ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 1 (428)

УДК 512.554.31

*С.А. ТЮРИН*

# $p$-ОПЕРАЦИЯ В АЛГЕБРЕ ЦАССЕНХАУЗА

В конечномерных алгебрах Ли над полем положительной характеристики $p$-многочлен общего элемента играет ту же роль, что и характеристический многочлен. Вопрос о виде коэффициентов $p$-уравнения, которому удовлетворяет общий элемент алгебры Ли, рассматривался разными авторами. Г. Браун в статье [1] доказал, что для алгебры Цассенхауза $W_1(n)$ эти коэффициенты являются многочленами от координат общего элемента. А.А. Премет в статье [2] доказал то же самое для произвольной конечномерной $p$-алгебры Ли. Вид этих многочленов в указанных статьях не найден. Целью данной работы является нахождение коэффициентов $p$-уравнения общего элемента алгебры Цассенхауза.

Все необходимые определения и обозначения можно найти в статье А.И. Кострикина и И.Р. Шафаревича [3], а также в работе автора [4].

Пусть $K$ — поле характеристики $p > 0$. Алгебра Цассенхауза $W_1(n)$ определяется как алгебра Ли всех специальных дифференцирований алгебры разделенных степеней

$$A_1(n) = \langle 1, x, x^{(2)}, \dots, x^{(p^n-1)} \rangle.$$

Пусть $d = f(x)\frac{d}{dx} \in A_1(n)$, где $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 (x)^{(2)} + \dots + a_{p^n-1} x^{(p^n-1)}$ — произвольный элемент алгебры Цассенхауза. Предположим сначала, что $D$ — транзитивное дифференцирование, т.е. $a_0 \neq 0$. В этом случае многочлен $f(x)$ обратим, и коэффициенты обратного многочлена

$$g(x) = f(x)^{-1} = b_0 + b_1 x + \dots + b_{p^n-1} x^{(p^n-1)}$$

определяются из условия $f(x) \cdot g(x) = 1$, приводящего к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&a_0 b_0 = 1,\\
&a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0,\\
&a_2 b_0 + 2a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_m b_0 + \binom{m}{1} a_{m-1} b_1 + \binom{m}{2} a_{m-2} b_2 + \dots + a_0 b_m = 0 \quad (1 \le m \le p^n - 1)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Решая методом Крамера первые $(m+1)$ уравнений этой системы, найдем

$$b_m = \frac{(-1)^m}{a_0^{m+1}} \cdot \Delta_m(a_0, a_1, \dots, a_m), \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №. 94-01-00431-а).

где

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & & a_m \\ a_0 & 2a_1 & 3a_2 & \dots & & ma_{m-1} \\ 0 & a_0 & 3a_1 & \dots & & \binom{m}{2}a_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & ma_1 \end{vmatrix}.$$

В этом определителе на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит элемент $\binom{j}{i-1} \cdot a_{j-i+1}$, если $j \geq i-1$, или нуль в противном случае. Определитель $\Delta_m$ является однородным многочленом $m$-й степени от коэффициентов многочлена $f(x)$.

Найдем характеристическое уравнение дифференцирования $D$. Уравнение $Dy = \lambda \cdot y$ равносильно дифференциальному уравнению

$$y' = \lambda \cdot g(x) \cdot y.$$

Согласно основному результату работы [4] для того чтобы это уравнение имело нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda$ являлось корнем $p$-уравнения

$$(\lambda b_0)^{p^n} + (\lambda b_{p-1})^{p^{n-1}} + (\lambda b_{p^2-1})^{p^{n-2}} + \dots + (\lambda b_{p^{n-1}-1})^p + \lambda b_{p^n-1} = 0.$$

Применение теоремы Гамильтона-Кэли с учетом формул (1) позволяет получить $p$-уравнение для транзитивного дифференцирования $D$

$$D^{p^n} + [\Delta_{p-1}(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \cdot D]^{p^{n-1}} + [\Delta_{p^2-1}(a_0, a_1, \dots, a_{p^2-1}) \cdot D]^{p^{n-2}} + \dots + \\ + [\Delta_{p^{n-1}-1}(a_0, a_1, \dots, a_{p^{n-1}-1}) \cdot D]^p + \Delta_{p^n-1}(a_0, a_1, \dots, a_{p^n-1}) \cdot D = 0. \quad (2)$$

Поскольку транзитивные дифференцирования образуют открытое по Зарисскому и, следовательно, всюду плотное множество в алгебре Цассенхауза, то уравнению (2) удовлетворяет любое дифференцирование $D$ из алгебры Цассенхауза.

Из формулы (2) следует также, что многообразие нильпотентных элементов алгебры Цассенхауза определяется системой уравнений

$$\Delta_{p-1}(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) = 0, \quad \Delta_{p^2-1}(a_0, a_1, \dots, a_{p^2-1}) = 0, \dots, \quad \Delta_{p^n-1}(a_0, a_1, \dots, a_{p^n-1}) = 0.$$

В частном случае при $n = 1$ получим формулу для возведения дифференцирования $D = f(x)\frac{d}{dx}$ в степень $p$ в алгебре Витта $W_1(1)$. Для этого многочлен $f(x)$ удобнее записать в обычных, а не в разделенных степенях

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1}x^{p-1} \quad (\text{здесь } x^p = 0).$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем формулу

$$D^p = \Delta \cdot D, \quad (3)$$

где множитель $\Delta$ имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & & a_{p-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & & a_{p-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & & a_{p-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Формула (3) в случае конечного поля $K$, содержащего $p^m$ элементов, позволяет подсчитать, что число нильпотентных дифференцирований ($\Delta = 0$) в алгебре Витта равно $p^{m(p-1)}$, а число тороидальных дифференцирований ($\Delta = 1$) равно $(p^m + p - 2) \cdot p^{m(p-2)}$.

Рассмотрим теперь алгебру срезанных многочленов с условием $x^p = \alpha \in K$. Она изоморфна фактор-алгебре $K[x]/(x^p - \alpha)$. Аналогичные рассуждения показывают, что любое ее дифференцирование $D$ также удовлетворяет уравнению (3), но в этом случае коэффициент $\Delta$ имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & & a_{p-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & & a_{p-2} \\ \alpha a_{p-1} & a_0 & a_1 & \dots & & a_{p-3} \\ \alpha a_{p-2} & \alpha a_{p-1} & a_0 & \dots & & a_{p-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 & \alpha a_5 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь алгебру обычных формальных степенных рядов $K[[x]]$. Подалгеброй констант для любого непрерывного дифференцирования $D = f(x)\frac{d}{dx} \in \operatorname{Der} K[[x]]$ является $K[[y]]$, где $y = x^p$. Алгебра $K[[x]]$ является модулем конечного типа над полем частных $P = K((y))$. Любой формальный степенной ряд $f(x) \in K[[x]]$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x) = f_0(y) + f_1(y) \cdot x + f_2(y) \cdot x^2 + \dots + f_{p-1}(y) \cdot x^{p-1},$$

т.е. существует $K$-линейное вложение алгебры $K[[x]]$ в алгебру срезанных многочленов $P[x]/(x^p - y)$.

Это вложение позволяет получить формулу $D^p = \Delta(y) \cdot D$, где

$$\Delta(y) = \begin{vmatrix} f_1(y) & f_2(y) & \dots & & f_{p-1}(y) & \\ f_0(y) & f_1(y) & \dots & & f_{p-2}(y) & \\ y f_{p-1}(y) & f_0(y) & \dots & & f_{p-3}(y) & \\ y f_{p-2}(y) & y f_{p-1}(y) & \dots & & f_{p-4}(y) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y f_3(y) & y f_4(y) & \dots & y f_{p-1}(y) & f_0(y) & f_1(y) \end{vmatrix}.$$

Полученная формула использована в работе [5] для решения одной задачи о дифференциальных уравнениях.

## Литература


1. Brown G. *Cartan subalgebras of Zassenhaus algebras* // Can. J. Math. – 1975. – V. 27. – № 5. – P 1011–1021.
2. Премет А.А. *Регулярные подалгебры Картана и нильпотентные элементы в ограниченных алгебрах Ли* // Матем. сб. – 1988. – Т. 180. – № 4. – С. 542–557.
3. Кострикин А.И., Шафаревич И.Р. *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1969. – Т. 33. – № 2. – С. 251–322.
4. Тюрин С.А. *Линейные дифференциальные уравнения в алгебре разделенных степеней* – “Материалы 6-й Научн. конф. молод. ученых мех.-мат. фак. и НИИ мех. Ч. 3”. – Горький, 1981. – 4 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.01.82, № 202-82.
5. Тюрин С.А. *Некоторые типы дифференциальных уравнений над полем конечной характеристики* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 1. – С. 81–83.



*Нижегородский государственный университет*



*Поступила*
23.06.1995