ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 10 (461)

УДК 517.544

Б.А. КАЦ

ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА ПО ФРАКТАЛЬНОМУ КОНТУРУ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Введение

Как известно, в последние два десятилетия сформировалась точка зрения, согласно которой адекватными математическими моделями границ реальных тел, траекторий, трещин и т.п. являются не гладкие или кусочно-гладкие линии и поверхности, а фракталы — объекты дробной метрической размерности. При этом в прикладных исследованиях особое значение придается свойству самоподобия фракталов, моделирующему физическую однородность их реальных прообразов (напр., [1], [2]).

В связи с этим встает проблема решения различных краевых задач математической физики в областях с фрактальными границами. В классическом (т. е. гладком или кусочно-гладком) случае многие из них решаются с помощью контурных и поверхностных интегралов. Поэтому здесь возникает, в частности, вопрос о существовании интеграла

$$\int_\Gamma f(z)dz, \tag{1}$$

где Γ — фрактальная кривая на плоскости комплексной переменной z, а $f(z)$ — заданная на этой кривой функция. Классическая теория такого интеграла опирается на предположение о спрямляемости кривой. Но фрактальная кривая Γ не может быть спрямляемой. По-видимому, именно поэтому опубликованные к настоящему времени исследования этого интеграла посвящены главным образом различным процедурам, позволяющим определить интеграл по фрактальной кривой (1) как некоторый новый объект.

Сейчас известно несколько таких определений. Одно из них основано на формуле Стокса

$$\int_\Gamma f(z)dz = -\int\int_{D^+} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}, \tag{2}$$

справедливой в случае, когда замкнутая спрямляемая кривая Γ ограничивает область D^+, а функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{D}^+$ и имеет в D^+ интегрируемые частные производные первого порядка. По-видимому, еще Уитни отмечал, что правая часть равенства (2) может служить определением левой, если кривая Γ неспрямляема. Чтобы сделать это определение корректным, мы должны убедиться, что правая часть (2) не меняется при замене в ней функции f другой функцией с теми же значениями на Γ. Этот вопрос обсуждался в [3], [4] для функции f, удовлетворяющей на Γ условию Гёльдера с показателем ν, т. е. условию

$$\sup\left\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^\nu} : t', t'' \in \Gamma,\ t' \neq t''\right\} = h_\nu(f, \Gamma) < \infty.$$

Выяснилось, что равенство (2) приводит к корректному определению интеграла по неспрямляемой кривой при условии

$$\nu > d - 1, \tag{3}$$

где d — верхняя метрическая размерность кривой Γ (см. ее определение в [1]–[3], а также ниже).

В дальнейшем $H_\nu(\Gamma)$ обозначает пространство Гёльдера, состоящее из заданных на Γ функций, для которых конечна величина $h_\nu(f,\Gamma)$. В качестве нормы в нем можно использовать сумму $\sup\{|f(z)| : z \in \Gamma\} + h_\nu(f,\Gamma)$.

По-видимому, минимальное требование, позволяющее использовать формулу (2) в качестве определения интеграла (1), состоит в том, чтобы функция f была следом на Γ заданной в $\overline{D}^+$ функции из соболевского класса W_1^1. Таким образом, пространство интегрируемых по Γ в смысле (2) функций должно быть какой-то версией пространств О.В. Бесова. В [5], [6] при некоторых дополнительных ограничениях на геометрию Γ показано, что это действительно так.

Второй подход к определению интеграла (1) можно назвать геометрической аппроксимацией. Если функция $f(z)$ задана в окрестности Γ, то эту кривую можно аппроксимировать ломаными Γ_n, сходящимися к ней в каком-либо смысле, и положить $\int\limits_\Gamma f(z)dz = \lim \int\limits_{\Gamma_n} f(z)dz$. Такая схема исследуется в [4], [7], [8]. Оказалось, что она проходит для $f \in H_\nu(\Gamma)$ при условии (3). В [9] тот же результат получен средствами нестандартного анализа: кривая Γ заменяется бесконечно близкой к ней ломаной с бесконечно большим числом звеньев.

Двойственное по отношению к геометрической аппроксимации определение интеграла (1) предложено в [10]. Здесь аппроксимируется не кривая, а функция. Если Γ есть простая дуга с началом a и концом b, а последовательность многочленов $\{p_n(z)\}$ сходится на Γ к $f(z)$, то можно положить $\int\limits_\Gamma f(z)dz = \lim(P_n(b) - P_n(a))$, где P_n — первообразная $p_n, n = 1, 2, \dots$ В [10] показано, что этот предел существует, если последовательность $\{p_n\}$ сходится к f в пространстве $H_\nu(\Gamma)$, показатель ν удовлетворяет условию (3), а дуга Γ не скручивается на концах в спирали.

Далее, в [11], [12] интеграл (1) определяется как обобщенная функция с носителем Γ, удовлетворяющая ряду аксиом. Существование такой обобщенной функции устанавливается при том же условии (3).

Все эти определения носят косвенный характер. В данной работе мы в первую очередь хотим обратить внимание на возможность прямого определения такого интеграла.

2. Контурный интеграл Стильтьеса. Геометрическая инвариантность

Пусть Γ — простая дуга на комплексной плоскости с началом a и концом b, а $f(z)$ — заданная на этой дуге функция. Согласно классическому определению контурного интеграла $\int\limits_\Gamma f(z)dz$ следует разбить Γ на дуги $\{\gamma_j\}_{j=1}^{j=n}$ точками $a = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = b$, занумерованными в порядке обхода Γ, выбрать на каждой из дуг γ_j по точке $w_j \in \gamma_j$ и рассмотреть римановы интегральные суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} f(w_j)(z_j - z_{j-1})$. Очевидно, эти суммы совпадают с интегральными суммами, возникающими в определении интеграла Стильтьеса $\int\limits_0^1 f(z(x))dz(x)$, где $z = z(x)$ есть непрерывное и взаимно однозначное отображение сегмента $I = [0,1]$ на дугу Γ, $z(0) = a$, $z(1) = b$. Поэтому эти интегралы существуют или не существуют одновременно и значения их совпадают. Таким образом, вопрос о существовании контурного интеграла по неспрямляемой кривой есть вопрос о существовании некоторого интеграла Стильтьеса $\int\limits_0^1 f(x)dg(x)$ для случая, когда вариация функции $g(x)$ на отрезке I неограничена. Условия существования таких интегралов известны, но прежде, чем описывать их, введем еще одну разновидность контурного интеграла.

Называя точку a началом кривой Γ, а точку b ее концом, фиксируем направление обхода Γ и зададим естественные отношения порядка точек этой кривой: $z_1 < z_2$, если z_1 и z_2 принадлежат Γ и z_1 предшествует z_2, и $z_1 \le z_2$, если $z_1 < z_2$ или $z_1 = z_2$. Если кривая Γ замкнута, то положим $a = b$, а направление обхода для определенности выберем так, чтобы ограничиваемая этой кривой область оставалась слева от нее; фиксация точки $a = b$ не приводит к сколько-нибудь существенным неудобствам. Последовательность точек $\{z_j\}_{j=0}^{j=n}$ назовем разбиением Γ, если $a = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_n = b$, имея в виду, что эти точки разбивают Γ на дуги γ_j так, что началом γ_j является точка z_{j-1}, а концом — точка $z_j, j = 1, 2, \dots, n$. Если кроме этого заданы точки $\{w_j\}_{j=1}^{j=n}$ такие, что $z_{j-1} \le w_j \le z_j, j = 1, 2, \dots, n$, то разбиение называется пунктированным.

Определение 1. Пусть Γ есть простая дуга с фиксированным направлением обхода, на которой заданы функции $f(z)$ и $g(z)$. Будем говорить, что контурный интеграл Стильтьеса $\int\limits_\Gamma f\,dg$ существует и равен J, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(w_j)(g(z_j) - g(z_{j-1})) - J\right| < \varepsilon$$

для любого пунктированного разбиения, удовлетворяющего условию $|z_j - z_{j-1}| < \delta$, $j = 1, 2, \dots, n$.

В дальнейшем, желая подчеркнуть то обстоятельство, что интеграл (1) существует по данному определению с $g(z) = z$, а не как результат применения какой-либо схемы обобщенного интегрирования (см. введение), будем говорить, что он существует *в собственном смысле.* Нетрудно приспособить это определение и для замкнутой кривой.

Очевидно, $\int\limits_\Gamma f\,dg = \int\limits_0^1 f(z(x))dg(z(x))$, где в правой части стоит обычный интеграл Стильтьеса по отрезку $I = [0, 1]$, а $z = z(x)$ — любое непрерывное и взаимно однозначное отображение этого отрезка на кривую Γ, сохраняющее направление обхода. Величина интеграла (и его существование) не зависит от выбора этого отображения. Если $RS(\Gamma)$ означает класс всех пар функций $\{f, g\}$, для которых вышеописанный интеграл существует, то любое из таких отображений $z = z(x)$ естественным образом индуцирует взаимно однозначное отображение $RS(I)$ на $RS(\Gamma)$. Пусть $\xi(x)$ есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\xi(0) = 0$, $\xi(1) = 1$; такие функции будем относить к классу $E(I)$. Аналогично, пусть $E(\Gamma)$ есть класс взаимно однозначных непрерывных отображений кривой Γ на себя, оставляющих ее концы неподвижными. Очевидно, вместе с каждой парой функций $\{f, g\}$ класс $RS(\Gamma)$ содержит все пары вида $\{f \circ \xi,\ g \circ \xi\}$, $\xi \in E(\Gamma)$. Это свойство мы будем называть геометрической инвариантностью. Таким образом, класс A пар заданных на Γ функций называется геометрически инвариантным (г. и.), если включения $\{f, g\} \in A$, $\xi \in E(\Gamma)$ влекут $\{f \circ \xi,\ g \circ \xi\} \in A$. Наименьший г. и. класс, содержащий A, будем называть геометрически инвариантной оболочкой A. Очевидно, класс $RS(\Gamma)$ вместе с каждым своим подклассом содержит его г. и. оболочку.

Теперь вернемся к условиям существования интеграла Стильтьеса по отрезку $\int\limits_0^1 f(x)dg(x)$ для случая, когда вариация функции $g(x)$ на отрезке $I = [0, 1]$ неограничена. В 1936 г. В.Т. Кондурарь [13] показал, что этот интеграл существует, если $f \in H_\alpha(I)$, $g \in H_\beta(I)$ и $\alpha + \beta > 1$. При $\beta < 1$ вариация функции g здесь может быть неограниченной. Класс Кондураря $\{H_\alpha, H_\beta\}$ не является геометрически инвариантным. Поэтому при его переносе на кривую Γ получается следующее условие существования интеграла по этой кривой, зависящее от выбора ее параметризации $z = z(x)$.

Предложение 1. *Контурный интеграл Стильтьеса $\int\limits_\Gamma f\,dg$ существует, если существует такое взаимно однозначное непрерывное отображение $z(x)$ отрезка I на Γ, что $f(z(x)) \in H_\alpha(I)$, $g(z(x)) \in H_\beta(I)$ и $\alpha + \beta > 1$.*

От этой зависимости можно избавиться, перейдя к г.и. оболочке класса В.Т. Кондураря, которую сейчас опишем. Рассмотрим классы функций ограниченной обобщенной вариации.

Определение 2. Пусть $\Phi(x)$ — заданная при $x \geq 0$ непрерывная возрастающая функция и $\Phi(0) = 0$, а функция $f(z)$ задана на кривой Γ. Величина

$$\sup_{\tau} \sum_{j=1}^{n} \Phi(|f(z_j) - f(z_{j-1})|) = v_{\Phi}(f; \Gamma)$$

называется Φ-вариацией функции f; здесь точная верхняя грань берется по всем разбиениям $\tau = \{z_j\}_{j=0}^{j=n}$, $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b$. Класс функций ограниченной Φ-вариации обозначается через $V_{\Phi}(\Gamma)$ и состоит из всех функций, Φ-вариации которых конечны. $CV_{\Phi}(\Gamma)$ есть его подкласс, состоящий из непрерывных функций.

Если $\Phi(x) = x^p$, $p \geq 1$, то эти классы обозначаются через $V_p(\Gamma)$ и $CV_p(\Gamma)$ соответственно. Обычно эти классы рассматривают на отрезке вещественной оси I. Очевидно, $V_1(I)$ есть обычный класс функций ограниченной вариации. Класс $V_2(I)$ был введен в [14]. В общем виде классы $V_p(I)$ и $V_{\Phi}(I)$ были введены и использованы при изучении интеграла Стильтьеса в работах [15] и [16] соответственно. Очевидно, все эти классы геометрически инвариантны и $H_{1/p}(I) \subset V_p(I)$.

Предложение 2. *Геометрически инвариантная оболочка класса* $\{H_\alpha, H_\beta\}$ *имеет вид* $\{CV_p, CV_q\}$, *где* $p\alpha = q\beta = 1$.

Это предложение немедленно следует из такого утверждения: для любого конечного набора функций $f_j(z) \in CV_{p_j}(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, n$, можно найти такую функцию $\mu(z) \in E(\Gamma)$, что $f_j \circ \mu \in H_{1/p_j}(\Gamma)$ при $j = 1, \ldots, n$. По-видимому, это утверждение известно по крайней мере при $\Gamma = I$, $n = 1$ (см., напр., [17]). В нашем случае доказательство совершенно аналогично.

Таким образом, г. и. оболочкой предложения 1 (теоремы Кондураря) является утверждение о существовании контурного интеграла Стильтьеса $\int\limits_{\Gamma} f\,dg$ при условиях $f \in \mathrm{C}V_p(\Gamma)$, $g \in CV_q(\Gamma)$, $1/p + 1/q > 1$. Но из теорем Юнга без труда получаются и более сильные утверждения.

Предложение 3 (ср. [15]). *Контурный интеграл Стильтьеса* $\int\limits_{\Gamma} f\,dg$ *существует при условиях* $f \in V_p(\Gamma)$, $g \in V_q(\Gamma)$, $1/p + 1/q > 1$, *если функции* f *и* g *не имеют общих точек разрыва.*

Предложение 4 (ср. [16]). *Контурный интеграл Стильтьеса* $\int\limits_{\Gamma} f\,dg$ *существует при условиях* $f \in V_{\Phi}(\Gamma)$, $g \in V_{\Psi}(\Gamma)$, *если функции* f *и* g *не имеют общих точек разрыва и сходится ряд Юнга*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi(1/n)\psi(1/n) < \infty. \tag{4}$$

Здесь ϕ *и* ψ *— функции, обратные к* Φ *и* Ψ *соответственно.*

Замечание 1. Заменив в предложении 4 классы V их непрерывными частями CV, мы получим геометрически инвариантную оболочку теоремы Беркиля [18]. В наших терминах эту теорему можно сформулировать так. Пусть $\phi(x)$ есть заданная при $x \geq 0$ возрастающая непрерывная функция и $\phi(0) = 0$. Обозначим через $H_{\phi}(\Gamma)$ класс всех заданных на Γ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \phi(c|z_1 - z_2|)$, где z_1 и z_2 принадлежат Γ, а $c = c(f)$ есть не зависящая от них постоянная. Тогда контурный интеграл Стильтьеса $\int\limits_{\Gamma} f\,dg$ существует при $f \in H_{\phi}(\Gamma)$, $g \in H_{\psi}(\Gamma)$, если сходится интеграл $\int\limits_{0} \phi(x)\psi(x)\frac{dx}{x^2}$. Легко видеть, что $\{CV_{\Phi}, CV_{\Psi}\}$ есть г. и. оболочка класса $\{H_{\phi}, H_{\psi}\}$, а сходимость интеграла Беркиля равносильна сходимости ряда Юнга. Таким образом, теорема Беркиля находится в такой же связи с теоремой Юнга из [16], в какой теорема Кондураря находится с теоремой Юнга из [15].

Замечание 2. А.М. Дьячков [17] получил новое условие существования интеграла Стильтьеса по отрезку вещественной прямой, и его можно переформулировать как условие существования контурного интеграла Стильтьеса. Здесь это не делается, поскольку для последующих построений достаточно уже приведенных условий существования этого интеграла.

Теперь выясним, к каким условиям существования интеграла (1) приводят эти предложения. Очевидно, они сводятся к принадлежности следа функции $g(z) = z$ на Γ тем или иным классам функций ограниченной обобщенной вариации.

Определение 3. Пусть $\Phi(x)$ есть такая же функция, что в определении 2. Будем говорить, что кривая Γ является Φ-спрямляемой и писать $\Gamma \in V_\Phi$, если выполняется условие

$$\sup_{\tau} \sum_{j=1}^{n} \Phi(|z_j - z_{j-1}|) = \sigma_\Phi(\Gamma) < \infty;$$

здесь точная верхняя грань берется по всем разбиениям $\tau = \{z_j\}_{j=0}^{j=n}$, $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b$. Если $\Phi(x) = x^p$, то будем говорить о p-спрямляемости, писать $\Gamma \in V_p$ и обозначать величину $\sigma_\Phi(\Gamma)$ через $\sigma_p(\Gamma)$.

Очевидно, условия $z \in V_\Phi(\Gamma)$ и $\Gamma \in V_\Phi$ равносильны.

Теорема 1. *Контурный интеграл* (1) *существует, если* $\Gamma \in V_\Phi$, $f \in V_\Psi(\Gamma)$ *и сходится ряд Юнга* (4). *В частности, он существует, если кривая* Γ *является* p*-спрямляемой,* $f \in V_q(\Gamma)$ *и* $1/p + 1/q > 1$.

Эта теорема является следствием предложения 4. Во многих случаях она приводит к более слабым ограничениям на интегранд, чем связанное с формулой Стокса условие (3). Однако более важное ее отличие от результатов, описанных во введении, состоит в том, что здесь речь идет о существовании интеграла не в каком-либо обобщенном смысле, а по определению. Она без труда переносится на пространственные кривые, но в данной статье мы ограничимся плоским случаем.

Хорошо известно, что интеграл Стильтьеса $\int_a^b f\, dg$ существует, если функция g непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция f имеет там ограниченную вариацию. Поэтому справедливо следующее утверждение, первая часть которого есть предельный случай теоремы 1 при $p = \infty$.

Теорема 2. *На произвольной жордановой кривой* Γ *контурный интеграл* (1) *существует, если* $f \in V_1(\Gamma)$. *Если при этом* $\left|\int_\Gamma f\, dz\right| \le C \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma\}$, *где* f *— любая функция класса* $CV_1(\Gamma)$, *а постоянная* C *не зависит от* f, *то кривая* Γ *спрямляема.*

Второе утверждение следует из теоремы Ф. Рисса о функционалах на пространстве непрерывных функций.

3. Фракталы и обобщенная спрямляемость. Натуральный параметр

Здесь обсудим свойства Φ-спрямляемых и p-спрямляемых кривых.

Предложение 5. *Кривая* Γ *является* p*-спрямляемой тогда и только тогда, когда она допускает параметризацию класса* $H_{1/p}(I)$, *т. е. когда существует взаимно однозначное отображение* $z(x)$ *отрезка* I *на* Γ, *принадлежащее классу* $H_{1/p}(I)$. *Далее, кривая* Γ *является* Φ*-спрямляемой тогда и только тогда, когда она допускает параметризацию класса* $H_{\Phi^{-1}}(I)$.

Первое из этих утверждений следует из предложения 2, второе доказывается аналогично. Нетрудно видоизменить это предложение так, чтобы оно было справедливо и для замкнутых кривых.

Пусть на p-спрямляемой кривой Γ задана функция $f \in H_\nu(\Gamma)$, а $z(x) \in H_{1/p}(I)$ — взаимно однозначное отображение I на Γ, существование которого утверждается в предложении 5. Тогда $f(z(x)) \in H_{\nu/p}(I) \subset V_{p/\nu}$, и из теоремы 1 (см. также предложение 1) вытекает

Следствие 1. Контурный интеграл (1) по p-спрямляемой кривой Γ существует, если $f \in H_\nu(\Gamma)$ и выполнено условие

$$\nu > p - 1. \tag{5}$$

Замечание 3. При $p \geq 2$ условие (5) означает, что функция f постоянна. В этой ситуации следствие 1 становится тривиальным.

Условие (5) очень близко по форме к условию (3) (напомним еще раз, что в следствии 1 речь идет о существовании интеграла (1) в собственном, а не в обобщенном смысле, как это было в случае условия (3)). Это совпадение указывает на возможные связи между величиной p и верхней метрической размерностью d. Напомним определение этой размерности [1], [2].

Определение 4. Пусть Γ — компактное множество на плоскости. Разобьем плоскость на квадраты со стороной $\varepsilon > 0$ и обозначим через $N_\varepsilon(\Gamma)$ число тех квадратов, которые имеют общие точки с Γ. Тогда величина

$$d = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon(\Gamma)}{\log \varepsilon^{-1}}$$

называется верхней метрической размерностью множества Γ.

Нередко можно встретить и другие названия: фрактальная размерность, клеточная размерность, сеточная размерность, размерность Безиковича и т. п. Отметим следующие очевидные свойства величины d:

— размерность спрямляемой кривой равна единице;

— размерность любого компакта на плоскости не превосходит двух.

Поскольку всякая 1-спрямляемая кривая является спрямляемой и наоборот, постольку первое из этих свойств еще раз указывает на возможность равенства величин p и d. Но второе свойство показывает, что такое равенство наблюдается не всегда: для любого наперед заданного $p > 2$ нетрудно построить p-спрямляемую плоскую кривую, которая не является p'-спрямляемой ни при каком $p' < p$, и для такой кривой $d < p$. Покажем, что обратное неравенство невозможно.

Предложение 6. *Если кривая Γ является p-спрямляемой, то ее верхняя метрическая размерность d не превосходит p.*

Доказательство. Построим специальное разбиение Γ. Для этого фиксируем положительное значение ε и положим $z_0 = a$. Если Γ лежит в круге $K_0 = \{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$, то полагаем $z_1 = b$ и завершаем построение. Если же это не так, то пересечение $\Gamma \cap K_0$ содержит дугу γ_1 с началом в точке z_0 и концом на границе круга K_0; этот конец обозначим через z_1. Теперь повторим те же рассуждения по отношению к кривой $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \gamma_1$ и кругу $K_1 = \{z : |z - z_1| \leq \varepsilon\}$. В результате получим точку z_2, которая либо совпадает с b, либо представляет собою конец дуги $\gamma_2 \subset \Gamma_1 \cap K_1$, лежащий на границе круга K_1. Повторяя процедуру, получим последовательность точек $z_0, z_1, \dots, z_m, \dots$ кривой Γ, при любом $j > 0$ удовлетворяющих условию $|z_j - z_{j-1}| = \varepsilon$. Такая последовательность не может быть бесконечной. Действительно, в противном случае из условия $\Gamma \in V_p$ следовало бы существование конечной постоянной $\sigma_p(\Gamma)$, превосходящей суммы $\sum\limits_{j=1}^{m} |z_j - z_{j-1}|^p = m\varepsilon^p$ при любом m, что невозможно. Таким образом, при каком-то конечном n получим $\Gamma_n \subset K_n$, и, следуя нашему правилу, должны будем положить $z_{n+1} = b$ и завершить этим разбиение. В итоге Γ окажется разбитой на $n+1$ дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \Gamma_n$, каждая из которых лежит в круге радиуса ε. Такой круг пересекает не более 12 квадратов со стороной ε, так что $N_\varepsilon(\Gamma) \leq 12(n+1)$. Но из условия p-спрямляемости следует $n\varepsilon^p \leq \sigma_p(\Gamma)$. Поэтому

$N_\varepsilon(\Gamma) \le 12(\sigma_p \varepsilon^{-p} + 1)$. Теперь из определения верхней метрической размерности следует неравенство $d \le p$. $\square$

Нетрудно обобщить эту оценку и на случай $\Gamma \in V_\Phi$. Повторение приведенных выше рассуждений приводит к неравенству $d \le \limsup\limits_{x\to 0} \frac{\log \Phi(x)}{\log x}$. Однако вернемся к p-спрямляемым кривым. Очевидно, $V_{p'} \subset V_p$ при $p' < p$. Будем называть показателем спрямляемости кривой точную нижнюю грань множества тех значений p, для которых данная кривая является p-спрямляемой. В силу только что доказанного предложения верхняя метрическая размерность любой кривой либо меньше ее показателя спрямляемости, либо равна ему. Равенство имеет место для спрямляемых кривых, но не только для них. Значительный интерес в этой связи представляют классические самоподобные фрактальные кривые, например, снежинка Коха. Напомним ее построение.

Первоначально задается область T_1 в форме правильного треугольника. Область T_2 получается присоединением к T_1 трех в три раза меньших правильных треугольников; они "приклеиваются" вдоль средней трети каждой из сторон T_1. Затем к средней трети каждой стороны T_2 присоединяется еще по одному правильному треугольнику, уже в 9 раз меньшему исходного, и т.д. В пределе получится область T_∞, границу которой и называют снежинкой фон Коха.

Рассмотрим подробнее простую дугу, составляющую треть снежинки Коха. Ее построение можно представить себе так. Вначале берется ломаная F_1, состоящая из 4 прямолинейных отрезков, последовательно соединяющих точки 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\frac{2}{3}$, 1. Следующая ломаная F_2 состоит из 4^2 отрезков; она получается из F_1 заменой каждого из прямолинейных отрезков 4-звенной ломаной, подобной F_1. Повторяя эту процедуру, мы получим последовательность ломаных $\{F_j\}$, каждая из которых состоит из 4^j отрезков длины 3^{-j}, а в пределе – простую неспрямляемую кривую F_∞ с началом в точке 0 и концом 1. Хорошо известно, что эта кривая, как и снежинка Коха, имеет верхнюю метрическую размерность $d = \frac{\log 4}{\log 3}$. Простой подсчет показывает, что последовательность сумм p-х степеней длин звеньев ломаных F_j ограничена при $p \ge \frac{\log 4}{\log 3}$. Отсюда нетрудно вывести, что показатель спрямляемости снежинки Коха совпадает с ее размерностью.

Эту конструкцию можно варьировать. Например, в качестве F_1 можно взять ломаную, состоящую из 4 прямолинейных отрезков, последовательно соединяющих точки 0, M^{-1}, $\frac{1}{2} + ih$, $1 - M^{-1}$, 1, где $M > 2$, а величина h выбирается так, чтобы длины всех четырех отрезков равнялись $1/M$. Тогда ломаная F_{j+1} состоит из 4 ломаных, полученных из F_j в результате подобия с коэффициентом $1/M$, а предельная кривая F_∞ имеет размерность и показатель спрямляемости, равные $\frac{\log 4}{\log M}$.

Можно описать еще более общую процедуру. Пусть ломаная F_1 состоит из N звеньев равной длины, а F_{j+1} получается из F_j путем замены каждого звена ломаной, подобной F_1. В пределе получается множество, называемое самоподобным. Такое множество называется фракталом [1], [2], если его верхняя метрическая размерность больше единицы.

Замечание 4. Пусть коэффициент подобия при переходе от F_1 к F_2 равен $1/M$. Тогда можно показать, что показатель спрямляемости предельной кривой равен $\frac{\log N}{\log M}$. Эта величина может оказаться больше двух, т. е. она не всегда совпадает с размерностью кривой.

Определение 5. Будем называть простую кривую Γ классической самоподобной фрактальной кривой (к.с.ф.к.), если она получена в результате только что описанного процесса, имеет верхнюю метрическую размерность $d > 1$ и является d-спрямляемой. При этом кривая может быть как разомкнутой, так и замкнутой.

Пример снежинки Коха показывает, что класс таких кривых не пуст. Интеграл (1) по к.с.ф.к. при условии (3) существует в собственном смысле.

На к.с.ф.к. можно определить канонический параметр. Пусть a — начало дуги F_∞, а z — некоторая точка этой дуги, являющаяся угловой точкой ломаных F_j при $j \ge j_0 = j_0(z)$. Обозначим через $s(z)$ сумму d-х степеней длин звеньев части F_j, соединяющей a с z; величина этой суммы не зависит от j. Тем самым функция $s(z)$ определена на всюду плотном множестве точек

F_∞. Очевидно, она может быть продолжена на всю дугу F_∞ по непрерывности. В результате получаем определенную на F_∞ функцию $s(z)$, взаимно однозначно отображающую эту дугу на отрезок $I=[0,S]$ (для приведенного выше построения снежинки Коха имеем $S=1$). Она тесно связана с величиной $\sigma_p(\Gamma)$, введенной в определении 3. Пусть Γ_z есть часть Γ, заключенная между точками a и $z\in\Gamma$. Положим $\sigma_p(z)=\sigma_p(\Gamma_z)$ и $\sigma_p^*(z)=\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_{\tau(\delta)}\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j-z_{j-1}|^p$, где супремум берется по всем разбиениям дуги Γ_z, удовлетворяющим условию $|z_j-z_{j-1}|\le\delta$. Если Γ — к.с.ф.к., то функции $s(z)$, $\sigma_p(z)$ и $\sigma_p^*(z)$ совпадают между собою. Конечно, функции $\sigma_p(z)$ и $\sigma_p^*(z)$ определены на любой p-спрямляемой кривой, но в общем случае они не всегда отражают ее геометрическую природу. Так, если кривая состоит из двух участков с разными показателями спрямляемости, то на участке с меньшим показателем эти функции постоянны. На к.с.ф.к. это невозможно: в силу самоподобия любая дуга имеет тот же показатель спрямляемости, что и вся кривая. Обратная к $s(z)$ функция $Z(s)$ взаимно однозначно отображает I на Γ. Легко видеть, что это и есть параметризация кривой Γ класса $H_{1/p}$, о существовании которой шла речь в предложении 5. Эту параметризацию к.с.ф.к. будем называть *натуральной*.

На предфракталах F_j также можно определить специальные параметризации. Пусть ломаная F_j состоит из прямолинейных отрезков $I_1,I_2,\dots,I_m$, а точка z принадлежит звену $I_k=[a_k,b_k]$. Положим $s_j(z)=\sum\limits_{n=1}^{k-1}|I_n|^p+|z-a_k|^p$, где $|I_n|$ означает длину I_n. Эта функция имеет то же множество значений I, что и функция $s(z)$, и обратная к ней функция $Z_j(s)$ отображает I на F_j. При этом значения функций Z_j и Z совпадают в точках, соответствующих угловым точкам F_j. Для снежинки Коха это точки $s=\frac{m}{4^j}$, $m=0,1,\dots,4^j$. Таким образом, последовательность функций $\{Z_j(s)\}$ сходится к $Z(s)$ на плотном в I множестве точек (в случае снежинки Коха речь идет о множестве всех рациональных дробей с конечной записью в четвертичной системе исчисления). Кроме того, p-вариации этих функций в совокупности ограничены. Если $f(z)\in V_q(F_\infty)$ и $1/p+1/q>1$, то последовательность интегралов $\int\limits_I f(Z(s))dZ_j(s)$ сходится к интегралу $\int\limits_I f(Z(s))dZ(s)=\int\limits_{F_\infty} fdz$ в силу теоремы Юнга о почленном интегрировании [15], [16]. Но $\int\limits_I f(Z(s))dZ_j(s)=\int\limits_{F_j} f_jdz$, где $f_j(z)=f(Z(s_j(z)))$. Таким образом, интеграл по к.с.ф.к. при условии $1/p+1/q>1$ есть предел интегралов по аппроксимирующим этот фрактал ломаным. Иначе говоря, теоремы Юнга о почленном интегрировании позволяют заключить, что (по крайней мере для к.с.ф.к.) геометрическая аппроксимация приводит к успеху не только для функций класса Гёльдера, но и в более обширных классах функций ограниченной обобщенной вариации, причем в пределе получается интеграл, существующий в собственном смысле.

В угловых точках ломаной F_j, принадлежащих к.с.ф.к. F_∞, функции $f_j(z)$ и $f(z)$ принимают одинаковые значения. Поэтому функции f_j могут рассматриваться как сужения на ломаные F_j некоторого продолжения функции f, или по крайней мере близки к таким сужениям. Пусть, например, $f\in H_\nu(F_\infty)$, и f^w есть ее продолжение Уитни на всю комплексную плоскость. Отметим следующие свойства этого продолжения [19]: (i) функция $f^w(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем ν во всей комплексной плоскости; (ii) вне F_∞ эта функция имеет частные производные всех порядков; (iii) ее первые производные в точке z оцениваются сверху величиной $\rho^{\nu-1}(z)$, где $\rho(z)$ означает расстояние от z до F_∞.

Разность f^w-f_j обращается в нуль в угловых точках ломаной F_j. Согласно свойству (i) имеем $f^w\in H_\nu(F_j)$. Нетрудно показать, что функция f_j принадлежит тому же классу. Поэтому интеграл от этой разности по любому ребру ломаной F_j мажорируется $(\nu+1)$-й степенью длины этого звена, а по всей этой ломаной — суммой таких степеней. Отсюда следует, что при условии (5) справедливо равенство $\lim\int\limits_{F_j} f^w(z)dz=\int\limits_{F_\infty} fdz$. Далее, если к.с.ф.к. F_∞ замкнутая и ограничивает область D^+, то даже при более слабом условии (3) первые производные f^w интегрируемы в этой области [20]. Поэтому в областях, ограниченных ломаными F_j, для этой функции справедлива формула Стокса. Переходя к пределу, убеждаемся, что формула Стокса (2) сохраняет справедливость и в случае, когда $\Gamma = F_\infty$ есть замкнутая к.с.ф.к., $f \in H_\nu(\Gamma)$ и выполнено условие (5). Оба эти утверждения — о возможности геометрической аппроксимации и о справедливости формулы Стокса — справедливы не только для к.с.ф.к., но и для любой p-спрямляемой кривой.

Предложение 7. *Если кривая Γ является p-спрямляемой, функция f задана в некоторой содержащей Γ области плоскости B, удовлетворяет в этой области условию Гёльдера с показателем ν и выполнено условие* (5), *то можно указать такую последовательность сходящихся к Γ ломаных Γ_j, что $\lim \int_{\Gamma_j} f(z)dz = \int_\Gamma f\, dz$.*

Предложение 8. *Если при условиях предыдущего предложения кривая Γ является замкнутой и ограничивает область $D^+ \subset B$, а функция f имеет в $B \setminus \Gamma$ интегрируемые первые производные, то для этих кривой и функции справедлива формула Стокса* (2).

Для доказательства предложения 7 достаточно взять последовательность вписанных в Γ ломаных так, чтобы угловые точки любой из них были угловыми и для всех последующих, а множество всех угловых точек всех этих ломаных в совокупности было всюду плотным на Γ. Предложение 8 следует из предыдущего.

Таким образом, при условии (5) на p-спрямляемой кривой контурное интегрирование приводит к тому же результату, что геометрическая аппроксимация и формула Стокса. Поэтому основанные на них определения интеграла (см. введение) имеет смысл рассматривать лишь при $d - 1 < \nu \le p - 1$. Но для классических самоподобных фракталов (напр., для снежинки Коха) этот промежуток пуст, и для интегрирования по ним такие определения не нужны.

4. Интеграл типа Коши

Пусть $\Gamma \in V_\Phi$ есть замкнутая кривая, разбивающая комплексную плоскость на области D^+ и D^-, причем $\infty \in D^-$, а заданная на этой кривой функция $f(z)$ принадлежит классу $V_\Psi(\Gamma)$. Тогда при условии (4) интеграл

$$K_f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z} \tag{6}$$

существует, если точка z не лежит на кривой Γ, и представляет голоморфную вне Γ функцию, исчезающую в точке ∞. Выражение (6) называют интегралом типа Коши. Он используется при решении ряда краевых задач (см. [21], [22]), причем одним из основных здесь является вопрос о наличии у функции K_f предельных значений на кривой Γ.

Теорема 3. *Если кривая $\Gamma \in V_p$ имеет верхнюю метрическую размерность d и $f \in H_\nu(\Gamma)$, то при выполнении условий* (5) *и*

$$\nu > d/2 \tag{7}$$

интеграл (6) *существует и представляет функцию, допускающую непрерывные продолжения на замыкания областей D^+ и D^-. В каждой точке $z \in \Gamma$ скачок этой функции, т.е. разность ее предельных значений при приближении к z из D^+ и D^- соответственно, равен значению f в точке z.*

Доказательство. Сначала фиксируем точку $z \in D^-$. Тогда функция $g(t) = f^w(t)(t-z)^{-1}$ удовлетворяет условиям предложения 8 (в качестве B здесь можно взять любую область, содержащую D^+, но не содержащую z), и для этой функции справедлива формула Стокса

$$\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z} = -\int\int_{D^+} \frac{\partial f^w}{\partial \bar t}\frac{dt\, d\bar t}{t-z}.$$

Теперь фиксируем точку $z \in D^+$. При достаточно малом r круг D_r с центром z и радиуса r лежит внутри D^+. Обозначим через $g(t)$ функцию, равную $f^w(t)(t-z)^{-1}$ вне D_r, а внутри этого круга доопределим ее с сохранением непрерывной дифференцируемости. Записав для этой функции формулу Стокса в области D^+ и перейдя затем к пределу при $r \to 0$, получим

$$\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z} = 2\pi i f^w(z) - \int\int_{D^+} \frac{\partial f^w}{\partial \bar t}\frac{dt\,d\bar t}{t-z}.$$

Таким образом, для любой точки z, не лежащей на кривой Γ, справедливо равенство

$$K_f(z) = \chi(z) f^w(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\int_{D^+} \frac{\partial f^w}{\partial \bar t}\frac{dt\,d\bar t}{t-z}, \tag{8}$$

где функция $\chi(z)$ равна единице в D^+ и нулю в D^-. В [20] доказано, что первые производные f^w интегрируемы в D^+ в любой степени, меньшей $\frac{2-d}{1-\nu}$, т. е. при условии (7) они интегрируемы в некоторой степени, большей двух. Но тогда [23] интеграл в правой части (8) представляет функцию, непрерывную во всей комплексной плоскости, что и доказывает теорему. □

Если кривая Γ спрямляема, то $p = d = 1$. Условие (5) становится тривиальным, а условие (7) приобретает вид $\nu > 1/2$. Непрерывность интеграла типа Коши по произвольной спрямляемой кривой при таком условии установлена Е.М. Дынькиным [24]. Таким образом, теорема 2 есть обобщение теоремы Е.М. Дынькина на p-спрямляемые кривые.

Если кривая Γ не только спрямляемая, но и кусочно-гладкая, то интеграл типа Коши непрерывно продолжается на эту кривую с обеих сторон при более слабом ограничении $f \in H_\nu(\Gamma)$, $\nu > 0$.[1] Оказывается, самоподобие может в известном смысле "заменить" здесь гладкость. Доказательство только что упомянутого результата основано на том, что в любой точке t_0 кусочно-гладкой кривой при этом условии сходится несобственный интеграл $\int\limits_\Gamma \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt$. На негладкой спрямляемой кривой это уже не так. Примером может служить кривая $L = \{t = re^{ir^{-n}} : 0 \le r \le 1\}$. При $n < 1$ она спрямляема, но интеграл $\int\limits_L |t|^\nu \frac{dt}{t}$ сходится лишь при $\nu > n$. Но самоподобие кривой обеспечивает сходимость такого интеграла при почти тех же условиях, при которых сходится интеграл (1). Именно, справедливо

Предложение 9. *Пусть Γ — простая самоподобная дуга с началом в точке t_0. Самоподобие здесь означает возможность представления $\Gamma = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty}\Gamma_j$, где простые дуги Γ_j попарно не имеют общих внутренних точек, и дуга Γ_{j+1} получается из Γ_j в результате отображения $z \mapsto t_0 + k(z - t_0)$, где $|k| < 1$. Если $\Gamma \in V_p$, $f \in H_\nu(\Gamma)$ и выполняется условие (5), то несобственный интеграл $\int\limits_\Gamma \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt$ сходится.*

Доказательство. Для наглядности рассмотрим в качестве Γ часть F_∞ снежинки Коха с началом в точке 0 и концом в точке 1, построенную в предыдущем параграфе. Положим $t_0 = 0$. В качестве дуги Γ_0 здесь можно взять часть Γ с началом в точке $\frac{1}{3}$ и концом в точке 1, тогда $k = 1/3$. Простые замены переменной приводят к равенству

$$\sum_{j=0}^{m}\int_{\Gamma_j}(f(t)-f(0))\frac{dt}{t} = \int_{\Gamma_0}\sum_{j=0}^{m}(f(tk^j)-f(0))\frac{dt}{t}, \tag{9}$$

где каждый из контурных интегралов существует в силу следствия 1. Согласно условию Гёльдера ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(f(tk^j)-f(0))$ поточечно сходится на Γ_0; обозначим его сумму через $f^*(t)$. Из условия $f \in H_\nu(\Gamma)$ следует, что функции f^* и $f^*(t)/t$ принадлежат $H_\nu(\Gamma_0)$, т. е. интеграл $\int\limits_{\Gamma_0} f^*(t)\frac{dt}{t}$

[1] Как отмечается, например, в [21], этот результат был известен еще Сохоцкому, Морера и Харнаку.

существует. В силу (9) отсюда следует существование несобственного интеграла $\int\limits_{\Gamma}(f(t)-f(0))\frac{dt}{t}$. Ясно, что это рассуждение сохраняет силу и в общем случае. $\square$

Доказательство фрактальной версии теоремы Морера–Сохоцкого–Харнака можно теперь завершить, повторяя рассуждения из ([21], с. 59–66). Нужно лишь изменить соответствующим образом определение некасательных путей, используемых в этих рассуждениях. Здесь путь P из D^+ или из D^- к точке $t_0 \in \Gamma$ считается некасательным, если существует такая постоянная $c > 0$, что $|z-t| > c|z-t_0|$ для любого $z \in P$ и любого $t \in \Gamma$. Такие пути существуют для любой точки t_0 к.с.ф.к. Γ. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Если к.с.ф.к.* Γ *имеет верхнюю метрическую размерность* d *и* $f \in H_\nu(\Gamma)$, *то при выполнении условия* (3) *интеграл типа Коши* (6) *существует и представляет функцию, допускающую непрерывные продолжения на замыкания областей* D^+ *и* D^-. *В каждой точке* $z \in \Gamma$ *скачок этой функции равен значению* f *в точке* z.

Доказательство этого результата для интеграла, определяемого средствами нестандартного анализа, было анонсировано в [9]. Мы видим, что он сохраняет силу и для интеграла типа Коши, понимаемого в собственном смысле.

Сравнение теорем 3 и 4 с теоремами Дынькина и Морера–Сохоцкого–Харнака еще раз иллюстрирует то удивительное обстоятельство, что условия самоподобия и гладкости кривой приводят к результатам, которые в чем-то аналогичны друг другу.

Литература

1. Mandelbrot B.B. *The fractal geometry of nature.* – San Francisco: Freeman, 1982.
2. Федер Е. *Фракталы.* – М.: Мир, 1991. – 280 с.
3. Кац Б.А. *Задача о скачке и интеграл по неспрямляемой кривой* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 5. – С. 49–57.
4. Harrison J., Norton A. *Geometric integration on fractal curves in the plane* // Indiana Math. J. – 1991. – V. 40. – № 2. – P. 567–594.
5. Кац Б.А. *О краевой задаче Римана на фрактальной дуге* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 333. – № 4. – С. 432–433.
6. Кац Б.А. *Об одной версии краевой задачи Римана на фрактальной кривой* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 4. – С. 10–23.
7. Harrison J., Norton A. *The Gauss–Green theorem for fractal boundaries* //Duke Math. J. – 1992. – V. 67. – № 3. – P. 575–586.
8. Harrison J. *Stokes' theorem for nonsmooth chains* // Bull. of Amer. Math. Soc. – 1993. – V. 29. – № 2. – P. 235–242.
9. Объедков Т.Е. *Применение нестандартного анализа к теории интегрирования и решение задачи Римана о скачке* // В кн. "Алгебра и анализ", тез. докл. межд. конф., посв. 100-летию Н.Г. Чеботарева. Ч. II, Казань, 1994. – С. 96–97.
10. Кац Б.А. *Об интегрировании по неспрямляемой кривой* // Вопр. матем., механ. сплошн. сред и применения матем. методов в строительстве: МИСИ. – Москва, 1992. – С. 63–69.
11. Кац Б.А. *Интегрирование по плоской фрактальной кривой, задача о скачке и обобщенные меры* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 10. – С. 53–65.
12. Кац Б.А. *Интегрирование по фрактальной кривой и задача о скачке* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64. – № 4. – С. 549–557.
13. Кондурарь В. *Об интеграле Стильтьеса* // Матем. сб. – 1937. – Т. 2. – № 2. – С. 361–366.
14. Wiener N. *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients* // Massachusetts J. of Math. – 1924. – V. 3. – P. 72–94.
15. Young L.C. *An inequality of the Holder type, connected with Stieltjes integration* // Acta Math., Uppsala. – 1936. – Bd. 36. – № 3–4. – S. 251–282.

16. Young L.C. *General inequalities for Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series* // Math. Annalen, Berlin. – 1938. – Bd. 115. – H. 4. – S. 581–612.
17. Дьячков А.М. *О существовании интеграла Стильтьеса* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 350. – № 2. – С. 158–161.
18. Burkill J.C. *Differential properties of Young–Stieltjes integrals* // J. London Math. Soc. – 1948. – V. 23. – Part 1. – № 89. – P.22–28.
19. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* Т. 1. *Теория распределений и анализ Фурье.* – М.: Мир, 1986. – 462 с.
20. Кац Б.А. *Задача Римана на замкнутой жордановой кривой* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 68–80.
21. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Физматгиз, 1962. – 599 с.
22. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
23. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988. – 509 с.
24. Дынькин Е.М. *Гладкость интегралов типа Коши* // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1979. – Т. 92. – С. 115–133.

Казанская архитектурно-строительная академия

Поступила 24.12.1998