ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 12 (427)

УДК 519.853

И.И. ЕРЕМИН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи кусочно-линейной оптимизации составляют важный класс задач математического программирования. С одной стороны, они ближайшим образом обобщают задачи линейного программирования, сохраняя многие свойства последних, а с другой — служат самостоятельным хорошо работающим аппаратом в различных областях прикладной математики. Кусочно-линейными задачами можно аппроксимировать нелинейные задачи оптимизации, бывает полезным редуцировать к ним те или иные типы многоэкстремальных задач. Есть еще одно важное обстоятельство, характеризующее кусочно-линейные функции: они обладают уникальными разделительными свойствами, что позволяет их использовать в дискриминантном анализе.

Алгебра кусочно-линейных функций (k-*функций*) и задач кусочно-линейного программирования может изучаться в рамках более общих конструкций, а именно, — в рамках σ-расширений функциональных пространств. Речь идет об алгебраическом расширении фиксированного функционального пространства $\mathbf{F}_0$, замкнутого относительно операции *дискретного максимума*. Если $\mathbf{F}$ — указанное расширение, а $\mathbf{F}_0$ — пространство линейных функций, то $\mathbf{F}$ — пространство кусочно-линейных функций; если $\mathbf{F}_0$ — класс квадратичных функций, то $\mathbf{F}$ — класс кусочно-квадратичных функций и т.д.

Хотя кусочно-линейные функции и соответствующий аппарат для них имеют важное значение, тем не менее число работ, посвященных этим вопросам, незначительно. Отметим работы [1]–[6], первая из которых содержит главу III под названием “Кусочно-линейные функции и полиэдральные множества”. В этой главе проводится довольно основательное исследование по алгебре и геометрии класса кусочно-линейных функций.

1. σ-расширения функциональных пространств

Пусть $\mathbf{F}_0$ — некоторое функциональное пространство с вещественным пространством $\mathbf{X}$ значений аргумента функций из $\mathbf{F}_0$. Если $\{f_j(x)\}_{j\in J} \subset \mathbf{F}_0$, то функция *дискретного максимума* $f(x) := \max\limits_{j\in J} f_j(x)$ может как принадлежать $\mathbf{F}_0$, так и не принадлежать. Способ образования функции $f(x)$ назовем σ-*операцией*.

Речь пойдет о минимальном расширении пространства $\mathbf{F}_0$ до пространства $\mathbf{F}$, обеспечивающего свойство σ-*замкнутости*

$$\{f_j(x)\}_{j\in J} \subset \mathbf{F} \Longrightarrow \max_{j\in J} f_j(x) \in \mathbf{F}. \tag{1.1}$$

В этой ситуации выполняется, очевидно, свойство линейной замкнутости

$$\{f_j^i \mid i\in I,\ j\in J_i\} \subset \mathbf{F} \Longrightarrow \sum_{i\in I} \alpha_i \max_{j\in J_i} f_j^i \in \mathbf{F}, \tag{1.2}$$

где $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i\in I$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–01–00116).

Минимальное σ-замкнутое расширение назовем *σ-расширением.* Из смысла такого расширения видно, что

$$\mathbf{F} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k,$$

где $F_{k+1} = \Big\{ \sum\limits_{i\in I} \alpha_i \max\limits_{j\in J_i} f_j^i \mid f_j^i \in F_k,\ \alpha_i \in \mathbf{R},\ i \in I,\ j \in J_i, |I| < +\infty,\ |J_i| < +\infty \Big\}.$

На самом деле все функции из $\mathbf{F}$ могут быть преобразованы к некоторому стандартному виду. В основе такого преобразования лежит ряд тождеств, справедливых для произвольного набора функций:

$$\max_{j\in J} f_j + \max_{i\in I} g_i = \max_{(j,\,i)\in J\times I} (f_j + g_i); \tag{1.3}$$

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \max_{j\in J_i} f_j^i = \max_{s_i\in J_i} \sum_{i\in I_+} \alpha_i f_{s_i}^i - \max_{s_i\in J_i} \sum_{i\in I_-} |\alpha_i| f_{s_i}^i, \tag{1.4}$$

где $I_+ = \{i \mid \alpha_i > 0\}$, $I_- = \{i \mid \alpha_i < 0\}$;

$$\max_{j=1,\dots,m} f_j = \big[\max_{j=1,\dots,m-1} f_j - f_m\big]^+ + f_m = \big[f_m - \max_{j=1,\dots,m-1} f_j\big]^+ + \max_{j=1,\dots,m-1} f_j; \tag{1.5}$$

$$\min_{i=1,\dots,n} f_i = -\big[\min_{i=1,\dots,n-1} f_i - f_n\big]^+ + \min_{i=1,\dots,n-1} f_i = -\big[f_n - \min_{i=1,\dots,n-1} f_i\big]^+ + f_n; \tag{1.6}$$

$$\big[\max_{j\in J} f_j - \max_{i\in I} g_i\big]^+ = \max_{(j,\,i)\in J\times I} \{f_j, g_i\} - \max_{i\in I} g_i; \tag{1.7}$$

$$\max_{j\in J} f_j - \max_{i\in I} g_i = \min_{i\in I} \max_{j\in J} (f_j - g_i) = \max_{j\in J} \min_{i\in I} (f_j - g_i). \tag{1.8}$$

Выписанные тождества носят общелогический характер и проверяются непосредственно.

Наравне с $\mathbf{F}$ введем пространство

$$\mathbf{H} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} H_i,$$

где $\mathbf{H}_0 = \mathbf{F}_0$, $H_{k+1} = \Big\{ \sum\limits_{i\in I} \alpha_i f_i^+ \mid \alpha_i \in \mathbf{R},\ f_i \in H_k, |I| < +\infty \Big\}.$

Операция взятия положительной срезки "+" является частным случаем σ-операции, однако она потенциально (т.е. многократно примененная) дает тот же класс функций $\mathbf{F}$. Имеет место

Теорема 1.1. 1) *Все функции из* $\mathbf{F}$ *могут быть приведены к любому из стандартных видов:*

$$\max_{j\in J} f_j - \max_{i\in I} g_i, \tag{1.9}$$

$$\min_{i\in I} \max_{j\in J_i} f_j^i, \tag{1.10}$$

$$\max_{j\in J} \min_{i\in I_j} f_i^j, \tag{1.11}$$

где $\{f_j, g_i, f_j^i\} \subset \mathbf{F}_0$; (1.9) *означает* $F_k = F_1$ *при* $k > 1$, *следовательно,* $\mathbf{F} = F_1$.

2) *Классы* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{H}$ *совпадают.*

3) *Представления* (1.9)–(1.10) *эквивалентны.*

Доказательство. 1) Соотношение (1.9) означает совпадение F_k с F_1 при $k > 1$. На самом деле достаточно доказать $F_2 = F_1$. В силу (1.4) можно ограничиться преобразованием функции $f(x) = \max\limits_{i\in I} f_i$ при $\{f_i\}_I \subset F_1$ к виду (1.9). Пусть $I = \{1, \dots, n\}$. Доказательство можно вести индукцией по n. Если $n = 1$, то $f(x) = f_1(x)$ удовлетворяет требуемому свойству представления (1.9). Пусть $n > 1$. Так как $f_i \in F_1$, то эти функции можно представить в виде

$$f_i = \max_{j\in J_i} f_j^i - \max_{k\in I_i} g_k^i$$

при $\{f_j^i, g_k^i\} \subset \mathbf{F}_0$. Имеем

$$f(x) \overset{(1.5)}{=} \big[\max_{i=1,\dots,n-1} f_i - f_n \big]^+ + f_n.$$

По индукции $\max\limits_{i=1,\dots,n-1} f_i =: \bar f \in F_1$. Так как $f = [\bar f - f_n]^+ + f_n$, причем $\{\bar f, f_n\} \subset F_1$, то по (1.4) $\bar f - f_n \in F_1$, а по (1.7) $[\bar f - f_n]^+ \in F_1$, что (с учетом $f_n \in F_1$) и дает $f \in F_1$. Итак, $F_2 = F_1$, а вместе с тем и $\mathbf{F} = F_1$.

Представимость функций из $\mathbf{F}$ в виде (1.10) или (1.11) следует из тождества (1.8).

2) Докажем вначале включение $\mathbf{H} \subset F_1$, т.е. $H_k \subset F_1 \ \forall\, k$. Если $f \in H_1$, то в силу (1.4) $f \in F_1$. Следовательно, $H_1 \subset F_1$. Пусть $H_k \subset F_1$, докажем $H_{k+1} \subset F_1$. Произвольная функция из H_{k+1} имеет вид

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i\, f_i^+, \quad \{f_i\} \subset H_k \subset F_1.$$

Из этого следует, что f представляется линейной комбинацией функций дискретного максимума при образующих из $\mathbf{F}_0$, что с учетом (1.4) и дает для f требуемое представление (1.9).

Обратно, если $f \in \mathbf{F}$, т.е. f имеет вид (1.9), то показав, что функция дискретного максимума при образующих из $\mathbf{F}_0$ принадлежит $\mathbf{H}$, т.е. некоторому H_k, тем самым покажем и $f \in \mathbf{H}$. Итак, пусть

$$f = \max_{j \in J} f_j, \quad \{f_j\} \subset \mathbf{F}_0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если $m = 1$, то $f = f_1 \subset \mathbf{H}_0$. Пусть $m > 1$. Если по индуктивному предположению $\bar f = \max\limits_{j=1,\dots,m-1} f_j \in H_k$, то в силу (1.5) $f = [\bar f - f_m]^+ + f_m \in H_{k+1}$, что и требовалось.

3) Мы уже отметили, что представление функции в форме (1.9) может быть переписано в форме (1.10) при $f_j^i = f_j - g_i$ (см. (1.8)). Нужно убедиться в обратном. Итак, пусть $f = \min\limits_{i \in I} \max\limits_{j \in J_i} f_j^i$. Если $I = \{1, \dots, n\}$ и $n = 1$, то $f = \max\limits_{j \in J_1} f_j^1 \in F_1$. При $n > 1$ доказательство, как это и делалось выше, можно провести индукцией по n. По (1.6)

$$f = \big[\min_{i=1,\dots,n-1} \max_{j \in J_i} f_j^i - \max_{j \in J_n} f_j^n \big]^+ + \max_{j \in J_n} f_j^n.$$

По индуктивному предположению

$$\bar f = \min_{i=1,\dots,n-1} \max_{j \in J_i} f_j^i \in F_1,$$

т.е. $\bar f$ может быть представлено в форме (1.9), но тогда с использованием преобразований (1.3), (1.4) и (1.7) функция f приводится к виду (1.9), что и требовалось.

Эквивалентность представлений (1.11) и (1.9) доказывается аналогично. $\square$

Функции f из $\mathbf{F}$ будем называть *σ-функциями* или *σ-кусочными функциями*. Если $\mathbf{F}_0$ — пространство линейных (аффинных) функций, то $\mathbf{F}$ — пространство кусочно-линейных функций.

2. Кусочно-линейные функции

Кусочно-линейные функции — это σ-функции в ситуации, когда $\mathbf{F}_0$ — пространство линейных (аффинных) функций. К определению кусочно-линейных (в дальнейшем — *k-функций*) можно подойти двояко: либо так, как это только что сделано, либо исходя из некоторой аксиоматики, идентифицирующей такие функции. Остановимся на втором подходе.

Пусть имеются конечные совокупности многогранников $\{M_j\}_J$ и собственных линейных функций $\{l_j(x)\}_J$. Будем говорить, что система $\{M_j, l_j(x)\}$ задает однозначную *кусочно-линейную функцию* $l(x)$ на $\mathbf{X}$, если:

1) $\bigcup\limits_{j \in J} M_j = \mathbf{X}, \quad M_i^0 \bigcap M_j^0 = \emptyset$ при $i \neq j$;

2) $l(x) \equiv l_j(x) \quad \forall\, x \in M_j, \quad \forall\, j \in J.$

Здесь M_j^0 — *алгебраическая* внутренность многогранника M_j, т.е. $y \in M_j^0 \iff y + ts \in M_j$ при любом $s \in \mathbf{X}$ и достаточно малом $t > 0$. Термином *многогранник*, как и ранее, обозначается множество, задаваемое конечной системой собственных линейных неравенств

$$(f_j, x) - \alpha_j \le 0, \quad j \in J.$$

В данном определении некоторые из многогранников M_j или M_j^0 могут быть и пустыми.

Будем использовать обозначения: $\mathbf{L}_0$ — пространство аффинных функций, $\mathbf{L}$ — пространство k-функций, определенных внешним образом в силу свойств 1) и 2). Действительно, класс функций $\mathbf{L}$ совпадает с классом $\mathbf{F}$ из предыдущего параграфа, который строится из $\mathbf{F}_0 = \mathbf{L}_0$, т.е. $\mathbf{L}$ — это минимальное алгебраическое расширение пространства аффинных функций, замкнутое относительно операций дискретного максимума [1]. Следовательно, представление (1.9) (а также каждое из (1.10) и (1.11)) является универсальным представлением кусочно-линейных функций (k-функций).

Для унификации и упрощения записи k-функций, систем неравенств из k-функций, задач кусочно-линейного программирования и т.д. будем в дальнейшем полагать $\mathbf{X} = \mathbf{R}^n$, тогда

$$\mathbf{L}_0 = \{l(x) = (a, x) - \alpha \mid a \in \mathbf{R}^n,\ \alpha \in \mathbf{R}\},$$
$$\mathbf{L} = \{\max_{j \in J} l_j(x) - \max_{i \in I} h_i(x) \mid \{l_j, h_i\} \subset \mathbf{L}_0,\ |J| < +\infty,\ |I| < +\infty\}.$$

Введем обозначения:

$$|z|_{\max} = \max_{(i)} z_i, \quad |z|_{\min} = \min_{(i)} z_i,$$

где z — вектор конечномерного пространства. Если $Ax - b = [l_1(x), \dots, l_m(x)]^T$ — вектор аффинных функций, то в соответствии с введенным обозначением будем иметь

$$|Ax - b\,|_{\max} = \max_{(i)} l_i(x).$$

Представления кусочно-линейных функций в виде (1.9)–(1.11) принимают унифицированную форму

$$|Ax - b|_{\max} - |Bx - d|_{\max}, \tag{2.1}$$

$$\min_i |A_i x - b^i|_{\max}, \tag{2.2}$$

$$\max_{(j)} |A_j x - b^j|_{\min}. \tag{2.3}$$

Отметим также свойства функций дискретного максимума

$$|z|_{\max} = -|z|_{\min};$$
$$\text{при } \alpha > 0: \ |\alpha\, z|_{\max} = \alpha\, |z|_{\max}; \qquad \text{при } \alpha < 0: \ |\alpha\, z|_{\max} = \alpha\, |z|_{\min}.$$

3. Системы кусочно-линейных неравенств и их геометрическая интерпретация

Конечная система k-функций может быть записана в виде

$$\min_{(j)} |A_j^t x - b_t^j|_{\max} \le 0, \quad t = 1, \dots, T, \tag{3.1}$$

или с помощью одного неравенства

$$\sum_{t=1}^{T} \min_{(j)} |A_j^t x - b_t^j|_{\max} \le 0,$$

или (на основе теоремы 1.1) в виде

$$\min_{j=1,\dots,m} |A_j x - b^j|_{\max} \le 0. \tag{3.2}$$

Это задание будем считать одним из стандартных. Другим стандартным видом является

$$|Ax - b|_{\max} - |Bx - d|_{\max} \le 0 \tag{3.3}$$

(см. (2.1)). Итак, произвольная конечная система кусочно-линейных неравенств может быть приведена к любому из стандартных видов (3.1)–(3.3).

Рассмотрим представление системы в виде (3.2). Положим $M_j = \{x \mid A_j x \le b^j\}$. Тогда множеством решений неравенства (3.2) будет $M = \bigcup\limits_{j=1}^{m} M_j$. С другой стороны, если M — произвольное полиэдральное множество, пусть из $\mathbf{R}^n$, т.е. $M = \bigcup\limits_{j=1}^{m} M_j$ и M_j — многогранники, которые задаются конечными системами линейных неравенств ($M_j = \{x \mid A_j x \le b^j\}$), то M является множеством решений неравенства (3.2).

С этой же точки зрения посмотрим на неравенство (3.3). Пусть

$$Ax - b = [l_1(x), \dots, l_m(x)]^T, \qquad Bx - d = [s_1(x), \dots, s_k(x)]^T,$$
$$\{l_j(x), s_i(x)\}_{1,1}^{m,k} \subset \mathbf{L}_0$$

($\mathbf{L}_0$ — пространство аффинных функций). Положим

$$M_i = \{x \mid l_j(x) \le s_i(x),\ j = 1, \dots, m\}.$$

Тогда, как легко видеть, $\bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$ совпадает с множеством решений неравенства (3.3). Тем самым для неравенства (3.3) указаны те многогранники M_i, объединение которых и дает множество решений неравенства (3.3). С другой стороны, если полиэдральное множество M задано тем или иным образом, например, как в предыдущем случае, — совокупностью систем линейных неравенств, каждая из которых задает выпуклую многогранную компоненту множества M, то требуется цепочка тех или иных преобразований типа (1.3)–(1.8), приводящая к заданию множества M одним неравенством вида (3.3).

Наконец, рассмотрим систему кусочно-линейных неравенств в форме (3.1), формально более сложную, чем (3.2) или (3.3). Положим

$$M_j^t := \{x \mid A_j^t x \le b_t^j\}, \qquad M_t := \bigcup_{(j)} M_j^t, \qquad M := \bigcap_{(t)} M_t.$$

Множество M_t — это множество решений t-го неравенства в системе (3.1), так что M — множество решений всей системы.

Материал, изложенный в § 1–§ 3, устанавливает способы конструктивного соответствия между полиэдральными множествами и их аналитическим заданием. Хотя сопутствующая этому алгебра преобразований может быть достаточно громоздкой, тем не менее логика этих преобразований проста и может быть в реальных прикладных ситуациях поручена компьютеру.

4. Задача кусочно-линейного программирования

4.1. *Предварительные замечания.* Произвольной задаче кусочно-линейного программирования, т.е. задаче поиска экстремума k-функции при ограничениях в форме конечной системы неравенств с k-функциями в левых частях, можно придать универсальный и простой вид

$$P : \max\{(c, x) \mid \min_{j=1,\dots,m} |A_j x - b^j|_{\max} \le 0,\ x \ge 0\}. \tag{4.1}$$

Действительно, о способе сведения системы k-неравенств к одному k-неравенству уже говорилось. Если же $f(x)$ — произвольная оптимизируемая, пусть максимизируемая, k-функция при одном k-неравенстве, пусть $g(x) \leq 0$ (возможно с $x \geq 0$), то переписав задачу $\max\{f(x)|g(x) \leq 0\}$ в виде

$$\max\{t \mid g(x) \leq 0,\ f(x) \geq t\}$$

и преобразовав систему из двух k-неравенств к одному k-неравенству, получим задачу поиска максимума линейной функции при одном ограничении в форме k-неравенства. В (4.1) ограничение $x \geq 0$ выделено для целей обеспечения симметрии в ряде аналитических конструкций, рассматриваемых ниже.

Итак, объектом рассмотрения примем задачу (4.1). Введем *частичную* задачу

$$L_j : \max\{(c,x) \mid A_j x \leq b^j,\ x \geq 0\}. \tag{4.2}$$

Связь между задачей (4.1) и L_j проста:

$$\operatorname{opt}(4.1) = \max_{(j:M_j \neq \emptyset)} \operatorname{opt} L_j, \tag{4.3}$$

где $M_j = \{x \geq 0 \mid A_j x \leq b^j\}$. В (4.2) для некоторых j множества $M_j = \{x \geq 0 \mid A_j x \leq b^j\}$ могут быть пустыми при свойстве разрешимости исходной задачи (4.1), т.е. произвольная k-задача, будучи преобразована к виду (4.1), распадается на конечное число задач линейного программирования, решив которые, тем самым находим решение и исходной задачи. Поскольку конструктивизм соответствующих преобразований обеспечен, то формально решение произвольной задачи кусочно-линейного программирования сводится к использованию отмеченного конструктивизма и некоторого метода (напр., симплекс-метода) решения задачи ЛП.

4.2. *Условия разрешимости k-задачи.* Для k-задач выполняется ряд свойств и теорем, формулируемых в рамках теории линейного программирования. Некоторые из них являются следствиями теорем из ЛП, некоторые же требуют своих доказательств, по крайней мере, уточнений. Не требует самостоятельного доказательства

Теорема 4.1 (о достижимости). *Если*

$$\sup\{(c,x)|\min_{(j)} |A_j x - b^j|_{\max} \leq 0,\ x \geq 0\} < +\infty,$$

то операция sup *в этой задаче достижима.*

Выпишем задачу, двойственную к L_j:

$$L_j^* : \min\{(b^j, u^j) \mid A_j^T u^j \geq c,\ u^j \geq 0\}. \tag{4.4}$$

Пусть $M_j^* = \{u^j \geq 0 \mid A_j^T u^j \geq c\}$.

Теорема 4.2. *Задача* (4.1) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$M = \bigcup_{j=1}^{m} M_j \neq \emptyset \qquad \text{и} \qquad M_j \neq \emptyset \Longrightarrow M_j^* \neq \emptyset.$$

Доказательство. Поскольку условия $M_j \neq \emptyset$ и $M_j^* \neq \emptyset$ являются необходимыми и достаточными для разрешимости задачи L_j, то $\max\limits_{j:M_j \neq \emptyset} \operatorname{opt} L_j$ конечен и является значением $\operatorname{opt} P$. Обратно, если задача P разрешима, то все задачи L_j с $M_j \neq \emptyset$ разрешимы (т.е. ситуации $\operatorname{opt} L_j = +\infty$ исключаются), а тогда в соответствии с теоремой двойственности в ЛП $M_j^* \neq \emptyset$, что и требовалось. □

Замечание 4.1. Другой вариант формулировки теоремы 4.2 состоит в эквивалентности

$$(P \text{ разрешима }) \iff (M \neq \emptyset\,\&\, M_j \neq \emptyset \Longrightarrow L_j \text{ разрешима}).$$

4.3. *Двойственность.* Исходную k-задачу возьмем в форме (4.1), дополнив ее предположением (впрочем, несущественным): размерность векторов $A_j x - b^j$ одинакова, т.е. число неравенств в каждой из систем $A_j x \leq b^j$ одно и то же. Введенное условие позволяет двойственную переменную для L_j, т.е. переменную u^j в задаче (4.4) обозначать одним символом u. В соответствии со сказанным задачу (4.4) перепишем в виде

$$\min\{(b^j, u) \mid A_j^T u \geq c,\ u \geq 0\}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.5}$$

Задачу

$$P^* : \max_{j : M_j^* \neq \emptyset} \min\{(b^j, u) \mid A_j^T u \geq c,\ u \geq 0\} \tag{4.6}$$

будем рассматривать как двойственную к P. По отношению к форме задания P задача P^* не симметрична, но если P переписать в эквивалентном виде

$$\max_{j \in \overline{1, m}} \min\{(c, x) \mid A_j x \geq b^j,\ x \geq 0\}, \tag{4.7}$$

то (4.6) и (4.7) принимают симметричный вид.

В отношении задачи (4.6) справедлива

Теорема 4.3. *Задача* (4.6) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\exists\, j \in \overline{1,\, m} : M_j^* \neq \emptyset \,\&\, M_j \neq \emptyset. \tag{4.8}$$

Доказательство. Действительно, если $J := \{j \mid M_j \neq \emptyset, M_j^* \neq \emptyset\}$, то для $j \notin J : \inf\{(b^j, u) \mid x \in M_j^*\} = -\infty$, поэтому в (4.6) максимум можно брать только по $j \in J$. Этим и обеспечивается разрешимость задачи P^*. Необходимость условий (4.8) очевидна: если P^* разрешима, то хотя бы для одного j' задача L_j^* разрешима, что эквивалентно (4.8). $\square$

Из теорем 4.2 и 4.3, а также теоремы двойственности в ЛП вытекает

Теорема 4.4. *Если задача* (4.1) *разрешима, то* (4.6) *также разрешима, при этом их оптимальные значения совпадают.*

В ситуации задач P и P^* свойство одновременной их разрешимости или неразрешимости в отличие от ЛП теряется. Принимая во внимание возможность несобственных оптимальных значений, запишем эти задачи в виде

$$P : \sup_{(j)} \inf_{x \in M_j} (c,\ x), \qquad P^* : \sup_{(j)} \inf_{u \in M_j^*} (b^j, u).$$

Условия одновременной разрешимости P и P^* определяются теоремами 4.2 и 4.3, но возможна и ситуация: P не разрешима, P^* разрешима. Это соответствует тому, что при разрешимости P^* $\exists\, j_0 : M_{j_0} \neq \emptyset \,\&\, M_{j_0}^* = \emptyset$, т.е. задача L_{j_0} — несобственная 2-го рода. Так как в рассматриваемой ситуации $\sup\limits_{x \in M_{j_0}} (c, x) = +\infty$, то $\operatorname{opt} P = +\infty$, т.е. P не разрешима. Одновременная неразрешимость задач P и P^* реализуется на паре задач линейного программирования L и L^*, являющихся несобственными 3-го рода.

5. Задача о седловой точке дизъюнктивной функции Лагранжа

Пусть $\{M_j\}_1^m \subset \mathbf{R}^n$ и $f(x)$ — произвольная функция, заданная на $\mathbf{R}^n$. Запишем задачи

$$\begin{aligned} &P_\cap : \max\{f(x) \mid x \in \bigcap_{(j)} M_j\}, \\ &P_\cup : \max\{f(x) \mid x \in \bigcup_{(j)} M_j\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Первую из них назовем задачей в *конъюнктивной* постановке, вторую — в *дизъюнктивной*. Первая из постановок обычна для традиционных постановок задач математического программирования. Вторая из них отражает ситуацию кусочно-линейной задачи (4.1), которую можно переписать в виде

$$\max\{(c,x)\mid x\in\bigcup_{(j)}M_j\}$$

при $M_j=\{x\mid A_j(x)\le b^j,\ x\ge 0\}$, $j=1,\dots,m$.

Рассмотрим задачу (5.1) при условиях

$$M_j=\{x\mid F_j(x)\le 0,\ x\ge 0\},\quad F_j:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{m_j},\quad j=1,\dots,m.$$

Зафиксируем схему соответствия задачам $P_\cap$ и $P_\cup$ их функций Лагранжа

$$\begin{aligned}&P_\cap\to f(x)-\sum_{j=1}^{m}(u_j,F_j(x))=\Phi_\cap(x,u),\\&P_\cup\to f(x)-\min_{(j)}(u_j,F_j(x))=\Phi_\cup(x,u)\end{aligned}\tag{5.2}$$

— *дизъюнктивная функция* Лагранжа для $P_\cup$.

Задачу (5.1) назовем *вполне регулярной*, если каждая из задач

$$\max\{f(x)\mid F_j(x)\le 0,\ x\ge 0\}\tag{5.1_j}$$

разрешима. Эквивалентом такой регулярности является разрешимость задачи и $M_j\ne\emptyset$, $j=1,\dots,m$.

Используем в дальнейшем следующее обозначение: если экстремальной задаче приписан номер t, то ее решение или множество решений будет обозначаться через $\arg(t)$, $\mathrm{Arg}(t)$ соответственно, а оптимальное значение — через $\mathrm{opt}(t)$.

Пусть $\Phi_j(x,u_j)=f(x)-(u_j,F_j(x))$ — функция Лагранжа для $(5.1)_j$, $x\in\mathbf{R}^n$, $u_j\in\mathbf{R}^{m_j}$. Справедлива хорошо известная (напр., [7])

Лемма 5.1. *Если точка $[\bar x,\bar u]\ge 0$ является седловой для функции Лагранжа $\Phi(x,u)=f(x)-(u,F(x))$, поставленной в соответствие задаче*

$$\max\{f(x)\mid F(x)\le 0,\ x\ge 0\},\tag{5.3}$$

то $(\bar u,F(\bar x))=0$ и $\bar x\in\mathrm{Arg}(5.3)$.

Лемма 5.2. *Пусть каждая из функций $\Phi_j(x,u_j)$ обладает седлом $[\bar x_j,\bar u_j]\ge 0$, $j=1,\dots,m$. Если $\bar x$ — такое значение $\bar x_j$, на котором достигается $\max_{(j)} f(\bar x_j)$, то*

$$\Phi(x,\bar u)\le f(\bar x)\quad\forall x\ge 0,\tag{5.4}$$

где $\Phi(x,\bar u)=f(x)-\min_{(j)}(\bar u_j,F_j(x))$.

Доказательство. Согласно лемме 5.1 $(\bar u_j,F_j(\bar x_j))=0$, $j=1,\dots,m$, и $f(x)-(\bar u_j,F_j(x))\le f(\bar x_j)$ $(\le f(\bar x))$ $\forall\,x\ge 0$. Отсюда

$$\max_{(j)}[f(x)-(\bar u_j,F_j(x))]\le f(x)-\min_{(j)}(\bar u_j,F_j(x))=\Phi(x,\bar u)\le f(\bar x)\ \forall\,x\ge 0.\quad\square$$

Лемма 5.3. *Если $[\bar x,\bar u]\ge 0$ — седловая точка для $\Phi(x,u)$, то $\min_{(j)}(\bar u_j,F_j(\bar x))=0$ и $\bar x\in\mathrm{Arg}(5.1)$.*

Доказательство. В соответствии с определением седловой точки

$$\Phi(x,\bar{u}) \underset{\forall x\geq 0}{\leq} \Phi(\bar{x},\bar{u}) \underset{\forall u\geq 0}{\leq} \Phi(\bar{x},u),$$

или

$$f(x) - \min_{(j)}(\bar{u}_j, F_j(x)) \underset{\forall x\geq 0}{\leq} f(\bar{x}) - \min_{(j)}(\bar{u}_j, F_j(\bar{x})), \tag{5.5}$$

$$f(\bar{x}) - \min_{(j)}(\bar{u}_j, F_j(\bar{x})) \underset{\forall u\geq 0}{\leq} f(\bar{x}) - \min_{(j)}(u_j, F_j(\bar{x})). \tag{5.6}$$

Соотношение (5.6) перепишем в виде

$$\min_{(j)}(\bar{u}_j, F_j(\bar{x})) \underset{\forall u\geq 0}{\leq} \min_{(j)}(u_j, F_j(\bar{x})). \tag{5.7}$$

Докажем, во-первых, $\bar{x} \in M = \bigcup\limits_{(j)} M_j$, т.е. $j_0 : F_{j_0}(\bar{x}) \leq 0$. Если бы $F_j(\bar{x}) \not\leq 0 \;\forall j$, то за счет выбора $u \geq 0$ можно было бы значение правой части в (5.7) сделать как угодно большим, что будет противоречить соотношению (5.7). Доказанное дает $\alpha := \min\limits_{(j)}(\bar{u}_j, F_j(\bar{x})) \leq 0$. На самом деле, $\alpha = 0$. Если бы $\alpha < 0$, то соотношение (5.7) при $u = 0$ порождало бы противоречивое неравенство $0 > -|\alpha| \geq 0$. Итак, соотношение $\min\limits_{(j)}(\bar{u}_j, F_j(\bar{x}))$ доказано.

Необходимо доказать оптимальность вектора $\bar{x}$ для (5.1), т.е. $f(x) \leq f(\bar{x}) \;\forall x \in M$. Обратимся к соотношению (5.5), которое можно теперь переписать в виде

$$f(\bar{x}) - f(x) \geq -\min_{(j)}(\bar{u}_j, F_j(x)). \tag{5.8}$$

Если $x \in M$, т.е. $x \in M_{j_0}$ при некотором j_0, то $\min\limits_{(j)}(\bar{u}_j, F_j(x)) \leq 0$, что в силу (5.8) дает $f(\bar{x}) - f(x) \geq 0 \;\forall x \in \bigcup\limits_{(j)} M_j$. $\square$

Лемма 5.4. *Пусть задача* (5.1), *т.е.*

$$L_\cup : \max\{(c,x) \mid x \in \bigcup_{j=1}^{m} M_j\},$$

при $M_j = \{x \mid A_j x \leq b^j,\; x \geq 0\}$ *разрешима и* $M_j \neq \emptyset \;\forall j$ *(т.е. вполне регулярна). Тогда функция* $L_\cup(x,u) = (c,x) - \min\limits_{(j)}(u_j,\; A_j x - b^j)$ *обладает седлом* $[\bar{x},\bar{u}]$, *причем в качестве* $\bar{x}$ *и* $\bar{u} = [\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m]$ *выступают*

$$\bar{x} = \arg\max_{(j)}(c,\bar{x}_j), \quad \bar{x}_j \in \operatorname{Arg}\max_{x\in M_j}(c,x), \quad \bar{u}_j \in \operatorname{Arg}\min_{u\in M^*}(b^j,u), \quad j = 1,\ldots,m.$$

Доказательство. Если показать, что $\alpha := \min\limits_{(j)}(\bar{u}_j, A_j\bar{x} - b^j) = 0$, то в силу леммы 5.2 левое неравенство в определении седла для $L_\cup(x,u)$ будет выполнено. Так как вектор $\bar{x} \geq 0$ удовлетворяет одной из систем $A_j x \leq b^j$, то $\alpha \leq 0$. Покажем $\alpha \geq 0$. Имеем

$$\min_{(j)}(\bar{u}_j, A_j\bar{x} - b^j) = \min_{(j)}[-(b^j,\bar{u}_j) + (c,\bar{x}) + (A_j^T\bar{u}_j - c,\bar{x})] \geq \min_{j}[(c,\bar{x}) - (c,\bar{x}_j)] \geq 0.$$

Выше мы воспользовались соотношениями: $A_j^T\bar{u}_j - c \geq 0$; $(b^j,\bar{u}_j) = (c,\bar{x}_j)$ — по теореме двойственности в ЛП; $(c,\bar{x}) \geq (c,\bar{x}_j) \;\forall j$.

Остается показать выполнимость правого неравенства в определении седловой точки для $L_\cup(x,u)$, т.е.

$$L_\cup(\bar{x},\bar{u}) \underset{\forall u\geq 0}{\leq} L_\cup(\bar{x},u).$$

С учетом $\alpha = 0$ выписанное неравенство принимает вид

$$0 \underset{\forall u_j\geq 0}{\leq} -\min_{(j)}(u_j, A_j\bar{x} - b^j). \tag{5.9}$$

Так как $\forall j_0 \ A_{j_0}\bar{x} - b^j \le 0$, то при любом $u \le 0 \ \ \min\limits_{(j)}(u_j, A_j\bar{x} - b^j) \le 0$, следовательно, (5.9) верно. $\square$

Из лемм 5.3 и 5.4 вытекает

Теорема 5.1. *Если системы $A_j x \le b^j$, $x \ge 0$, $j = 1, \ldots, m$, совместны, то задача* (5.1) *разрешима тогда и только тогда, когда ее дизъюнктивная функция Лагранжа*

$$L_\cup(x,u) = (c,x) - \min_{(j)}(u_j, A_j x - b^j)$$

обладает седлом $[\bar{x}, \bar{u}] \ge 0$, при этом

1) *если $L_\cup$ разрешима и $\bar{x}_j \in \operatorname{Arg} L_j$, $\bar{u}_j \in \operatorname{Arg} L_j^*$, $\bar{x} = \arg\max\limits_{(j)}(c, \bar{x}_j)$, то $[\bar{x}, \bar{u}]$ — седло;*

2) *если $[\bar{x}, \bar{u}]$ — седло для $L_\cup(x,u)$, то $\{\bar{x}, \bar{u}_j\}$ удовлетворяют всем соотношениям из* 1).

Существование седловой точки $[\bar{x}, \bar{u}] \ge 0$ функции $\Phi(x,u)$, пусть в форме (5.5)–(5.6), эквивалентно выполнимости соотношения

$$\max_{x \ge 0} \min_{u \ge 0} \Phi(x,u) = \min_{u \ge 0} \max_{x \ge 0} \Phi(x,u) = \Phi(\bar{x}, \bar{u}). \tag{5.10}$$

В игровой интерпретации двойственности в математическом программировании утверждения типа теоремы 5.1 естественно давать через соотношение (5.1), а именно, справедлива

Теорема 5.2. *Пусть задача* (5.1) *разрешима и $M_j \ne \emptyset \ \forall j$. Тогда для $\bar{x} \in \operatorname{Arg}(5.1)$ существуют $\bar{u}_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, m$, такие, что вектор $[\bar{x}, \bar{u}]$ будет удовлетворять соотношению* (5.10) *при*

$$\Phi(x,u) = L_\cup(x,u) = (c,u) - \min_{(j)}(\bar{u}_j, A_j x - b^j).$$

6. Метод точных штрафных функций для задачи кусочно-линейного программирования

Общую задачу кусочно-линейного программирования в канонической постановке (4.1), т.е.

$$P_\cup : \max\{(c,x) \,|\, \min_{j=1,\ldots,m} |A_j x - b^j|_{\max} \le 0, \ x \ge 0\}, \tag{6.1}$$

можно привести к эквивалентной задаче этого же типа, но со снятием основного ограничения в (6.1). Поставим задаче $L_\cup$ в соответствие k-задачу

$$\sup_{x \ge 0}\,[(c,x) - \min_{(j)}(R_j, (A_j x - b^j)^+)], \tag{6.2}$$

где R_j — неотрицательный векторный параметр размерности m_j, т.е m_j — число неравенств в системе $A_j x - b^j \le 0$.

Как и в предыдущем параграфе, будем использовать следующие обозначения: L_j — это задача $\max\{(c,x) \mid A_j x \le b^j, \ x \ge 0\}$, L_j^* — двойственная к ней, $\bar{u}_j = \arg L_j^*$, $\bar{u} = [\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m]$, $M_j = \{x \ge 0 \mid A_j x \le b^j\}$.

Теорема 6.1. *Пусть задача* (6.1) *разрешима, $M_j \ne \emptyset \ \forall j$; $\bar{u}_j \in \operatorname{Arg} L_j^*$. Если $R_j \ge R_0 \bar{u}_j$, $R_0 > 1$, то оптимальные значения и оптимальные множества задач* (6.1) *и* (6.2) *совпадают, т.е.*

$$\operatorname{opt}(6.1) = \operatorname{opt}(6.2), \tag{6.3}$$

$$\operatorname{Arg}(6.1) = \operatorname{Arg}(6.2). \tag{6.4}$$

Доказательство. Обозначим целевую функцию в (6.2) через $\Phi_R(x)$, а вычитаемую из (c,x) часть — через $\Phi_0(x)$. Докажем вначале равенство (6.3). Для $\bar{x} \in \mathrm{Arg}(6.1)$ получаем $\Phi_R(\bar{x}) = (c,\bar{x}) = \mathrm{opt}(6.1)$, следовательно, $\mathrm{opt}(6.2) = \sup\limits_{x\geq 0} \Phi_R(x) \geq \mathrm{opt}(6.1)$.

Докажем обратное неравенство. По леммам 5.4 и 5.3

$$(c,x) - \min_{(j)} (\bar{u}_j, A_j x - b^j) \leq (c,\ \bar{x}) \quad \forall\, x \geq 0.$$

С учетом этого неравенства оценим $\Phi_R(x)$ для $x \geq 0$

$$\begin{aligned}\Phi_R(x) &\leq (c,\bar{x}) + \min_{(j)} (\bar{u}_j,\ A_j x - b^j) - \Phi_0(x) \leq \\ &\leq \mathrm{opt}(6.1) + \min_{(j)} (\bar{u}_j,\ (A_j x - b^j)^+) - \Phi_0(x) \leq \mathrm{opt}(6.1) + \frac{1}{R_0}(R_j,\ (A_j x - b^j)^+) - \Phi_0(x) = \\ &= \mathrm{opt}(6.1) - \frac{R_0 - 1}{R_0} \min_{(j)} (R_j,\ (A_j x - b^j)^+) \leq \mathrm{opt}(6.1). \qquad (6.5)\end{aligned}$$

Отсюда $\sup\limits_{x\geq 0} \Phi_R(x) \leq \mathrm{opt}(6.1)$. Таким образом, равенство (6.3) доказано. Из него, в частности, следует включение $\mathrm{Arg}(6.1) \subset \mathrm{Arg}(6.2)$, что позволяет, на самом деле, в задаче (6.2) вместо sup писать max. Докажем обратное включение. Пусть $\bar{x} \in \mathrm{Arg}(6.2)$. Согласно (6.5) имеем

$$\mathrm{opt}(6.1) = \Phi_R(\bar{x}) \leq \mathrm{opt}(6.1) - \frac{R_0 - 1}{R_0} \min_{(j)} (R_j,\ (A_j \bar{x} - b^j)^+).$$

Отсюда вытекает $\min_{(j)} (R_j,\ (A_j\bar{x} - b^j)^+) = 0$, а потому $\exists\, j_0 : (R_{j_0},\ (A_{j_0}\bar{x} - b^{j_0})^+) = 0$, что ввиду $R_{j_0} > 0$ дает $A_{j_0}\bar{x} \leq b^{j_0}$. Следовательно, $\bar{x} \in M_{j_0} \subset M = \bigcup\limits_{j=1}^{m} M_j$. Допустимость вектора $\bar{x}$ для задачи (6.1) вместе с $(c,\bar{x}) = \mathrm{opt}(6.1)$ означает $\bar{x} \in \mathrm{Arg}(6.1)$, а потому и $\mathrm{Arg}(6.2) \subset \mathrm{Arg}(6.1)$. Доказательство равенства (6.4) также завершено. $\square$

Конструкция доказательства может быть повторена для более общей ситуации, а именно для задачи (5.2) и эквивалентной редукции ее к задаче

$$\sup_{x\geq 0} \,[f(x) - \min_{(j)} (R_j, F_j^+(x))]. \qquad (6.6)$$

Справедлива

Теорема 6.2. *Пусть каждая из задач* $\max\{f(x) \mid F_j(x) \leq 0,\ x \geq 0\}$ *обладает седлом* $[\bar{x}_j, \bar{u}_j]$. *Тогда при* $R_j > R_0\,\bar{u}_j,\ R_0 > 1$, *задачи* (5.2) *и* (6.6) *эквивалентны в смысле совпадения их оптимальных значений и оптимальных множеств.*

Действительно, в соответствии с леммой 5.3 можно выписать неравенство

$$f(x) \leq f(\bar{x}) + \min_{(j)} (\bar{u}_j, F_j(x)) \quad \forall\, x \geq 0,$$

а далее все повторить в соответствии с выкладками (6.5).

7. Вопросы полиэдральной разделимости

Задача разделимости непересекающихся множеств M и N из некоторого пространства $\mathbf{X}$ с помощью функции $f(x)$ из фиксированного класса $\mathcal{F}_0$ называется *дискриминацией множеств*. Функция $f(x)$ в этом случае называется *дискриминантной*. Разделимость состоит в выполнимости неравенств

$$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in M; \qquad f(y) < 0 \quad \forall\, y \in N. \qquad (7.1)$$

Можно говорить и о нестрогой разделимости, когда в (7.1) допускаются нестрогие неравенства.

Если M и N — выпуклые многогранники, а $\mathcal{F}_0$ — класс аффинных функций, то говорят о задаче *линейной дискриминации.* Задача линейной дискриминации является одной из важнейших задач в распознавании образов (РО). В качестве одной из базовых формальных моделей РО является система строгих линейных однородных неравенств. Убедимся в этом.

Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{L}$ — некоторые *образы*, $A = \{a_j\} \subset \mathbf{R}^n$ и $B = \{b_i\} \subset \mathbf{R}^n$ — формализованные выборки представителей этих образов. Если $\{f_s(x)\}_1^k$ — некоторый базовый набор функций (вообще говоря, произвольный), то разделяющую функцию можно искать в виде $f(x) = \sum\limits_{s=1}^{k} z_s\, f_s(x)$, где $\{z_s\}$ — числовые коэффициенты. Свойство разделимости состоит в выполнимости системы неравенств

$$\sum_{s=1}^{k} z_s\, f_s(a_j) > 0\ \forall\, j\,; \qquad \sum_{s=1}^{k} z_s\, f_s(b_i) < 0\ \forall\, i,$$

или в матричном виде

$$\overline{A}z > 0, \quad \overline{B}z < 0, \tag{7.2}$$

где $\overline{A} := [a_{js}]$, $a_{js} := f_j(a_s)$; $\overline{B} := [b_{is}]$, $b_{is} := f_s(b_i)$.

Если $\bar{z} = [\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k]$ — некоторое решение системы (7.2), то функция $f(x) = \sum\limits_{s=1}^{k} \bar{z}_s\, f_s(x)$ будет строго разделяющей множества A и B. Дискриминантная функция $f(x)$ реализует соотнесение (по свойству принадлежности одному из образов $\mathcal{G}$ и $\mathcal{L}$) предъявляемого для распознавания вектора y по правилу

$$y \in \mathcal{G}, \quad \text{если} \quad f(y) > 0; \qquad y \in \mathcal{L}, \quad \text{если} \quad f(y) < 0.$$

Функция $f(x)$ реализует *решающее правило.* Система (7.2) может быть как совместной, так и несовместной. На случай несовместности имеется обобщение понятия решения как конечной совокупности векторов $\{c_l\} \subset \mathbf{R}^n$ (именуемой *комитетным решением*) такой, что любое из неравенств системы (7.2) удовлетворяется более чем половиной векторов этой совокупности. Комитетная технология и ее использования в задачах распознавания составляют важное и хорошо разработанное направление в распознавании образов [8].

Если M и N — многогранники, причем $M \bigcap N = \emptyset$, то эти множества строго разделяются аффинной функцией. Ниже речь пойдет о разделимости произвольных непересекающихся полиэдральных множеств кусочно-линейной функцией (k-функцией).

Итак, пусть $M = \bigcup\limits_{(j)} M_j$, $N = \bigcup\limits_{(i)} N_i$, $\{M_j\}$ и $\{N_i\}$ — конечные совокупности выпуклых многогранников, причем $M \bigcap N = \emptyset$. Имеет место

Теорема 7.1. *Полиэдральные множества M и N с пустым пересечением строго разделяются k-функцией, т.е. функцией вида* (2.2)

$$f(x) = \min_{j \in \overline{1,m}} |A_j x - b^j|_{\max}. \tag{7.3}$$

Доказательство. Полиэдральное множество может быть задано одним k-неравенством: если $M_j = \{x \mid A_j x \le b^j\}$ и $N_i = \{x \mid B_i x \ge d^i\}$, то

$$M = \{x \mid f(x) \le 0\},$$

где $f(x)$ — функция (7.3);

$$N = \{x \mid g(x) \ge 0\},$$

где $g(x) = \max\limits_{(i)} |B_i x - d^i|_{\min}$. Учитывая соотношения: $\mathbf{X} \backslash M \supset N$, $\mathbf{X} \backslash N \supset M$, при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ будем иметь

$$\alpha\, f(x) + \beta\, g(x) < 0\ \forall\, x \in M; \quad \alpha\, f(y) + \beta\, g(y) > 0\ \forall\, y \in N.$$

Таким образом, построена функция $f_{\alpha,\beta}(x) := \alpha\, f(x)+\beta\, g(x)$, зависящая от числовых параметров $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, строго разделяющая полиэдральные множества M и N. $\square$

Следствие 7.1. Пусть $\mathbf{R}^n \supset \{a_j\}_{j\in J}$ и $\mathbf{R}^n \supset \{b_i\}_{i\in I}$ — конечные совокупности точек из $\mathbf{R}^n$, при этом $\{a_j\} \bigcap \{b_i\} = \emptyset$. Тогда существует k-функция $f(x)$, строго разделяющая эти множества, т.е.

$$f(a_j) < 0\ \forall\, j \in J; \quad f(b_i) > 0\ \forall\, i \in I.$$

Действительно, поскольку точка из $\mathbf{R}^n$ может быть задана конечной системой линейных неравенств (если $\bar{x} = [\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n]$, то $\bar{x} = \{x \mid \bar{x} \le x \le \bar{x}\}$), то сформулированное следствие превращается в частный случай теоремы 7.1. На самом деле, в данном следствии пространство, из которого берутся точки, может быть произвольным. Сведение к конечномерному арифметическому пространству тривиально: достаточно взять подпространство $\mathbf{E}_k$ исходного пространства, натянутое на совокупность $\{a_j\}_{j\in J} \bigcup \{b_i\}_{i\in I}$, выделить его базис, в котором векторы a_j и b_i будут представлены точками конечномерного арифметического пространства. Если взять прямое разложение $\mathbf{X} = \mathbf{E}_k + \mathbf{H}$, то k-функция $f(x)$, разделяющая указанные совокупности точек в $\mathbf{E}_k$, может быть продолжена до k-функции $\bar{f}(x)$, определенной на всем пространстве $\mathbf{X}$, по правилу: если $x \in \mathbf{X}$ и $x = \bar{x} + h$, $\bar{x} \in \mathbf{E}_k$, $h \in \mathbf{H}$, то $\bar{f}(x) = f(\bar{x})$.

Литература

1. Плотников С.В. *Методы проектирования в задачах нелинейного программирования.* Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Свердловск: УрГУ, 1983. – С. 83–118.
2. Волокитин Е.П. *О представлении непрерывных кусочно-линейных функций* // Управляемые системы. – Новосибирск: Наука, 1979. – № 19. – С. 14–21.
3. Meltzer D. *On the expressibility of piecewise linear continuous functions as the difference of two piecewise linear convex functions* // Math. Program., Study 29. – 1986. – P. 118–134.
4. Kripfganz A., Schulze R. *Piecewise affine functions as a difference of two convex functions* // Optimization. – 1987. – V. 18. – № 1. – P. 23–29.
5. Benchekroun B. *A nonconvex piecewise linear optimization problem* // Computers Math. Applic. – 1991. – V. 21. – № 6 / 7. – P. 77–85.
6. Gorokhovik V.V., Zorko O.I. *Piecewise affine functions and polyhedral sets* // Optimization. – 1994. – V. 33. – P. 209–221.
7. *Исследования по линейному и нелинейному программированию* / Под ред. К.Дж. Эрроу, Д. Гурвица, Х. Удзавы. – М.: Иност. Лит., 1962. – 298 с.
8. Мазуров В.Д. *Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации.* – М.: Наука, 1990. – 246 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии Наук

Поступила
22.08.1997