

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"



Программа дисциплины

Б1.В.ДВ.2 Элементы спектрального анализа

Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика

Профиль подготовки: 01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика

Квалификация выпускника: «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Казань 2015

1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Целью изучения дисциплины является изучение основных понятий теории спектрального анализа и освоение приемов применения этих понятий в исследовательской деятельности в области теории вероятностей и математической статистики.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Курс «Элементы спектрального анализа» входит в разряд дисциплин по выбору, осваивается на втором году обучения (4 семестр) и опирается на знания из общих курсов математического и функционального анализа.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать основные принципы теории спектрального анализа; виды операторов в гильбертовом пространстве и понятие разложения единицы;

уметь применять спектральную теорему в теории вероятностей и математической статистике;

владеть навыками работы с неограниченными операторами и интегральными представлениями аналитических функций;

демонстрировать способность и готовность применять результаты освоения дисциплины в профессиональной деятельности

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК- 3	способность к преподаванию дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов проведенных теоретических и экспериментальных исследований

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

Форма промежуточной аттестации по дисциплине: зачет в 4 семестре.

	Раздел дисциплины	Семестр	Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Самостоятельная работа
1.	Понятие замкнутого оператора	4	2	2	-	8
2.	Сопряженные, эрмитовы и самосопряженные операторы	4	4	4	-	16
3.	Спектр оператора и его свойства	4	2	2	-	8
4.	Интегральное представление аналитических функций	4	2	2	-	8
5.	Спектральная теорема для самосопряженного оператора	4	2	2	-	8
6.	Спектральная теорема в терминах разложения единицы	4	2	2	-	8
7.	Проекторнозначные меры и функциональное исчисление	4	2	2	-	8
8.	Теорема Стоуна	4	2	2	-	8

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Понятие замкнутого оператора

Плотно заданные линейные операторы в гильбертовом пространстве, его график. Примеры. Замкнутый и замыкаемый операторы и их свойства.

Тема 2. Сопряженные, эрмитовы и самосопряженные операторы

Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве и его свойства. Эрмитов оператор, его замыкаемость. Мультиплекторы. Самосопряженность мультиплектора. Оператор дифференцирования. Связь между самосопряженностью и эрмитовостью. Нормальные операторы.

Тема 3. Спектр оператора и его свойства

Резольвентное множество и спектр плотно заданного оператора. Структура резольвентного множества. Вид спектра. Спектр самосопряженного оператора.

Тема 4. Интегральное представление аналитических функций

Вспомогательные аналитические функции. Строение аналитической функции с определенными свойствами с помощью интеграла.

Тема 5. Спектральная теорема для самосопряженного оператора

Изометрический изоморфизм гильбертова пространства, построенного по самосопряженному оператору, и пространства интегрируемых по Лебегу с квадратом функций (для подходящей лебеговой меры). Спектральная теорема в терминах мультипликаторов.

Тема 6. Спектральная теорема в терминах разложения единицы

Понятие разложения единицы. Представление самосопряженного оператора с помощью разложения единицы. Построение самосопряженного оператора по разложению единицы. Спектральная теорема.

Тема 7. Проекторнозначные меры и разложение единицы

Построение меры Лебега-Стилтьеса по разложению единицы. Доказательство того, что значение меры – ортопроектор. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере. Функциональное исчисление.

Тема 8. Теорема Стоуна

Теорема Стоуна: формулировка и доказательство.

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

На лекциях и практических занятиях предполагается использование следующих образовательных технологий:

- предметно- и личностно-ориентированные технологии обучения;
- проблемное обучение – стимулирование к самостоятельному приобретению знаний, необходимых для решения конкретной проблемы;
- проблемно-ориентированные дискуссии;

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Вопросы к практическим занятиям

Тема 1. Понятие замкнутого оператора

Исследование операторов на замкнутость и замыкаемость

Тема 2. Сопряженные, эрмитовы и самосопряженные операторы

Проверка оператора на эрмитовость, самосопряженность и нормальность

Тема 3. Спектр оператора и его свойства

Нахождение спектров отдельных операторов

Тема 4. Интегральное представление аналитических функций

Построение аналитической функции с помощью интеграла

Тема 5. Спектральная теорема для самосопряженного оператора

Доказательство некоторых «пробелов» в спектральной теореме в терминах мультипликаторов

Тема 6. Спектральная теорема в терминах разложения единицы

Построение самосопряженного оператора по разложению единицы.

Тема 7. Проекторнозначные меры и разложение единицы

Функциональное исчисление ортопроекторов.

Тема 8. Теорема Стоуна

Изучение строения унитарных представлений локально компактных групп, построение примеров.

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

7.1. Регламент дисциплины

Процедура оценивания знаний, умений, навыков, характеризующая этапы формирования компетенций по дисциплине осуществляется в ходе текущего и промежуточного контроля.

Текущий контроль организуется в формах:

- проверки письменных заданий
- оценки подготовки самостоятельного изложения теоретического материала.

Промежуточный контроль осуществляется в форме итогового зачета.

Зачет включает теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень освоения студентами знаний и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и навыков

7.2. Оценочные средства текущего контроля

Примеры фактов для самостоятельного изложения теоретического материала:

- 1) Координатная форма свойства замкнутости оператора
- 2) Свойства сопряженного оператора
- 3) Критерий самосопряженности оператора
- 4) Спектр самосопряженного оператора
- 5) Существование разложения единицы
- 6) Свойства проекторнозначных мер

Примеры задач для проверки письменных заданий:

- 1) Докажите, что ядро замкнутого оператора – замкнутое множество.

- 2) Докажите, что обратный к замкнутому оператор также замкнут
- 3) Пусть оператор и обратный к нему плотно заданы. Докажите, что оператор, обратный к сопряженному, совпадает с сопряженным к обратному
- 4) Докажите, что спектр ортопроектора содержиться в множестве, состоящем из 0 и 1
- 5) Докажите, что для проекторнозначной меры семейство образов лучей представляет собой разложение единицы

7.3 Вопросы к зачету

Линейные операторы в гильбертовом пространстве: основные понятия. Замкнутые и замыкаемые операторы. Сопряженный оператор: корректность определения. Свойства сопряженного оператора. Эрмитовы и самосопряженные операторы. Самосопряженность мультиплликатора. Оператор дифференцирования. Критерий самосопряженности для эрмитова оператора. Резольвентное множество и его свойства. Спектр самосопряженного оператора. Резольвентная функция и ее свойства. Леммы об аналитических функциях. Гильбертово пространство H_f и его изоморфизм. Спектральная теорема в терминах мультиплликаторов. Разложение единицы: существование. Теорема о представлении самосопряженного оператора через разложение единицы. Построение оператора по разложению единицы. Мера, построенная по разложению единицы и ее свойства. Теорема о существовании меры. Теорема Стоуна.

7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции для данной дисциплины	Оценочное средство
ПК-3	способность к преподаванию дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов проведенных теоретических и экспериментальных исследований	Умение самостоятельно изучать и докладывать результаты научной деятельности, полученные в ходе исследований	Письменные задания; Факты для самостоятельного изложения теоретического материала

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Методические рекомендации по организации изучения дисциплины.

В процессе обучения аспирантов по дисциплине основными формами обучения являются: аудиторные занятия, включающие лекции и практические занятия, и самостоятельная работа. Тематика лекций и практических занятий соответствует содержанию программы дисциплины.

Практическое занятие состоит из следующих этапов:

- проверка исходных знаний;
- решение теоретических задач и упражнений;
- обсуждение методов решения задач;
- подведение итогов занятия с обсуждением работы группы.

На практической части занятия преподаватель обращает внимание на наиболее важные темы, ошибки, допущенные аспирантами при обсуждении, а также на самостоятельность и активность работы аспирантов с литературой и лекционным материалом.

Для успешного освоения дисциплины каждый аспирант должен быть обеспечен учебно-методическими материалами по предмету (тематическими планами лекций и практических занятий, учебно-методической литературой), а также возможностью отработки пропущенных занятий.

Обязательным условием освоения дисциплины является самостоятельная работа аспиранта, выполнение которой аспирант демонстрирует на практических занятиях. Кроме того, каждый аспирант должен подготовить доклад по текущей теме и выступить с ним на занятии (по меньшей мере один раз). Подобная форма обучения развивает навыки поиска научной литературы, ее анализа, составления резюме прочитанного текста, подготовки тезисов устного выступления с последующими ответами на вопросы аудитории, приемов аргументации защищаемых гипотез, т.е. ведения научно-исследовательской работы и ее защиты в рамках профессиональных дискуссий. Аналогичные цели должны преследоваться и при ориентации студентов на самостоятельный поиск новых материалов по текущим разделам и чтение дополнительной литературы.

Методические рекомендации к практическим (семинарским) занятиям

Практические занятия предназначены для уточнения, более глубокой проработки и закрепления знаний, полученных на лекциях. Кроме того, на такое занятие могут быть вынесены вопросы, не затронутые лектором. Как правило, это вопросы, направленные на расширение исторического контекста, касающиеся биографий ученых и тому подобное. Информация подобного характера позволяет лучше усвоить материал, провести параллели истории и современного состояния методологии науки. При подготовке к практическим занятиям желательно соблюдать следующую последовательность. Необходимо в первую очередь внимательно прочитать конспект лекции. При чтении в конспекте выделяются (цветом, подчеркиванием и т.п.) основные смысловые блоки, ключевые термины, даты, фамилии ученых. Желательно постоянно пользоваться однотипной системой выделения – это облегчает последующую работу с текстом и запоминание информации. Как правило, лекция отражает основной смысл, «каркас» темы, и при подготовке к семинару его нужно просто дополнить. Следующим этапом подготовки к занятию является работа с основной литературой. При этом ни один из источников, как правило, не содержит ответ на все вопросы семинара. Таким образом, для полного охвата темы необходимо работать одновременно с несколькими книгами. После прочтения материала желательно составить краткий конспект или план ответа на каждый вопрос. Конспектирование параллельно с чтением не является целесообразным: в этом случае затруднено выделение главной мысли, в конспекте оказывается много второстепенной информации. При конспектировании необходимо указывать источник, из которого взята та или иная

информация. Для более полного усвоения материала, охвата всех важных для будущего преподавателя-исследователя (выпускника аспирантуры) необходимо ознакомится с дополнительной литературой. Помимо книг, указанных после каждой темы, желательно обращаться к журналам и Интернет-ресурсам, перечисленным в разделе «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины». При работе с дополнительной литературой желательно делать краткие выписки, дополняющие основной конспект.

Методические рекомендации по самостоятельной работе аспирантов

Самостоятельная работа является обязательной составляющей деятельности аспиранта по изучению дисциплины. Самостоятельная работа направлена на более глубокое изучение отдельных тем дисциплины, систематизацию полученных знаний. Задания для самостоятельной работы включают виды работ, перечисленные выше. В программе дисциплины так же указана трудоемкость самостоятельной работы по каждой из тем. Это – время, необходимое для выполнения всех заданий по теме аспирантом с хорошей успеваемостью и средним темпом работы. Время, затрачиваемое каждым конкретным аспирантом, может существенно отличаться от указанного. В связи с этим, планирование рабочего времени каждым аспирантом должно осуществляться самостоятельно. Однако можно выделить некоторые общие рекомендации. Начинать самостоятельные занятия следует с начала семестра и проводить их регулярно. Не следует откладывать работу из-за «нерабочего настроения». Не следует пытаться выполнить всю самостоятельную работу за один день, накануне представления ее результатов. В большинстве случаев это просто физически невозможно. Гораздо более эффективным является распределение работы на несколько дней: это способствует более качественному выполнению заданий и лучшему усвоению материала. Важно полнее учесть обстоятельства своей работы, уяснить, что является главным на данном этапе, какую последовательность работы выбрать, чтобы выполнить ее лучше и с наименьшими затратами времени и энергии. Для плодотворной работы немаловажное значение имеет обстановка, организация рабочего места. Место работы, по возможности, должно быть постоянным. Работа на привычном месте более плодотворна. Продуктивность работы зависит от правильного чередования труда и отдыха. Помните, что максимальная длительность устойчивости внимания – 45 минут. При появлении рассеянности есть необходимость прервать работу на 3 – 5 минут, но не следует покидать рабочее место. Каждые 1.5 – 2 часа необходимо делать перерыв на 10-15 минут. Желательно сопровождать перерыв интенсивной физической активностью.

9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

9.1. Основная литература

1. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. - М.: МЦНМО, 2014. - 560 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/56415/>
2. Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П. Сборник задач по функциональному анализу. - СПб.: Лань, 2012. - 192с.

ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3175

9.2. Дополнительная литература

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - М.: Физматлит, 2005. - 240 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/2342/>
2. Хелемский А.Я. Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении. - М.: МЦНМО, 2009. - 304 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/9433/>
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Физматлит, 2009. - 572с. ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206
4. Шерстnev A.H.. Конспект лекций по математическому анализу [Текст: электронный ресурс] / A. H. Шерстнев . - Изд. 5-е . - Казань : Казанский государственный университет, 2009. http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Физматлит, 2007. - 488 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/59471/>

9.3. Интернет-ресурсы:

Интернет-ресурсы по математике: <http://exponenta.ru>;

Портал математических интернет-ресурсов: <http://www.math.ru>

Портал математических интернет-ресурсов: <http://www.allmath.com>

Портал ресурсов по математике и ИТ: <http://algolist.manual.ru>

Электронная библиотечная система «Лань»: <http://e.lanbook.com>

Электронная библиотечная система «Znaniум»: <http://znanium.com>

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аудитория, снабженная доской и мультимедийным проектором.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и с учетом рекомендаций по направлению подготовки

Автор: к. ф.-м. н., доцент Турилова Е.А.

Рецензенты: д. ф.-м. н., профессор Володин И.Н.

к. ф.-м. н., доцент Сидоров А.М.

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института ВМиИТ КФУ от 9 сентября 2015 года, протокол № 1.