространстве L_2.

Величину

$$\Omega_k(f;\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \|\Delta_h^k(f;x)\| \quad (k = 1,2,\dots)$$

будем называть обобщенным модулем непрерывности порядка k функции $f \in L_2$.

Далее $D = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$ — дифференциальный оператор второго порядка.

Напомним, что ([4], с. 172) функция $f \in L_2$ имеет обобщенную производную в смысле Леви, обозначаемую через $f'(x)$, если существует функция $f_* \in L_2$, эквивалентная функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ и локально абсолютно непрерывная на $\mathbb{R}$, при этом $f'(x)$ — это любая функция $f \in L_2$, эквивалентная $f'_*(x)$ на $\mathbb{R}$. Функция $f'_*(x)$ существует почти всюду на $\mathbb{R}$. Обобщенные производные высших порядков определяются соотношениями $f''(x) = (f'(x))'$, $f'''(x) = (f''(x))'$ и т. д.

Рассмотрим следующие классы функций.

$L_2^r(D)$ — класс функций $f \in L_2$, имеющих на всей оси $\mathbb{R}$ обобщенные производные в смысле Леви $f'(x), f''(x), \dots, f^{(2r)}(x)$, принадлежащие пространству L_2 и $D^r f \in L_2$. Здесь $D^0 f = f$, $D^r f = D(D^{r-1} f)$ $(r = 1,2,\dots)$ и $L_2^0(D) = L_2$.

$W_2^r(D)$ — класс функций $f \in L_2^r(D)$, для которых $\|D^r f\| \le 1$ $(r = 1,2,\dots)$.

$W_{2,\Phi}^{r,k}(D)$ — класс функций $f \in L_2^r(D)$, для которых

$$\Omega_k(D^r f;\delta) = O[\Phi(\delta^k)] \quad (r = 0,1,\dots;\ \ k = 1,2,\dots),$$

где $\Phi(t)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция, заданная на $[0,+\infty)$, $\Phi(0) = 0$.

$KH^{(\nu)}$ — класс функций $f \in L_2$, для которых $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} e^{-\theta x^2} |\Delta_h(f;x)| \le K h^\nu$, где $K = K(\theta) > 0$, $\nu > 0$, $0 < \theta < 1/2$ — постоянные.

Нетрудно заметить, что $KH^{(\nu)} \subset W_{2,t^\nu}^{0,1}(D)$.

Напомним, что N-поперечником Колмогорова множества $\mathbb{M}$ в пространстве L_2 называется величина

$$d_N(\mathbb{M};L_2) = \inf_{G_N \subset L_2} \Big\{ \sup_{f\in\mathbb{M}} \{ \inf_{g\in G_N} \|f-g\| \} \Big\},$$

где последний раз точная нижняя грань берется по всем подпространствам $G_N \subset L_2$ фиксированной размерности $N \in \mathbb{N}$ ([5], с. 182).

Величина

$$d_N^*(\mathbb{M};G_N) = \sup_{f\in\mathbb{M}} \{ \inf_{g\in G_N} \|f-g\| \}$$

есть отклонение множества $\mathbb{M}$ от подпространства G_N в пространстве L_2.

Если $d_N(\mathbb{M};L_2) = d_N^*(\mathbb{M};G_N^*)$, то подпространство $G_N^* \subset L_2$ называется экстремальным для множества $\mathbb{M}$ в пространстве L_2.

2. Основные результаты

Докажем следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in L_2^r(D)$ справедливо неравенство*

$$E_N(f) \le (\gamma(N))^{-k}(2N)^{-r}\left(\int_0^{\sqrt{2/N}} h\Omega_k^{1/k}(D^r f; h)dh\right)^k,$$

где

$$\gamma(N) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+2}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^{\frac{N+2}{2}} \quad (r = 0, 1, \dots ; \quad k = 1, 2, \dots ; \quad N = 2, 3, \dots),$$

причем при каждом фиксированном $N = 2, 3, \dots$ константа в правой части уменьшена быть не может.

Следствие 1. Для любой функции $f \in L_2^r(D)$

$$E_N(f) \ll N^{-r}\Omega_k\left(D^r f; \sqrt{2/N}\right).$$

Следствие 2. Справедлива оценка

$$\sup_{f \in W_{2,\Phi}^{r,k}(D)} E_N(f) = O\left\{N^{-r}\Phi\left(\left(\sqrt{2/N}\right)^k\right)\right\} \quad (r = 0, 1, \dots ; \quad k = 1, 2, \dots).$$

Теорема 2. *Если $f \in L_2$, то*

$$\Omega_k\left(f; \sqrt{2/N}\right) \le \left(\frac{2^{2k+1}k}{N^{2k}}\sum_{n=1}^N n^{2k-1}E_n^2(f)\right)^{1/2}.$$

Теорема 3. *Пусть $f \in L_2$. Если ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-1}E_n(f) \quad (r = 1, 2, \dots)$$

сходится, то $f \in L_2^r(D)$ и

$$\Omega_k\left(D^r f; \sqrt{2/N}\right) \ll \left(\frac{1}{N^{2k}}\sum_{n=1}^N n^{2(r+k)-1}E_n^2(f)\right)^{1/2} + \sum_{n=N}^\infty n^{r-1}E_n(f).$$

Из теорем 1–3 следует

$$E_N(f) = O(N^{-r-\frac{k\nu}{2}}) \Longleftrightarrow f \in W_{2,t^\nu}^{r,k}(D) \quad (r = 0, 1, \dots ; \quad k = 1, 2, \dots ; \quad 0 < \nu < 2).$$

При $k = 1$, $D = \frac{d}{dx}$ аналогичный факт известен [6] (см. также [1]).

Теорема 4. *При каждом фиксированном $N = 1, 2, \dots$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in W_2^r(D)} E_N(f) = (2N)^{-r}.$$

Верхняя грань достигается для функции $f_N^*(x) = (2N)^{-r}H_N(x)$.

Теорема 5. *Для любой функции $f \in W_2^r(D)$*

$$\lim_{N\to\infty} N^r E_N(f) = 0.$$

Теорема 6. *Справедливо равенство*

$$d_N(W_2^r(D); L_2) = (2N)^{-r} \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Экстремальным подпространством для класса $W_2^r(D)$ будет подпространство алгебраических многочленов порядка не выше $N - 1$.

Теорема 7. *Справедлива оценка*

$$d_N(W^{r,k}_{2,\Phi}(D);L_2) \asymp N^{-r}\Phi(N^{-k/2}) \quad (r=0,1,2,\dots; \quad k=1,2,\dots).$$

Здесь функция $\Phi(t)$ удовлетворяет еще условию

$$\Phi(\lambda t) = O(\lambda+1)\Phi(t) \quad (\lambda>0).$$

Теорема 8. *Если $f \in KH^{(\nu)}$ и $\nu > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(f)$ сходится абсолютно.*

3. Вспомогательные предложения

Известно, что многочлены Эрмита $H_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению ([1], с. 115)

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Умножая обе части на e^{-x^2}, имеем

$$(e^{-x^2}H'_n(x))' + 2ne^{-x^2}H_n(x) = 0. \tag{3}$$

Лемма 1. *Если $f \in L^r_2(D)$, то*

$$c_n(f) = (-1)^r \frac{1}{(2n)^r} c_n(D^r f) \quad (r=1,2,\dots; \quad n=1,2,\dots).$$

Доказательство. Из (1) и (3), дважды интегрируя по частям, имеем

$$\begin{gathered} c_n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)H_n(x)dx = -\frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(e^{-x^2}H'_n(x))'dx = \\ = -\frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(e^{-x^2}H'_n(x)) = \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}f'(x)H'_n(x)dx = \\ = \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}f'(x)d(H_n(x)) = -\frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)(e^{-x^2}f'(x))'dx = \\ = -\frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(f''(x)-2xf'(x))H_n(x)dx = -\frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(Df(x))H_n(x)dx, \end{gathered}$$

т. е.

$$c_n(f) = -\frac{1}{2n}c_n(Df). \quad \square$$

Лемма 2. *Пусть $f \in L_2$ и $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(f)H_n(x)$. Тогда*

$$F_h f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-h^2)^{n/2}c_n(f)H_n(x),$$

причем ряды справа сходятся в пространстве L_2.

Доказательство. Так как $F_hH_n(x) = (1-h^2)^{n/2}H_n(x)$, то для любого многочлена $P_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} a_nH_n(x)$ в силу линейности оператора F_h имеем

$$F_hP_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1}(1-h^2)^{n/2}a_nH_n(x).$$

Так как F_h еще и ограниченный оператор в пространстве L_2, а множество многочленов $P_N(x)$ всюду плотно в L_2, то утверждение леммы получается легко. $\square$

Замечание. В силу лемм 1 и 2, пользуясь уравнением замкнутости (2) и формулой бинома Ньютона, легко показать, что для любой функции $f \in L_2^r(D)$ справедливо равенство

$$\|\Delta_h^k(D^r f;x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}(2n)^{2r}c_n^2(f).$$

4. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in L_2^r(D)$. Тогда в силу неравенства Гёльдера и сделанного выше замечания имеем

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f) - \sum_{n=N}^{\infty}(1-h^2)^{n/2}c_n^2(f) = \sum_{n=N}^{\infty}[1-(1-h^2)^{n/2}]c_n^2(f) =$$

$$= \sum_{n=N}^{\infty}|c_n(f)|^{2-\frac{1}{k}}|c_n(f)|^{\frac{1}{k}}[1-(1-h^2)^{n/2}]c_n^2(f) \le$$

$$\le \Big(\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f)\Big)^{\frac{2k-1}{2k}}\Big(\sum_{n=N}^{\infty}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}c_n^2(f)\Big)^{\frac{1}{2k}} =$$

$$= \Big(\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f)\Big)^{\frac{2k-1}{2k}}\Big(\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{(2n)^{2r}}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}(2n)^{2r}c_n^2(f)\Big)^{\frac{1}{2k}} \le$$

$$\le \Big(\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f)\Big)^{\frac{2k-1}{2k}}(2N)^{-r/k}\Big(\sum_{n=N}^{\infty}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}(2n)^{2r}c_n^2(f)\Big)^{\frac{1}{2k}} \le$$

$$\le \Big(\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f)\Big)^{\frac{2k-1}{2k}}(2N)^{-r/k}\|\Delta_h(D^r f)\|^{1/k},$$

т. е.

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f) \le \Big(\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f)\Big)^{\frac{2k-1}{2k}}(2N)^{-r/k}\|\Delta_h(D^r f)\|^{1/k} + \sum_{n=N}^{\infty}(1-h^2)^{n/2}c_n^2(f).$$

Отсюда следует

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f) \le \Big(\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f)\Big)^{\frac{2k-1}{2k}}(2N)^{-r/k}\Omega_k^{1/r}(D^r f;h) + (1-h^2)^{N/2}\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f).$$

Умножая обе части последнего неравенства на $h \in [0,\sqrt{2/N}]$ и интегрируя его в указанных пределах, получим

$$\Big(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+2}\Big(1-\frac{2}{N}\Big)^{\frac{N+2}{2}}\Big)\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f) \le$$

$$\le \Big(\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f)\Big)^{\frac{2k-1}{2k}}(2N)^{-r/k}\int_0^{\sqrt{2/N}} h\Omega_k^{1/k}(D^r f;h)dh.$$

Отсюда следует

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f) \le (\gamma(N))^{-2k}(2N)^{-2r}\Big(\int_0^{\sqrt{2/N}} h\Omega_k^{1/k}(D^r f;h)dh\Big)^{2k}$$

или

$$\|f - S_N(f)\| \le (\gamma(N))^{-k}(2N)^{-r}\Big(\int_0^{\sqrt{2/N}} h\Omega_k^{1/k}(D^r f;h)dh\Big)^{k}.$$

С другой стороны, легко показать, что для функции

$$f_*(x) = H_N(x) \quad (N \geq 2)$$

последнее неравенство обращается в равенство. $\square$

Доказательство теоремы 2. В силу сделанного выше замечания и вполне очевидного неравенства

$$1 - (1-h^2)^{n/2} \leq nh^2 \tag{4}$$

имеем

$$\|\Delta_h^k(f)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}c_n^2(f) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}c_n^2(f) + \sum_{n=N+1}^{\infty}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}c_n^2(f) \leq$$

$$\leq h^{4k}\sum_{n=1}^{N} n^{2k}c_n^2(f) + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2(f).$$

Полагая здесь $h = \sqrt{2/N}$, будем иметь

$$\Omega_k^2(f;\sqrt{2/N}) \leq \frac{2^{2k}}{N^{2k}}\sum_{n=1}^{N} n^{2k}c_n^2(f) + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2(f) \leq$$

$$\leq \frac{2^{2k}}{N^{2k}}\left[\sum_{n=1}^{N} n^{2k}c_n^2(f) + N^{2k}\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2(f)\right] =$$

$$= \frac{2^{2k}}{N^{2k}}\left[\sum_{n=1}^{N} n^{2k}\left(\sum_{\ell=n}^{\infty} c_\ell^2(f) - \sum_{\ell=n+1}^{\infty} c_\ell^2(f)\right) + N^{2k}\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2(f)\right] =$$

$$= \frac{2^{2k}}{N^{2k}}\left[\sum_{n=1}^{N}(n^{2k}-(n-1)^{2k})\sum_{m=n}^{\infty} c_m^2(f)\right] \leq \frac{2^{2k+1}k}{N^{2k}}\sum_{n=1}^{N} n^{2k-1}E_n^2(f). \quad \square$$

Доказательство теоремы 3. Нетрудно заметить, что

$$g(x) = -\int_0^x e^{t^2}\int_t^{+\infty} f(\xi)e^{-\xi^2}d\xi \in L_2^1(D),$$

если $f \in L_2$ и $Dg(x) = f(x)$. Пользуясь этим замечанием, можно показать, что функция $f \in L_2$, удовлетворяющая условию теоремы, принадлежит $L_2^r(D)$.

Далее, как и выше, имеем

$$\|\Delta_h^k(D^r f)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}(2n)^{2r}c_n^2(f).$$

Разобьем последнюю сумму на два слагаемых:

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{M}\sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1} + \sum_{n=M+1}^{\infty}\sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1} = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где $h = \sqrt{2/N}$, $1/2^{M+1} < h^2/2 \leq 1/2^M$, и оценим каждое слагаемое в отдельности.

В силу (4) заметим

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{M}\sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1}[1-(1-h^2)^{m/2}]^{2k}(2m)^{2r}c_m^2(f) \leq h^{4k}\sum_{n=1}^{M}\sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1}(2m)^{2(r+k)}c_m^2(f).$$

Так как $c_m^2(f) = E_m^2(f) - E_{m+1}^2(f)$, то нетрудно показать, что

$$\sum_{n=1}^{M} \sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1} (2m)^{2(r+k)} c_m^2(f) \ll \sum_{n=1}^{M} \sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1} m^{2(r_k)-1} E_m^2(f) \ll \sum_{n=1}^{N} n^{2(r+k)-1} E_n^2(f).$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 \ll \frac{1}{N^{2k}} \sum_{n=1}^{N} n^{2(r+k)-1} E_n^2(f).$$

Далее

$$(\Sigma_2)^{1/2} = \Bigg(\sum_{n=M+1}^{\infty} \sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1} [1-(1-h^2)^{m/2}]^{2k} (2m)^{2r} c_m^2(f) \Bigg)^{1/2} =$$

$$= \Bigg(\sum_{n=M+1}^{\infty} \|\Delta_h^k (D^r(S_{2^{n-1}}(f;x) - S_{2^n}(f;x)))\|^2 \Bigg)^{1/2} \le$$

$$\le \sum_{n=M+1}^{\infty} \|\Delta_h^k (D^r(S_{2^{n-1}}(f;x) - S_{2^n}(f;x)))\|.$$

Так как

$$\|\Delta_h^k (D^r f)\| \le \|D^r f\|, \quad \|D^r S_n(f)\| \le (2n)^r \|S_n(f)\|,$$

то, пользуясь монотонностью последовательности $E_n(f)$, легко показать, что

$$(\Sigma_2)^{1/2} \le \sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{(n+1)r} E_{2^{n-1}}(f) \ll \sum_{n=N}^{\infty} n^{r-1} E_n(f).$$

Объединяя полученные оценки для Σ_1 и Σ_2, получим требуемое. □

Доказательство теоремы 4. Пусть $f \in W_2^r(D)$. Тогда из (2) и леммы 1 следует

$$\|f - S_N(f)\|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(f) \le \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{2r}} c_n^2(D^r f) \le \frac{1}{(2N)^{2r}} \sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(D^r f) \le$$

$$\le \frac{1}{(2N)^{2r}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(D^r f) \le \frac{1}{(2N)^{2r}} \|D^r f\|^2 \le \frac{1}{(2N)^{2r}},$$

т. е.

$$\|f - S_N(f)\| \le (2N)^{-r}. \tag{5}$$

С другой стороны, для функции

$$f^*(x) = (2N)^{-r} H_N(x),$$

очевидно принадлежащей классу $W_2^r(D)$, имеем

$$\|f^* - S_N(f^*)\| = \|f^*\| = (2N)^{-r}. \tag{6}$$

Из оценок (5), (6) следует требуемое. □

Доказательство теоремы 5. Нетрудно заметить, что для любой функции $f \in L_2^r(D)$, рассуждая как и выше, имеем

$$\|f - S_N(f)\| \le (2N)^{-r} \|D^r f\|.$$

Пусть $f \in W_2^r(D)$. Рассмотрим функцию

$$f^*(x) = f(x) - S_N(f;x).$$

Очевидно, $f^* \in L_2^r(D)$ и $S_N(f^*;x) = 0$. Следовательно,

$$\|f - S_N(f)\| = \|f^*\| = \|f^* - 0\| = \|f^* - S_N(f^*)\| \le$$
$$\le (2N)^{-r}\|D^r f^*\| = (2N)^{-r}\|D^r f - S_N(D^r f)\| = (2N)^{-r}\varepsilon_N.$$

Так как $\varepsilon_N \to 0$ $(N \to \infty)$, то утверждение доказано. $\square$

Доказательство теоремы 6. Оценка сверху. В силу неравенства (5) имеем

$$d_N(W_2^r(D); L_2) \le (2N)^{-r}. \tag{7}$$

Оценка снизу. Рассмотрим в $(N+1)$-мерном подпространстве многочленов $Q_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n H_n(x)$ шар $(2N)^{-r}B$ радиуса $(2N)^{-r}$, т. е. множество таких многочленов, что

$$\|Q_N\|^2 = \sum_{n=0}^{N} a_n^2 \le (2N)^{-2r},$$

и покажем, что $(2N)^{-r}B \subset W_2^r(D)$. Пусть $Q_N \in (2N)^{-r}B$. Так как

$$D^r Q_N(x) = (-1)^r \sum_{n=0}^{N} (2n)^r a_n H_n(x),$$

то

$$\|D^r Q_N\|^2 = \sum_{n=1}^{N} (2n)^{2r} a_n^2 \le (2N)^{2r} \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \le (2N)^{2r}(2N)^{-2r} = 1.$$

Отсюда следует $Q_N \in W_2^r(D)$, а это означает, что $(2N)^{-r} \subset W_2^r(D)$. Тогда ([7], с. 341) имеем

$$d_N(W_2^r(D); L_2) \ge (2N)^{-r}. \tag{8}$$

Из оценок (7) и (8) следует требуемое. $\square$

Доказательство теоремы 7. Оценка сверху. Пусть $f \in W_{2,\Phi}^{r,k}(D)$. Из следствия теоремы 1 получим

$$d_N(W_{2,\Phi}^{r,k}(D); L_2) \ll N^{-r}\Phi(N^{-k/2}). \tag{9}$$

Оценка снизу. Определим оператор $A : L_2 \to L_2$ следующим образом:

$$g(x) = Af(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n c_n(f) H_n(x),$$

где

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)^r}\Phi\big((n+1)^{-k/2}\big) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Очевидно, что A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в пространстве L_2, числа μ_n $(n = 0, 1, \dots)$ являются его собственными значениями, а $H_n(x)$ — отвечающими им собственными функциями.

Рассмотрим множество

$$\mathbb{M} = \{g \in L_2 : g = Af,\ f \in L_2,\ \|f\| \le 1\}.$$

Известно ([8], с. 51), что

$$d_N(\mathbb{M}; L_2) = \mu_{N+1}. \tag{10}$$

Покажем, что $\mathbb{M} \subset W^{r,k}_{2,\Phi}(D)$. Пусть $g \in \mathbb{M}$. Рассуждая, как и выше, получим включение $D^r g \in L_2$ и

$$\|\Delta_h^k(D^r g)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}(2N)^{2r}\mu_n^2 c_n^2(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}\Phi^2(n^{-k/2})c_n^2(f).$$

Вновь полагая $N = [h^{-2}]$, разобьем последнюю сумму на два слагаемых:

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности.

Имеем

$$\Sigma_2 = \sum_{n=N+1}^{\infty}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}\Phi^2(n^{-k/2})c_n^2(f) = O\Big(\sum_{n=N}^{\infty}\Phi^2(n^{-k/2})c_n^2(f)\Big) =$$
$$= O\big(\Phi^2(N^{-k/2})\big)\sum_{n=N}^{\infty}c_n^2(f) = O\big(\Phi^2(N^{-k/2})\big) = O\big(\Phi^2(h^k)\big).$$

В силу (4) и $\frac{\Phi(t_2)}{t_2} = O\left(\frac{\Phi(t_1)}{t_1}\right)$ $(t_1 \leq t_2)$ запишем

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{N}[1-(1-h^2)^{n/2}]^{2k}\Phi^2(n^{-k/2})c_n^2(f) =$$
$$= O(h^{4k})\sum_{n=1}^{N}n^{2k}\Phi^2(n^{-k/2})c_n^2(f) = O(h^{4k})\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\Phi(n^{-k/2})}{n^{-k/2}}\right]^2 n^k c_n^2(f) =$$
$$= O(h^{4k})N^{2k}\Phi^2(N^{-k/2})\sum_{n=1}^{N}c_n^2(f) = O(h^{4k})N^{2k}\Phi^2(N^{-k/2}) = O(\Phi^2(h^k)).$$

Объединяя оценки для Σ_1 и Σ_2, получим

$$\|\Delta_h^k(D^r g)\| = O(\Phi(h^k)),$$

а это означает, что $g \in W^{r,k}_{2,\Phi}(D)$. Таким образом, $\mathbb{M} \subset W^{r,k}_{2,\Phi}(D)$. Отсюда и из (10) следует

$$d_N\big(W^{r,k}_{2,\Phi}(D); L_2\big) \gg N^{-r}\Phi(N^{-k/2}),$$

что вместе с неравенством (9) завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 8. Пусть $f \in KH^{(\nu)}$ $(\nu > 1)$. Тогда, как отмечено в п. 1, $f \in W^{0,1}_{2,t^\nu}(D)$, а потому в силу следствия 2 теоремы 1 имеем

$$\sum_{n=N}^{\infty}c_n^2(f) = O(N^{-\nu}).$$

Но тогда

$$\sum_{n=N}^{2N-1}c_n^2(f) = O(N^{-\nu})$$

для любого $N = 1, 2, \ldots$ Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\sum_{n=N}^{2N-1}|c_n(f)| \leq \sqrt{\sum_{n=N}^{2N-1}c_n^2(f)}\sqrt{\sum_{n=N}^{2N-1}1} = O(N^{1/2-\nu/2}).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n(f)| = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k N}^{2^{k+1}N-1} |c_n(f)| = O\biggl(\sum_{k=0}^{\infty} (2^k N)^{1/2-\nu/2} \biggr) = O(N^{1/2-\nu/2}).$$

Так как $\nu > 1$, то остальное ясно. $\square$

Литература

1. Абилов В.А. *О наилучшем приближении функций алгебраическими многочленами* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 357. – № 2. – С. 151–152.
2. Сеге Г. *Ортогональные многочлены.* – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
3. Виленкин Н.Я. *Специальные функции и теория представления групп.* – М.: Наука, 1965. – 588 с.
4. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1969. – 480 с.
5. Колмогоров А.Н. *Избранные труды. Математика и механика.* – М.: Наука, 1987. – 470 с.
6. Рафальсон С.З. *О приближении функций в среднем суммами Фурье–Эрмита* // Изв. вузов. математика. – 1968. – № 7. – С. 78–84.
7. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближений.* – М.: Наука, 1987. – 423 с.
8. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.

Дагестанский государственный университет
Институт физики Дагестанского научного центра

Поступила
01.03.2004