И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 3 (442)

УДК 517.95

А.Б. МИХАЙЛОВ

О ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматривается уравнение второго порядка, приведенное к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} + b\frac{\partial w}{\partial z_1} + c\frac{\partial w}{\partial z_2} + dw = 0, \tag{1}$$

где $w(z_1, z_2)$ — искомая комплекснозначная функция, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, a, b, c, d — комплексные числа. Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} \alpha w(z_1, 0) + \beta \frac{\partial w}{\partial z_2}(z_1, 0) = f_1(z_1), \\ \gamma w(z_1, l) + \delta \frac{\partial w}{\partial z_2}(z_1, l) = f_2(z_1), \end{gathered} \tag{2}$$

где $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $|\gamma| + |\delta| \neq 0$, $l \in \mathbb{C}$, $l \neq 0$. Функции $f_1(z_1)$, $f_2(z_1)$ предполагаются аналитическими в выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$. Символом $H(G)$ обозначим пространство Фреше аналитических в области G функций с топологией равномерной сходимости на компактах G. Без ограничения общности будем предполагать, что $0 \in G$.

Решение задачи (1), (2) ищется в виде ряда экспонент, абсолютно сходящегося в $H(D)$, где D — выпуклая область в $\mathbb{C}^2$, которая строится определенным образом по области G. Метод, используемый в данной работе, основан на результатах А.Ф. Леонтьева и Ю.Ф. Коробейника (см., напр., [1], [2]) о возможности представления аналитических в выпуклой области функций рядами экспонент. Следуя [3], будем говорить, что система $\{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_k \in \mathbb{C})$ является абсолютно представляющей системой (а.п.с.) в пространстве $H(G)$, если любую функцию $f(z) \in H(G)$ можно представить в виде ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \exp(\lambda_k z)$, абсолютно сходящегося в $H(G)$. Заметим, что для любой выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$ всегда можно указать последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$, и система $\{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^{\infty}$ будет а.п.с. в $H(G)$.

Лемма. *Пусть $P(\lambda)$ — многочлен первой или второй степени, E — множество кружков нулевой линейной плотности. Тогда множество $U = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid D(\lambda) = \sqrt{P(\lambda)} \in E\}$ можно погрузить в множество E_1 кружков нулевой линейной плотности.*

Доказательство этого утверждения является достаточно простым, но громоздким. Напомним (см., напр., [4]), что множество E имеет нулевую линейную плотность, если $\lim\limits_{r\to\infty} \sum_r r_j / r = 0$, где символ $\sum_r$ означает суммирование по всем кружкам, центры которых попали в круг $|z| < r$.

Работа выполнена при финансовом участии Российского фонда поддержки фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01041).

Положим в уравнении (1) $w(z_1,z_2)=\exp(\lambda z_1+\mu z_2)$. Функция w будет, очевидно, решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $\mu^2-a^2\lambda^2+b\lambda+c\mu+d=0$. Отсюда при фиксированном λ получим

$$\mu_j(\lambda)=-c/2+(-1)^{j-1}\sqrt{4(a^2\lambda^2-b\lambda-d)+c^2}\,/2,\quad j=1,2.$$

Предполагается, что λ изменяется в плоскости с выброшенным отрезком или лучом так, что функцию $D(\lambda)=\sqrt{4(a^2\lambda^2-b\lambda-d)+c^2}/2$ будем считать однозначной и при этом $\lim\limits_{\lambda\to\infty}D(\lambda)/\lambda=a$. Сразу отметим, что случай $|a|+|b|=0$ не рассматривается, т. к. уравнение (1) при этом вырождается в обыкновенное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим теперь целую функцию вполне регулярного роста

$$\Delta(z)=(\alpha+\beta(-\tfrac{c}{2}+z))(\gamma+\delta(-\tfrac{c}{2}-z))\exp(-\tfrac{c}{2}-z)l-(\alpha+\beta(-\tfrac{c}{2}-z))(\gamma+\delta(-\tfrac{c}{2}+z))\exp(-\tfrac{c}{2}+z)l$$

с индикатором $g(\varphi)=|l\cos(\varphi+\arg l)|$ (символом $\arg z$ в дальнейшем будем обозначать главное значение аргумента z, принадлежащее промежутку $[0;2\pi)$ или $(-\pi;\pi]$). Для функции $\Delta(z)$ (см., напр., [4]) вне некоторого исключительного множества E кружков нулевой линейной плотности, содержащем нули этой функции, справедлива оценка

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A=A(\varepsilon)>0:|\Delta(z)|\geq A\exp\{|zl|(|\cos(\arg z+\arg l)|-\varepsilon\}. \tag{3}$$

Используя лемму, для отображения $D(\lambda)=\sqrt{4(a^2\lambda^2-b\lambda-d)+c^2}\,/2$ по множеству E построим множество E_1 кружков нулевой линейной плотности. Пусть G — произвольная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Возьмем а.п.с. $\{\exp\lambda_k z_1\}_{k=1}^{\infty}$ в $H(G)$ такую, что $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}\cap E_1=\emptyset$. Это всегда можно сделать (см., напр., [2], [5]). Тогда $\{D(\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}\cap E=\emptyset$, и в силу (3) при $z=D(\lambda_k)$ справедлива оценка

$$|\Delta(D(\lambda_k))|\geq A\exp\{|D(\lambda_k)l|(|\cos(\arg D(\lambda_k)+\arg l)|-\varepsilon)\}\ \ \forall k\geq 1. \tag{4}$$

Учитывая, что $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{D(\lambda_k)}{\lambda_k}=a$, а также равномерную непрерывность косинуса, нетрудно получить другую форму записи неравенства (4)

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B=B(\varepsilon)>0:|\Delta(D(\lambda_k))|\geq B\exp\{|al\lambda_k|\,|\cos(\arg\lambda_k+\arg al)|-\varepsilon|\lambda_k|\}\ \ \forall k\geq 1. \tag{5}$$

Аналогично, используя неравенство

$$1+|\exp z|\leq 2\exp\{|z|\max(0;\cos(\arg z))\}\ \ \forall z\in\mathbb{C},$$

(см., напр., [1]) нетрудно установить, что найдутся такие $B_j>0$, для которых

$$1+|\exp(\mu_j(\lambda_k)l)|\leq B_j\exp\{|al\lambda_k|\max(0;(-1)^{j-1}\cos(\arg\lambda_k+\arg al))+\varepsilon|\lambda_k|\}, \tag{6}$$

$j=1,2,\ k=1,2,\ldots$ Перейдем к отысканию решения уравнения (1) в виде

$$w(z_1,z_2)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp(\lambda_k z_1+\mu_1(\lambda_k)z_2)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\exp(\lambda_k z_1+\mu_2(\lambda_k)z_2). \tag{7}$$

Поставляя формально $w(z_1, z_2)$ в равенство (2), получим

$$\begin{aligned} f_1(z_1) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp \lambda_k z_1 + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp \lambda_k z_1 + \\ + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(\lambda_k) a_k \exp \lambda_k z_1 + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(\lambda_k) b_k \exp \lambda_k z_1; \\ f_2(z_1) = \gamma \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(\lambda_k z_1 + \mu_1(\lambda_k) l) + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(\lambda_k z_1 + \mu_2(\lambda_k) l) + \\ + \delta \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(\lambda_k) a_k \exp(\lambda_k z_1 + \mu_1(\lambda_k) l) + \delta \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(\lambda_k) b_k \exp(\lambda_k z_1 + \mu_2(\lambda_k) l). \end{aligned} \tag{8}$$

Так как $\{\exp \lambda_k z_1\}_{k=1}^{\infty}$ — а.п.с. в $H(G)$, то имеет место представление

$$f_1(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp \lambda_k z_1, \qquad f_2(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp \lambda_k z_1, \tag{9}$$

в котором ряды сходятся абсолютно в $H(G)$. Подставляя эти разложения в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим систему линейных уравнений относительно a_k и b_k

$$\begin{cases} c_k = (\alpha + \beta\mu_1(\lambda_k)) a_k + (\alpha + \beta\mu_2(\lambda_k)) b_k, \\ d_k = (\gamma + \delta\mu_1(\lambda_k)) a_k \exp \mu_1(\lambda_k) l + (\gamma + \delta\mu_2(\lambda_k)) b_k \exp \mu_2(\lambda_k) l, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots$, откуда

$$\begin{aligned} a_k = \frac{c_k(\gamma + \delta\mu_2(\lambda_k)) \exp \mu_2(\lambda_k) l - d_k(\alpha + \beta\mu_2(\lambda_k))}{\Delta(D(\lambda_k))}; \\ b_k = \frac{-c_k(\gamma + \delta\mu_1(\lambda_k)) \exp \mu_1(\lambda_k) l + d_k(\alpha + \beta\mu_1(\lambda_k))}{\Delta(D(\lambda_k))}. \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая оценки (5) и (6), получим

$$\begin{aligned} |a_k| \le M_1 \frac{\max\{|c_k|; |d_k|\} |\lambda_k| (1 + |\exp \mu_2(\lambda_k) l|)}{|\Delta(D(\lambda_k))|} \le \\ \le M_2 \max\{|c_k|; |d_k|\} |\lambda_k| \exp\{|al\lambda_k| \max(0; -\cos(\arg \lambda_k + \arg al)) - \\ - |al\lambda_k| \, |\cos(\arg \lambda_k + \arg al)| + 2\varepsilon|\lambda_k|\} \le \\ \le M_3 \max\{|c_k|; |d_k|\} \exp\{-|al\lambda_k| \max(0; \cos(\arg \lambda_k + \arg al)) + 3\varepsilon|\lambda_k|\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|a_k| \le M_3 \max\{|c_k|; |d_k|\} \exp\{-|al\lambda_k| \max(0; \cos(\arg \lambda_k + \arg al)) + 3\varepsilon|\lambda_k|\}. \tag{11}$$

Аналогичным образом оцениваем коэффициенты

$$|b_k| \le M_3 \max\{|c_k|; |d_k|\} \exp\{-|al\lambda_k| \max(0; -\cos(\arg \lambda_k + \arg al)) + 3\varepsilon|\lambda_k|\}.$$

Для любой выпуклой области G, отличной от расширенной плоскости, всегда можно построить последовательность таких ограниченных непустых выпуклых областей B_n (см., напр., [5]) с опорными функциями $b_n(-\varphi) > 0$, что $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$ для всех $n \ge 1$ и $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Абсолютная сходимость рядов (9) в $H(G)$ равносильна тому, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \max\{|c_k|; |d_k|\} \exp |\lambda_k| b_n(\arg \lambda_k) < \infty \ \ \forall n \ge 1. \tag{12}$$

Пусть область G имеет опорную функцию $h(-\varphi) > 0$. Обозначим через G_j области с опорными функциями

$$h_j(-\varphi) = h(-\varphi) + |al| \max\{0;\ (-1)^{j-1}\cos(-\varphi + \arg al)\}, \quad j = 1, 2.$$

В случае $a = 0$ области G_1 и G_2 совпадают с G. Построим области

$$D_j = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 + (-1)^{j-1} a z_2 \in G_j\}, \quad j = 1, 2.$$

Если $a = 0$, то D_1 и D_2 равны $G \times \mathbb{C}$.

Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \exp(\lambda_k z_1 + \mu_1(\lambda_k) z_2)$ сходится абсолютно в $H(D_1)$. Возьмем произвольный компакт $F \subset D_1$. Тогда найдется компакт $F_1 \subset D_1$ такой, что $F \subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_2| \leq M;\ z_1 + a z_2 \in F_1\}$. Выберем теперь область B_n так, чтобы $F_1 \subset B_n + T$, где T — отрезок с опорной функцией $\max\{0;\ |al| \cos(-\varphi + \arg al)\}$. Следовательно, $F \subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_2| \leq M;\ z_1 + a z_2 \in B_n + T\}$. Возьмем ε в неравенстве (11), удовлетворяющее условию $\varepsilon(3+M) < \min\limits_{\varphi}(b_{n+1}(\varphi) - b_n(\varphi))$. Тогда, используя (11) и (12), получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \max_F |\exp(\lambda_k z_1 + \mu_1(\lambda_k) z_2| \leq \\
&\quad \leq P \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \max_F |\exp \lambda_k (z_1 + a z_2)| \exp \varepsilon |\lambda_k z_2| \leq \\
&\quad \leq P \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \max\{|\exp \lambda_k z|;\ z \in B_n + T\} \exp \varepsilon M |\lambda_k| \leq \\
&\quad \leq P_1 \sum_{k=1}^{\infty} \max\{|c_k|; |d_k|\} \exp\{-|al\lambda_k| \max(0;\ \cos(\arg \lambda_k + \arg al)) + 3\varepsilon |\lambda_k|\} \times \\
&\qquad \times \exp\{|\lambda_k|(b_n(\arg \lambda_k) + |al| \max(0;\ \cos(\arg \lambda_k + \arg al)))\} \exp \varepsilon M |\lambda_k| \leq \\
&\quad \leq P_1 \sum_{k=1}^{\infty} \max\{|c_k|; |d_k|\} \exp\{|\lambda_k|(b_n(\arg \lambda_k) + (3 + M)\varepsilon)\} \leq \\
&\quad \leq P_1 \sum_{k=1}^{\infty} \max\{|c_k|; |d_k|\} \exp |\lambda_k| b_{n+1}(\arg \lambda_k) < \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \exp(\lambda_k z_1 + \mu_1(\lambda_k) z_2)$ сходится абсолютно в $H(D_1)$, и его сумма является аналитической функцией в области D_1. Аналогично можно показать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \exp(\lambda_k z_1 + \mu_2(\lambda_k) z_2)$ сходится абсолютно в $H(D_2)$.

Обозначим $D = D_1 \cap D_2$. Тогда из вышеизложенного решение $w(z_1, z_2)$, задаваемое формулой (7), будет аналитическим в области D.

Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Пусть G — произвольная выпуклая область, отличная от расширенной плоскости, $f_1(z_1), f_2(z_1) \in H(G)$. Тогда существует решение задачи* (1), (2), *аналитическое в области D. Кроме того, если $\{\exp \lambda_k z_1\}_{k=1}^{\infty}$ — а.п.с. в $H(G)$, то это решение можно представить в виде* (7), *в котором коэффициенты определяются по формулам* (10).

Литература

1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
2. Коробейник Ю.Ф. *Представляющие системы* // Изв. АН СССР. Сер матем. – 1978. – Т. 42. – № 2. – С. 325–355.
3. Коробейник Ю.Ф. *Представляющие системы* // УМН. – 1981. – Т. 36. – № 1. – С. 73–126.

4. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
5. Коробейник Ю.Ф. *Уравнения свертки в комплексной области* // Матем. сб. – 1985. – Т. 127. – № 2. – С. 173–197.

Донская государственная
академия сервиса

Поступили
полный текст 26.06.1997
краткое сообщение 28.11.1997