МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ.И.И.ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Специальность: 010100 —- математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(дипломная работа)

«О вещественных решениях линейных эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами.»

Работа завершена:
Студент 05–903 группы математического отделения
_____ 2014 г. _____ (М. В. Аношина)

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор
_____ 2014 г. _____ (И. А. Бикчантаев)

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор
_____ 2014 г. _____ (Ю. В. Обносов)

Казань — 2014

Содержание

Введение

Пусть

$$L := \sum_{k=0}^{2} a_k \frac{\partial^2}{\partial x^{2-k} \partial y^k} \qquad (I)$$

-эллиптическое уравнение с постоянными комплексными коэффициентами a_0, a_1, a_2, причем $a_2 \neq 0$. Эллиптичность означает, что характерестический многочлен $a_0 + a_1 s + a_2 s^2$ не имеет вещественных корней. Обозначим корни этого многочлена через s_1 и s_2. В области $D \subset \mathbb{C}$ рассмотрим уравнение

$$LF = 0 \qquad (II)$$

Не умаляя общности, будем считать, что решение F уравнения (I) определено в области $D \subset \mathbb{C}$, содержащей внутри начало координат. Любое регулярное в D решение уравнения (I) единственным образом представимо в виде

$$F(z) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2),$$

где $z = x + iy, z_q = T_q(z_q) := x + s_q y, q = 1, 2$ функции $\varphi_q, q = 1, 2$, голоморфны в $T_q(D), \varphi_2(0) = 0$.

Цель дипломной работы - нахождение вещественных решений линейных эллиптических уравнений. Отметим, что в случае, когда $s_1 = s_2 = i$ уравнение (I) определяет так называемые бианалитические функции. Общий вид действительных бианалитических функций был получен М. Б. Балком [4].

Вещественные решения линейного эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$Lf(z) := \sum_{0\le k+j\le 2} A_{kj}\frac{\partial^{k+j} f(z)}{\partial x^k \partial y^j} = 0,\ z = x+iy,\ x,\ y\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

с постоянными комплексными коэффициентами $A_{kj}, A_{02}\neq 0$. Эллиптичность означает, что корни $s_q, q = 1,2$, характеристического многочлена $A_{02}s^2 + A_{11}s + A_{20}$ не вещественны.

Цель данной работы получить общий вид действительного решения уравнения вида (1).

Главная часть

$$L_0 := \sum_{k+j=2} A_{kj}\frac{\partial^{k+j}}{\partial x^k \partial y^j} = 0$$

оператора L может быть записана в виде

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}_1 \partial \overline{z}_2}, \tag{2}$$

если, без ущерба для общности, принять $A_{02} = -(4\mathrm{Im}\, s_1 \mathrm{Im}\, s_2)^{-1}$. Здесь $z_q = T_q(z) := x + s_q y, q = 1,2$ - невырожденное в аффинное преобразование плоскости $z = x+iy$.

Предположим, что оператор L допускает факторизацию вида

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} - a_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} - a_2\right). \tag{3}$$

Такая факторизация возможна, если числа $a_1,\ a_2,\ A_{00},\ A_{10},\ A_{01}$ связаны соотношениями

$$a_1 a_2 = A_{00},\ \frac{\mathrm{i}a_2 s_1}{2\mathrm{Im}\, s_1} + \frac{\mathrm{i}a_1 s_2}{2\mathrm{Im}\, s_2} = A_{10},\ -\frac{\mathrm{i}a_2}{2\mathrm{Im}\, s_1} - \frac{\mathrm{i}a_1}{2\mathrm{Im}\, s_2} = A_{01}. \tag{4}$$

Для получения этих соотношений следует учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_q} = \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{Im}\, s_q}\left(\frac{\partial}{\partial y} - s_q\frac{\partial}{\partial x}\right),\ q = 1,\ 2.$$

При $s_1 = s_2 = i$ уравнение $Lf = 0$ определяет так называемые бианалитические функции переменного $z = x + iy$. Предположим, что $s_1 \neq s_2$. При этом два последних соотношения (4) обратимы, откуда

$$a_1 = \frac{2\mathrm{i}(A_{10} + A_{01}s_1)\mathrm{Im}\, s_2}{s_1 - s_2},\ a_2 = -\frac{2\mathrm{i}(A_{10} + A_{01}s_2)\mathrm{Im}\, s_1}{s_1 - s_2}.$$

Таким образом, для того, чтобы при $s_1 \neq s_2$ оператор L с главной часть (2) допускал факторизацию вида (3) необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты A_{00}, A_{10}, A_{01} были связаны соотношением

$$A_{00} = \frac{4(A_{10} + A_{01}s_1)(A_{10} + A_{01}s_2)\mathrm{Im}\, s_1 \mathrm{Im}\, s_2}{(s_1 - s_2)^2}.$$

При $s_1 = s_2$ соотношения (4) принимают вид

$$a_1 a_2 = A_{00},\ \frac{\mathrm{i}s_1}{2\mathrm{Im}\, s_1}(a_1 + a_2) = A_{10},\ -\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{Im}\, s_1}(a_1 + a_2) = A_{01},$$

откуда

$$\alpha_1 = \mathrm{i}A_{01}\mathrm{Im}\, s_1 \pm \sqrt{-\left(A_{01}\mathrm{Im}\, s_1\right)^2 - A_{00}},\ a_1 a_2 = A_{00},$$

а необходимое и достаточное условие представимости оператора L в виде (3) имеет вид

$$A_{10} + A_{01}s_1 = 0$$

Если $A_{00} = 0$, то хотя бы одно из чисел a_1 и a_2 равно нулю. Если $A_{00} = A_{10} = A_{01} = 0$, то есть $L = L_0$, то $a_1 = a_2 = 0$.

Используя представление (3) оператора L, легко получаем формулу для общего решения уравнения (1) в заданной области $D \subset \mathbb{C}$

$$f(z) = \varphi_1(z_1)\mathrm{e}^{a_1\overline{z}_1} + \varphi_2(z_2)\mathrm{e}^{a_2\overline{z}_2} \tag{5}$$

при $(s_1, a_1) \neq (s_2, a_2)$. Здесь φ_q - функция, голоморфная в области $D_q := T_q(D),\ q = 1,\ 2$. При $s_1 = s_2,\ a_1 = a_2$

$$f(z) = (\varphi(z_1) + \overline{z}_1\psi(z_1))\mathrm{e}^{a_1\overline{z}_1}, \tag{6}$$

Здесь φ и ψ -функции, голоморфные в области $D_1 := T_1(D)$. При $s_1 = s_2$ представления (5) и (6) единственны, а при $s_1 \neq s_2$ для единственности представления (5) следует наложить на функции $\varphi_1,\ \varphi_2$ дополнительное

условие. Например, считая без ущерба для общности, что $z = 0$ лежит в области D можно потребовать , чтобы $\varphi_2(0) = 0$.

Сначала рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} - af(z) = 0,\ a \in \mathbb{C},\ a \neq 0. \tag{7}$$

Его общее решение в области D имеет вид

$$f(z) = \varphi(z)\mathrm{e}^{a\overline{z}}, \tag{8}$$

где φ – голоморфная в D функция.

Запишем тейлоровские разложения

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \mathrm{e}^{a\overline{z}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a\overline{z})^j}{j!}. \tag{9}$$

Положим $a = \alpha + \mathrm{i}\beta,\ c_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k$, где $\alpha,\ \beta,\ \alpha_k,\ \beta_k \in \mathbb{R}$ и, используя (8) и (9), вычислим $\operatorname{Im} f(z)$.

$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a\overline{z})^j}{j!}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k + \mathrm{i}\beta_k)(x + \mathrm{i}y)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((\alpha + \mathrm{i}\beta)(x - \mathrm{i}y))^j}{j!}\right) =: \sum_{k,\ j=0}^{\infty} a_{kj} x^k y^j,$$

$$\alpha_{kj} \in \mathbb{R}.$$

Равенство $\operatorname{Im} f(z) = 0$ эквиваленто равенствам $a_{kj} = 0,\ k,\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, которые следует рассматривать как систему уравнений относительно чисел $\alpha_k,\ \beta_k,\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$.

$$a_{00} = \beta_0,$$

$$a_{10} = \beta_1 + \beta\alpha_0 + \alpha\beta_0, a_{01} = -\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0,$$

$$a_{20} = \alpha\beta\alpha_0 + \beta\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha^2\beta_0 - \frac{1}{2}\beta^2\beta_0 + \alpha\beta_1 + \beta_2,$$

$$a_{11} = -\alpha^2\alpha_0 + \beta^2\alpha_0 + 2\alpha_2 + 2\alpha\beta\beta_0,$$

$$a_{02} = -\alpha\beta\alpha_0 + \beta\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha^2\beta_0 + \frac{1}{2}\beta^2\beta_0 + \alpha\beta_1 - \beta_2,$$

$$a_{30} = \frac{1}{2}\alpha^2\beta\alpha_0 - \frac{1}{6}\beta^3\alpha_0 + \alpha\beta\alpha_1 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta_0 - \frac{1}{2}\alpha\beta^2\beta_0 +$$
$$+\frac{1}{2}\alpha^2\beta_1 - \frac{1}{2}\beta^2\beta_1 + \alpha\beta_2 + \beta_3 + \beta\alpha_2,$$

$$a_{21} = -\frac{1}{2}\alpha^3\alpha_0 + \frac{3}{2}\alpha\beta^2\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha^2\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta^2\alpha_1 +$$
$$+\alpha\alpha_2 + 3\alpha_3 + \frac{3}{2}\alpha^2\beta\beta_0 - \frac{1}{2}\beta^3\beta_0 + \alpha\beta\beta_1 - \beta\beta_2,$$

$$a_{12} = -\frac{3}{2}\alpha^2\beta\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta^3\alpha_0 + \alpha\beta\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha^3\beta_0 + \frac{3}{2}\alpha\beta^2\beta_0 +$$
$$+\frac{1}{2}\alpha^2\beta_1 - \frac{1}{2}\beta^2\beta_1 + \alpha\beta_2 - 3\beta_3 + \beta\alpha_2,$$

$$a_{03} = \frac{1}{6}\alpha^3\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha\beta^2\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha^2\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta^2\alpha_1 +$$
$$+\alpha\alpha_2 - \alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha^2\beta\beta_0 + \frac{1}{6}\beta^3\beta_0 + \alpha\beta\beta_1 - \beta\beta_2,$$

$$a_{40} = , a_{31} = , \ldots$$

Следует рассматривать три случая: 1) $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$, 2) $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$, 3) $\alpha \neq 0,\ \beta = 0$. Случай, когда $\alpha = \beta = 0$ очевидный, так как в этом случае f есть аналитичческая функция; она может быть вещественной в области D лишь в случае, когда она постоянна ($f(z) \equiv \alpha_0$).

Из формулы (8) видно, что уравнение (7) всегда имеет нетривиальное вещественное решение при $\varphi(z) = \mathrm{e}^{\bar{a}z}$. Полагая что, $\psi(z) = \varphi(z)\mathrm{e}^{-\bar{a}z}$, получим для $f(z)$ представление $f(z) = |\mathrm{e}^{\bar{a}z}|^2\psi(z)$. Отсюда следует, что аналитическая функция $\psi(z)$ вещественна и, следовательно, $\psi(z) = \mathrm{const}$. Следовательно, произвольное вещественное решение уравнения (7) имеет вид $f(z) = c|\mathrm{e}^{\bar{a}z}|^2 = c\mathrm{e}^{2(\alpha x+\beta y)}$, где c-произвольная вещественная постоянная.

При $s_1 \neq s_2$ любое регулярное в D решение уравнения $L_0 f = 0$ единственным образом представимо в виде

$$f(z) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2), \tag{10}$$

где $z = x + iy, z_q = T_q(z) := x + s_q y, q = 1, 2$,функции $\varphi_q, q = 1, 2$, голоморфны в $T_q(D), \varphi_2(0) = 0$.

Запишем тейлоровские разложения $\varphi_q(z_q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{qk} {z_q}^k, c_{20} = 0$ и, подставляя их в равенства (10) и $\mathrm{Im}\,(f) = 0$, получим

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{1k}(x + s_1 y)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}(x + s_2 y)^k\right) = 0 \tag{11}$$

Преобразуем левую часть этого уравнения.

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{1k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k}(x^{k-j}(s_1 y)^j) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k}(x^{k-j}(s_2 y)^j)\right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k}(c_{1k}(s_1)^j) + c_2 k(s_2)^j)(x^{k-j} y^j)\right).$$

Пусть $c_{qk} = \alpha_{qk} + i\beta_{qk}, s_q = \gamma_q + i\theta_q, \alpha_{qk}, \beta_{qk}, \gamma_q, \theta_q \in \mathbb{R}, q = 1, 2$

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}((\alpha_{1k} + i\beta_{1k})(\gamma_1 + i\theta_1)^j + (\alpha_{1k} + i\beta_{1k})(\gamma_2 + i\theta_2)^j)(x^{k-j} y^j)\right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \sum_{n=0}^{j} \binom{j}{n}(i^n(\alpha_{1k}\gamma_1^{j-n}\theta_1^n + \alpha_{2k}\gamma_2^{j-n}\theta_2^n) + \right.$$

$$\left. + i^{n+1}(\beta_{1k}\gamma_1^{j-n}\theta_1^n + \beta_{2k}\gamma_2^{j-n}\theta_2^n))(x^{k-j} y^j)\right) \tag{12}$$

где $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ - биномиальные коэффицтенты.

Коэффициент при $x^k y^j$ в разложении (12), обозначим их через a_{kj}. Тогда получим равносильную равенству (11)систему уравнений $a_{kj} = 0$, из которой каждый набор неизвестных $\alpha_{qk}, \beta_{qk}, q = 1, 2$ можно выделить в отдельную подсистему, состоящую только из этого набора неизвестных.

$$a_{00} = \beta_{10},$$

$$a_{10} = \beta_{11} + \beta_{21},$$

$$a_{01} = \theta_1\alpha_{11} + \theta_2\alpha_{21} + \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{21}\gamma_2,$$

$$a_{20} = \beta_{12} + \beta_{22},$$

$$a_{11} = 2\theta_1\alpha_{12} + 2\theta_2\alpha_{22} + 2\beta_{12}\gamma_1 + 2\beta_{22}\gamma_2,$$
$$a_{01} = -\beta_{12}\theta_1^2 - \beta_{22}\theta_2^2 + 2\theta_1\alpha_{12}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_1^2 + 2\theta_2\alpha_{22}\gamma_2 + \beta_{22}\gamma_2^2,$$

$$a_{30} = \beta_{13} + \beta_{23},$$
$$a_{21} = 3\theta_1\alpha_{13} + 3\theta_2\alpha_{23} + 3\beta_{13}\gamma_1 + 3\beta_{23}\gamma_2,$$
$$a_{12} = -3\beta_{13}\theta_1^2 - 3\beta_{23}\theta_2^2 + 6\theta_1\alpha_{13}\gamma_1 + 3\beta_{13}\gamma_1^2 + 6\theta_2\alpha_{23}\gamma_2 + \beta_{23}\gamma_2^2,$$
$$a_{03} = -\theta_1^3\alpha_{23} - \theta_2^3\alpha_{23} - 3\beta_{13}\theta_1^2\gamma_1 +$$
$$+3\theta_1\alpha_{13}\gamma_1 + \beta_{13}\gamma_1^3 - 3\beta_{23}\theta_2^2 + 3\theta_2\alpha_{23}\gamma_2^2,$$

$$a_{40} = \beta_{14} + \beta_{24},$$
$$a_{31} = 4\theta_1\alpha_{14} + 4\theta_2\alpha_{24} + 4\beta_{14}\gamma_1 + 4\beta_{24}\gamma_2,$$
$$a_{22} = -6\beta_{14}\theta_1^2 - 6\beta_{24}\theta_2^2 + 12\theta_1\alpha_{14}\gamma_1 + 6\beta_{14}\gamma_1^2 + 12\theta_2\alpha_{24}\gamma_2 + 6\beta_{24}\gamma_2^2,$$
$$a_{13} = -4\theta_1^3\alpha_{24} - 4\theta_2^3\alpha_{24} - 12\beta_{14}\theta_1^2\gamma_1 +$$
$$+12\theta_1\alpha_{14}\gamma_1 + 4\beta_{14}\gamma_1^3 - 12\beta_{24}\theta_2^2 + 12\theta_2\alpha_{24}\gamma_2^2 + 4\beta_{24}\gamma_2^3,$$
$$a_{04} = -\beta_{14}\theta_1^4 + \beta_{24}\theta_2^4 - 4\theta_1^3\alpha_{14}\gamma_1 - 6\beta_{14}\theta_1^2\gamma_1^2 +$$
$$+4\theta_1\beta_{14}\gamma_1^3 + \beta_{14}\gamma_1^4 - 4\theta_1^3\alpha_2 4\gamma_1,$$
$$-6\beta_{24}\theta_2^2\gamma_2^2 + 4\theta_2\alpha_{24}\gamma_2^3 + \beta_{24}\gamma_2^4 + \beta_{24}\gamma_2^4$$

$$\alpha_{50} = \beta_{15} + \beta_{25},$$
$$a_{41} = 5\theta_1\alpha_{15} + 5\theta_2\alpha_{25} + 5\beta_{15}\gamma_1 + 5\beta_{25}\gamma_2,$$
$$a_{32} = -10\beta_{15}\theta_1^2 - 10\beta_{25}\theta_2^2 + 20\theta_1\alpha_{15}\gamma_1 + 10\beta_{15}\gamma_1^2 + 20\theta_2\alpha_{25}\gamma_2 + 10\beta_{25}\gamma_2^2,$$
$$a_{23} = -10\theta_1^3\alpha_{25} - 10\theta_2^3\alpha_{25} - 30\beta_{15}\theta_1^2\gamma_1 +$$
$$+30\theta_1\alpha_{15}\gamma_1 + 10\beta_{15}\gamma_1^3 - 30\beta_{25}\theta_2^2 + 30\theta_2\alpha_{25}\gamma_2^2 + 10\beta_{25}\gamma_2^3,$$
$$a_{14} = 5\beta_{15}\theta_1^4 + 5\beta_{25}\theta_2^4 - 20\theta_1^3\alpha_{15}\gamma_1 - 30\beta_{15}\theta_1^2\gamma_1^2 + 20\theta_1\beta_{15}\gamma_1^3 + 5\beta_{15}\gamma_1^4,$$
$$-20\theta_1^3\alpha_2 5\gamma_1 - 30\beta_{25}\theta_2^2\gamma_2^2 + 20\theta_2\alpha_{25}\gamma_2^3 + 5\beta_{25}\gamma_2^4 + 5\beta_{25}\gamma_2^4$$
$$a_{05} = \theta_1^5\alpha_{25} + \theta_2^5\alpha_{25} + 5\beta_{15}\theta_1^4\gamma_1 - 10\theta_1^3\alpha_{15}\gamma_1^2 - 10\beta_{15}\theta_1^2\gamma_1^5 + 5\theta_1\alpha_{15}\gamma_1^4 + \beta_{15}\gamma_1^5 +$$
$$+5\beta_{25}\theta_2^4\gamma_2 - 10\theta_2^3\alpha_{25}\gamma_2^2 - 10\beta_{25}\theta_2^2\gamma_2^3 + 5\theta_2\alpha_{25}\gamma_2^4 + \beta_{25}\gamma_2^5.... \qquad (13)$$

Равенство $\mathrm{Im}\,(f) = 0$ равносильно выполнению равенств $a_{kj} = 0, k, j = 0, 1, 2, \ldots$. Для уравнения $a_{00} = 0$ решение будет

$$\beta_{10} = 0$$

Для системы $a_{10} = 0, a_{01} = 0$

$$a_{11} = \frac{\alpha_{21}\theta_2}{\theta_1} - \frac{\beta_{21}(-\gamma_1 + \gamma_2)}{\theta_2}, \beta_{11} = -\beta_{21}.$$

Для системы $a_{20} = 0, a_{11} = 0, a_{02} = 0$

$$a_{12} = \frac{\beta_{22}(\theta_1^2 - \theta_2^2 - \gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2^2)}{2\theta_2(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$a_{22} = \frac{\beta_{22}(-\theta_1^2 + \theta_2^2 - \gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2^2)}{2\theta_2(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$\beta_{12} = -\beta_{22}$$

Для систем $a_{m-k,k} = 0, k = 0, .., m, m \geq 3$

$$a_{13} = 0, a_{23} = 0, \beta_{13} = 0, \beta_{23} = 0,$$

$$a_{15} = 0, a_{24} = 0, \beta_{14} = 0, \beta_{24} = 0,$$

$$a_{15} = 0, a_{25} = 0, \beta_{15} = 0, \beta_{25} = 0,$$

Что бы доказать что для систем $a_{m-k}k = 0, k = 0, ..., m, m \geq 3$, решение будет нулевым, воспользуемся следствием теоремы Кронекера-Капели для однородных систем. Обозначим через $\gamma_q = \mathrm{Re}\,_q, \theta_q = \mathrm{Im}\,s_q, q = 1, 2$

Следствие из Теоремы Кронекера-Капели. Однородная система имеет только нулевое решение, если ранг ее матрицы равен числу неизвестных.

Сначала рассмотрим систему $a_{3-k,k} = 0, k = 0, \ldots, 3$.

$$\mathrm{Im}\,(c_{13}) + \mathrm{Im}\,(c_{23}) = 0$$

$$3\gamma_1\mathrm{Im}\,(c_{13}) + 3\gamma_2\mathrm{Im}\,(c_{23}) + 3\theta_1\mathrm{Re}\,(c_{13}) + 3\theta_2\mathrm{Re}\,(c_{23}) = 0$$

$$(-3\theta_1^2 + 3\gamma_1^2)\mathrm{Im}\,(c_{13}) + (-3\theta_2^2 + 3\gamma_2^2)\mathrm{Im}\,(c_{23}) +$$

$$+6\theta_1\gamma_1\mathrm{Re}\,(c_{13}) + 6\theta_2\gamma_2\mathrm{Re}\,(c_{23}) = 0$$

$$(-3\theta_1^2\gamma_1+\gamma_1^3)\mathrm{Im}\,(c_{13}))\mathrm{Im}\,(c_{13})+(-3\theta_2^2\gamma_2+\gamma_2^3)\mathrm{Im}\,(c_{23})$$
$$+(-\theta_1^3+3\theta_1\gamma_2^2)\mathrm{Re}\,(c_{13})+(-\theta_2^3+3\theta_2\gamma_2)\mathrm{Re}\,(c_{23})=0$$

Определитель матрицы коэффициентов

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3\gamma_1 & 3\gamma_2 & 3\theta_1 & 3\theta_2 \\ -3\theta_1^2+3\gamma_1^2 & -3\theta_2^2+3\gamma_1^2 & 6\theta_1\gamma_1 & 6\theta_2\gamma_2\mathrm{Re}\,(c_{23}) \\ -3\theta_1^2\gamma_1+\gamma_1^3 & -3\theta_2^2\gamma_2+\gamma_2^3 & -\theta_1^3+3\theta_1\gamma_2^2 & -\theta_2^3+3\theta_2\gamma_2 \end{matrix}$$

будет равен

$$-9\theta_1^5\theta_2+18\theta_1^3\theta_2^3-9\theta_1\theta_2^5-18\theta_1^3\theta_2\gamma_1^2$$
$$-18\theta_1\theta_2^3\gamma_1^2-9\theta_1\theta_2\gamma_1^4+36\theta_1^3\theta_2\gamma_1\gamma_2$$
$$+36\theta_1\theta_2^3\gamma_1\gamma_2+36\theta_1\theta_2\gamma_1^3\gamma_2-18\theta_1^3\theta_2\gamma_2^2$$
$$-18\theta_1\theta_2^3\gamma_2^2-18\theta_1\theta_2^3\gamma_2^2-54\theta_1\theta_2\gamma_1^2\gamma_2^2$$
$$+36\theta_1\theta_2\gamma_1\gamma_2^3-9\theta_1\theta_2\gamma_2^4$$

А это значит, что ранг матрицы коэффициентов равен 4 и нулевое решение является единственным.

Для систем $a_{m-k,k}=0, k=0,\ldots,m, m>3$, докажем что первые четыре строки независимы.

$$\mathrm{Im}\left[\left(\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}i^j(Re(c_{1k})\gamma_1^{k-j}\theta_1^j+\mathrm{Re}\,(c_{2k})\gamma_2^{k-j}\theta_2^n)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ i^{j+1}(\mathrm{Im}\,(c_{1k})\gamma_1^{k-j}\theta_1^j+\mathrm{Im}\,(c_{2k})\gamma_2^{k-j}\theta_2^j)\right)\right]=0,$$

$$k=0,\ldots,3, m>4.$$

$$\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!(m-k)!}=\frac{(m-1)!}{k!(m-1-k)!}\frac{m}{(m-k)}=\ldots$$
$$=\frac{3!}{k!(3-k)!}\frac{4}{4-k}\ldots\frac{m-1}{m-1-k}\frac{m}{m-k}=\binom{3}{k}\frac{m!(3-k)!}{3!(m-k)!}$$

$$\mathrm{Im}\left[\binom{3}{k}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{j=0}^{k}\left(\binom{k}{j}(\mathrm{Re}\,(c_{1k})\gamma_1^{k-j}\theta_1^j+\mathrm{Re}\,(c_{2k})\gamma_2^{k-j}\theta_2)^n+\right.\right.$$

$$+i^{j+1}(\mathrm{Im}\,(c_{1k})\gamma_1^{k-j}\theta_1^j+\mathrm{Im}\,(c_{2k})\gamma_2^{k-j}\theta_2^j)\Big)\Big]=0$$

То есть, если каждую строку системы $a_{m-k,k}=0, k=0,\dots,3, m>3$ поделить на $\frac{m!(4-k)!}{4!(m-k)!}$, мы получим систему $a_{4-k,k}=0, k=0,\dots,3$, определитель которой не равен нулю, отсюда определитель системы $a_{a_{m-k,k}}=0, k=0,\dots,3, m>3$ также не равен нулю и ее ранг равен четырем, а это значит, что из следствия Кронекера-Капели система имеет лишь нулевое решение.

Вывод. Мы нашли общий вид вещественной функции, удовлетворяющей уравнению $L_0 f=0$, вид этой функции

$$f(z)=\alpha_{10}+\left(\alpha_{11}-\frac{\theta_1\alpha_{11}+(\gamma_1-\gamma_1)\beta_{11}}{\theta_2}\right)x+$$
$$+\left((\theta_2-\theta_1)\beta_{11}+\gamma_1\alpha_{11}+\frac{\gamma_2[(\gamma_2-\gamma_1)\beta_{11}-\theta_1\alpha_{11}]}{\theta_2}\right)y+$$
$$+\alpha_{12}\frac{(\gamma_2+\gamma_1[(\theta_1-\theta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2])}{\gamma_2[{\gamma_2}^2-{\gamma_1}^2+(\gamma_2-\gamma_1)^2]}x^2+$$
$$+\frac{2\alpha_{12}[(\theta_1-\theta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2](\theta_2\gamma_1+\theta_1\gamma_2)}{\theta_2[{\theta_2}^2-{\theta_1}^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2]}xy+$$
$$+\alpha_{12}\frac{[(\theta_1-\theta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2][(\theta_2(\theta_1(\theta_1+\theta_2)+{\gamma_1}^2)+\theta_1{\gamma_2}^2]}{\theta_2[{\theta_2}^2-{\theta_1}^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2}y^2 \qquad (14)$$

Эта формула верна при $s_2\neq\overline{s}_1, s_2\neq s_1$. При $s_2=\overline{s_1}$функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial\overline{z}_1}\neq 0$$

и является гармонической по переменным $\mathrm{Re}\,z_1$ и $\mathrm{Im}\,z_1$. Здесь картина действительных решений резко меняется – среди таких функций бесконечно много линейно независимых.

Также легко решить эту проблему для уравнения (1) в случае $s_1=s_2, a_1=a_2$. Тогда из формулы (6) следует, что общее решение уравнения (1) представимо в виде $f(z)=g(z_1)|\mathrm{e}^{\overline{a}_1 z_1}|^2$, где $g(z_1)=(\varphi(z_1)+\overline{z}_1\psi(z_1))\mathrm{e}^{-\overline{a}_1 z_1}$ -бианалитическая функция переменного z_1. Поскольку она вещественна, то $g(z_1)=b_1|z_1|^2+b_2\mathrm{Re}\,z_1+b_3\mathrm{Im}\,z_1+b_4$, где $b_k,\ \ k=1,\dots,4$-произвольные вещественные числа. Тогда произвольное вещественное

решение уравнения (1) имеет вид $f(z) = (b_1|z_1|^2 + b_2\mathrm{Re}\, z_1 + b_3\mathrm{Im}\, z_1 + b_4)|\mathrm{e}^{\bar{a}_1 z_1}|^2$.

Рассмотрим теперь случай, когда общее решение уравнения (1) имеет вид (5). Функцию (5) предствим в виде $f(z) = \psi_1(z_1)|e^{\bar{a}_1 z_1}|^2 + \psi_2(z_2)|e^{\bar{a}_2 z_2}|^2$, где $\psi_k(z_k) = \varphi_k(z_k)e^{\bar{a}_k z_k}$, $k = 1, 2$ - аналитическая функция от z_k, или $f(z) = (\psi_1(z_1) + \psi_2(z_2)|e^{\bar{a}_2 z_2 - \bar{a}_1 z_1}|^2)|e^{\bar{a}_1 z_1}|^2$. Поэтому задача сводится к тому, что бы выяснить, когда будет вещественной функция $g(z) = \psi_1(z_1) + \psi_2(z_2)|e^{\bar{a}_2 z_2 - \bar{a}_1 z_1}|^2$. Упрощая обозначения, эту функцию можно записать так: $g(z) = \psi_1(z_1) + \psi_2(z_2)e^{px+qy}$, где $px + qy = 2\mathrm{Re}\,(\bar{a}_2 z_2 - \bar{a}_1 z_1) = 2x\mathrm{Re}\,(a_2 - a_1) + 2y\mathrm{Re}\,(\bar{a}_2 s_2 - \bar{a}_1 s_1)$. То есть $p = 2\mathrm{Re}\,(a_2 - a_1), q = 2\mathrm{Re}\,(\bar{a}_2 s_2 - \bar{a}_1 s_1)$.

Выясним, когда $p = q = 0$? При этом должны выполняться равенства $\mathrm{Re}\,(a_2 - a_1) = 0, \mathrm{Re}\,(\bar{s}_2 a_2 - \bar{s}_1 a_1) = 0$ или $a_2 - a_1 = i\alpha, \bar{s}_2 a_2 - \bar{s}_1 a_1 = i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Решая эту систему относительно a_1, a_2, получим при $s_1 \neq s_2$

$$a_1 = \frac{i(\beta - \alpha\bar{s}_2)}{\bar{s}_1 - \bar{s}_2}, a_2 = \frac{i(\beta - \alpha\bar{s}_1)}{\bar{s}_2 - \bar{s}_2}. \tag{15}$$

При $p = q = 0$ получаем, что $f(z) = (\psi_1(z_1) + \psi_2(z_2)|e^{\bar{a}_2 z_2 - \bar{a}_1 z_1}|^2)|e^{\bar{a}_1 z_1}|^2 = (\psi_1(z_1) + \psi_2(z_2))|e^{\bar{a}_1 z_1}|^2$(при $a_1 a_2$ определенных выше.)

Получаем $\mathrm{Im}\,(\psi_1(z_1) + \psi_2(z_2)) = 0$.

Ранее была получена формула (14) для общего действительного решения уравнения (1), когда $A_{ij} = 0, k + j < 2$. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид

$$f(z) = \psi_1(z_1) + \psi_2(z_2),$$

и действительное решение имеет вид (14). Поэтому в рассматриваемом случае любое действительное решение имеет вид

$$f(z) = [\alpha_{10} + \left(\alpha_{11} - \frac{\theta_1\alpha_{11} + (\gamma_1 - \gamma_1)\beta_{11}}{\theta_2}\right)x +$$
$$+ \left((\theta_2 - \theta_1)\beta_{11} + \gamma_1\alpha_{11} + \frac{\gamma_2[(\gamma_2 - \gamma_1)\beta_{11} - \theta_1\alpha_{11}]}{\theta_2}\right)y +$$
$$+\alpha_{12}\frac{(\gamma_2 + \gamma_1[(\theta_1 - \theta_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2])}{\gamma_2[{\gamma_2}^2 - {\gamma_1}^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)^2]}x^2 +$$

$$+\frac{2\alpha_{12}[(\theta_1-\theta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2](\theta_2\gamma_1+\theta_1\gamma_2)}{\theta_2[{\theta_2}^2-{\theta_1}^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2]}xy+$$

$$+\alpha_{12}\frac{[(\theta_1-\theta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2][(\theta_2(\theta_1(\theta_1+\theta_2)+{\gamma_1}^2)+\theta_1{\gamma_2}^2]}{\theta_2[{\theta_2}^2-{\theta_1}^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2}y^2]|e^{\bar{a_1}z_1}|^2$$

Заключение

В дипломной работе рассмотрела эллиптическое уравнение с постоянными коэффициентами.

$$Lf(z) := \sum_{0 \le k+j \le 2} A_{kj} \frac{\partial^{k+j} f(z)}{\partial x^k \partial y^j} = 0, \ z = x + iy, \ x, \ y \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

Был найден общий вид вещественного решения уравнения (1), в случае ,когда коэффициенты удовлетворяют условию (15).

Список литературы.

1. И.А.Бикчантаев. О множествах единственности для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами. Дифференц. уравнения. 2011, том 47, № 2, с. 278-282

2. И.А.Бикчантаев. О граничных теоремах единственности для линейного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами. Дифференц. уравнения. 2014, том 50, № 2, с. 217-222.

3. Дж. Н. Шарма, К. Сингх. Уравнения в частных производных для инженеров. Техносфера. Москва. 2002

4. M. B. Balk. Polyanalytic functions. -Berlin: Akademie Verlag, 1991.-198 p.

5. И. А. Бикчантаев. Некоторые краевые задачи для одного эллиптического уравнения. Докл. АН СССР. 1973. Т.209. №5. С. 1013-1016

6. И. А. Бичантаев. Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения высшего порядка Тр. Сем. по краев. задачам, 1972, 8, 31-38.

7. И. А. Бичантаев. Краевая задача для однородного эллиптического уравнения с постоянны-ми коэффициентами. Изв. вузов. матем., 1975:6, 3-13