ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 4 (503)

УДК 517.546

В.В. КОЖЕВНИКОВ

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ПРЯМОГО ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе предлагается оригинальный подход к построению вариационного метода для однолистных функций, основанный на теореме В.Д. Ерохина о факторизации [1], согласно которой любое конформное отображение конечносвязной области можно представить в виде композиции конформных отображений односвязных областей. Первые попытки применить теорему о факторизации в вариационных методах принадлежат С.А. Гельферу [2]. Используя метод Г.М. Голузина [3], он получил однолистные вариации для многосвязной области путем редукции этой задачи к односвязной ситуации.

В данной работе однолистные вариации для произвольной односвязной области строятся по однолистным вариациям, определенным в окрестности ее границы. В результате удается построить весьма общую форму однолистных вариаций. Эта форма представляет собой только оболочку, в которую можно заключить конкретный класс вспомогательных однолистных вариаций, параметризованный тем или иным способом. Различные способы параметризации приводят к различным вариационным схемам. В частности, применение метода может строиться по схеме метода граничных или внутренних вариаций М. Шиффера [4], [5], а также вариационного метода Г.М. Голузина.

Особо следует упомянуть работу [6], в которой предложена модификация метода Г.М. Голузина и получены однолистные вариации, по форме тождественные вариациям (8) из данной работы, но способ получения вариаций и характер их использования существенно иные.

Приводимые в работе результаты ранее были опубликованы в [7], но без объяснений и практически без доказательств.

1. Исходным является

Определение. Однозначную функцию $v = v(w,\tau)$ комплексной переменной $w \in G$ и вещественной переменной τ, $0 < \tau < \tau^*$, условимся называть *однолистной вариацией*, определенной в области G, если

— при каждом значении τ функция $v(w,\tau)$ как функция переменной w однолистна в области G;

— на любом замкнутом подмножестве области G для функции $v = v(w,\tau)$ выполняется равномерная оценка

$$v(w,\tau) = w + o(1), \quad \tau \to 0+;$$

здесь $o(1)$ — функция переменных w, τ, которая на любом замкнутом подмножестве области G равномерно по переменной w стремится к нулю при $\tau \to 0+$.

Если, кроме того, вариация $v(w,\tau)$ при каждом значении τ как функция переменной w регулярна в области G, то будем называть ее однолистной и регулярной.

Теорема 1 ([7]). *Пусть* Γ — *невырожденный континуум, дополнение к которому состоит из односвязной области, и* $\nu = \nu(\omega, \tau)$, $0 < \tau < \tau^*$, — *однолистная вариация, регулярная в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}(\Gamma)$ *континуума* Γ.[1]

Тогда в дополнении к континууму Γ *существует однолистная вариация* $v(w, \tau)$, *для которой на любом замкнутом подмножестве* E *из дополнения к континууму* Γ *при достаточно малых значениях* τ *выполняется равномерная оценка*

$$v(w, \tau) = w + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\nu - \omega}{\omega - w} d\omega + o(\|\nu - \omega\|_\gamma).^{2} \tag{1}$$

Здесь γ — *простая замкнутая спрямляемая кривая, лежащая в окрестности* $\dot{U}(\Gamma)$, *разделяющая граничные компоненты этой окрестности и отделяющая множество* E *от континуума* Γ; *интегрирование вдоль кривой* γ *осуществляется в направлении, при котором континуум* Γ *остается слева; функция* $o(1)$, *входящая в остаточный член формулы* (1), *регулярна по переменной* w *в дополнении к континууму* Γ *и при* $\tau \to 0+$ *равномерно стремится к нулю на множестве* E.

Теорема 1 доказывается с помощью теоремы о факторизации. Она позволяет строить однолистные вариации в произвольной односвязной области по однолистным вариациям, определенным в окрестности ее границы.

2. При отыскании однолистных вариаций в окрестности границы данной односвязной области применяем вспомогательные однолистные вариации, которые строятся в форме конформных отображений колец.

Пусть $Q(\zeta)$ — функция, регулярная в кольце $D[\delta, 1) = \{\zeta : \delta \le |\zeta| < 1\}$, с неотрицательной реальной частью на окружности $|\zeta| = \delta$. Для любого малого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых значениях k, $0 < k < k^*$, функция [3], [6]

$$\lambda(\zeta, k) = \zeta \exp(kQ(\zeta)) \tag{2}$$

однолистна в кольце $D[\delta, 1-\varepsilon] = \{\zeta : \delta \le |\zeta| \le 1-\varepsilon\}$. Действительно, обозначив через M наибольшее значение модуля функции $Q(\zeta)$ в кольце $D[\delta, 1-\varepsilon]$, получим в этом кольце неравенство

$$e^{-k^* M} \le \left| \frac{\lambda(\zeta, k)}{\zeta} \right| \le e^{k^* M}. \tag{3}$$

Пусть ζ_1, ζ_2 — две произвольные различные точки кольца $D[\delta, 1-\varepsilon]$. Ввиду (3)

$$|\lambda(\zeta_2, k) - \lambda(\zeta_1, k)| = \left| (\zeta_2 - \zeta_1) \frac{\lambda(\zeta_2, k)}{\zeta_2} + \zeta_1 \left(\frac{\lambda(\zeta_2, k)}{\zeta_2} - \frac{\lambda(\zeta_1, k)}{\zeta_1} \right) \right| \ge$$
$$\ge e^{-k^* M} |\zeta_2 - \zeta_1| - e^{k^* M} \left| \exp(kQ(\zeta_2) - kQ(\zeta_1)) - 1 \right|.$$

Используя разложение экспоненты в ряд, легко получим

$$\left| \exp(kQ(\zeta_2) - kQ(\zeta_1)) - 1 \right| \le k^* \left| Q(\zeta_2) - Q(\zeta_1) \right| e^{2k^* M}.$$

Теперь воспользуемся равенством

$$Q(\zeta_2) - Q(\zeta_1) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d}{d\zeta} Q(\zeta)\, d\zeta,$$

[1]Под проколотой окрестностью континуума Γ понимаем любую, не содержащую бесконечности двусвязную область, одна из двух компонент дополнения к которой до всей плоскости совпадает с Γ. Проколотую окрестность в отличие от полной окрестности обозначаем точкой сверху.

[2]Под $\|\ldots\|_\gamma$ подразумевается норма какого-либо функционального пространства. Норму можно выбрать достаточно произвольно, но естественно использовать норму пространства $C(\gamma)$.

в котором интегрирование осуществляется вдоль дуги $\widehat{\zeta_1\zeta_2}$ окружности с центральным углом, не превосходящим π, целиком лежащей в замкнутом круговом кольце $D[r,R]$, где $r=\min(|\zeta_1|,|\zeta_2|)$ и $R=\max(|\zeta_1|,|\zeta_2|)$. Обозначим через M' максимальное значение модуля производной функции $Q(\zeta)$ в кольце $D[\delta,1-\varepsilon]$. На основании предыдущего равенства $|Q(\zeta_2)-Q(\zeta_1)|\le\pi M'|\zeta_2-\zeta_1|$. Сопоставляя полученные неравенства, приходим к оценке

$$|\lambda(\zeta_2,k)-\lambda(\zeta_1,k)|\ge(\mathrm{e}^{-k^*M}-k^*\pi M'\mathrm{e}^{3k^*M})|\zeta_2-\zeta_1|. \tag{4}$$

Выберем $k^*>0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство $k^*\mathrm{e}^{4k^*M}<\frac{1}{\pi M'}$, тогда вследствие неравенства (4) при $0<k<k^*$ функция $\lambda(\zeta,k)$ однолистна в кольце $D[\delta,1-\varepsilon]$.

В дальнейшем условие $0<k<k^*$ будем считать выполненным.

Перечислим некоторые свойства функции $\lambda(\zeta,k)$.

Прежде всего, поскольку реальная часть функции $Q(\zeta)$ на окружности $|\zeta|=\delta$ неотрицательна, функция $\lambda(\zeta,k)$ конформно отображает окружность $|\zeta|=\delta$ в некоторую замкнутую, аналитическую кривую Жордана, целиком расположенную в замкнутой области $|\zeta|\ge\delta$, причем ориентация кривой не изменяется, т. к. в силу регулярности на окружности $|\zeta|=\delta$ функции $Q(\zeta)$ приращение $\arg\lambda(\zeta,k)$ при полном обходе окружности $|\zeta|=\delta$ в положительном направлении составляет 2π. Из этого, в частности, следует, что значения функции $\lambda(\zeta,k)$, отвечающие точкам открытого кольца $D(\delta,1-\varepsilon)$, лежат вне круга $|\zeta|\le\delta$. Наконец, в кольце $D[\delta,1-\varepsilon]$ для функции $\lambda(\zeta,k)$ выполняется равномерная оценка

$$\lambda(\zeta,k)=\zeta+k\zeta Q(\zeta)+o(k),\quad k\to0, \tag{5}$$

причем для остаточного члена имеет место неравенство

$$|o(k)|\le\mathrm{e}^{kM}-1-kM. \tag{6}$$

Наиболее общий способ построения функции $Q(\zeta)$ получается с использованием интеграла Вилля, но такой способ оказывается неоправданно громоздким. В пункте 4 данной работы будет показано, что для построения функции $Q(\zeta)$ достаточно всего четырех элементарных функций, чтобы получить информацию об экстремальном континууме, которую может дать только вариационный метод первого порядка. Эти функции — функция поворота, степенная функция, функция Жуковского и, наконец, дробно-линейная функция.

3. Вариации (1) представляют собой общую форму[1] однолистных вариаций, которую можно использовать для построения однолистных вариаций частного вида, более приспособленных для решения экстремальных задач. Для построения специального класса однолистных вариаций в окрестности границы данной односвязной области используются вспомогательные вариации (2).

Приведем подробное доказательство теоремы из статьи [7].

Теорема 2. *Пусть Γ — невырожденный континуум, дополнение к которому состоит из односвязной области, и $\zeta(\xi)$ — конформное отображение некоторой проколотой окрестности $\dot U(\Gamma)$ континуума Γ на подходящее кольцо $D(\delta,1)$, при котором граничной компоненте окрестности $\dot U(\Gamma)$, принадлежащей континууму Γ, отвечает внутренняя граничная компонента кольца $D(\delta,1)$. Если в окрестности $\dot U(\Gamma)$*

$$p(\xi)=\frac{i\zeta(\xi)}{\zeta'(\xi)}Q(\zeta(\xi)), \tag{7}$$

где $Q(\zeta)$ — функция, регулярная в кольце $D[\delta,1)$, с неотрицательной реальной частью на окружности $|\zeta|=\delta$, то в дополнении к континууму Γ существует однолистная вариация

[1]С помощью формулы Коши произвольную вариацию $v(w,\tau)$, $0<\tau<\tau^*$, однолистную в дополнении к континууму Γ, можно с точностью до бесконечно малого сдвига представить в виде (1).

$v(w,\tau)$, для которой на любом замкнутом подмножестве E из дополнения к континууму Γ при достаточно малых значениях τ, $0 < \tau < \tau^*$, выполняется равномерная оценка

$$v(w,\tau) = w + \tau \int_\gamma \frac{p(\xi)}{\xi - w} d\xi + o(\tau). \tag{8}$$

Как и в теореме 1, γ — простая замкнутая спрямляемая кривая, лежащая в окрестности $\dot{U}(\Gamma)$, разделяющая граничные компоненты этой окрестности и отделяющая множество E от континуума Γ; интегрирование вдоль кривой γ осуществляется в направлении, при котором континуум Γ остается слева; функция $o(1)$, входящая в остаточный член формулы (8), регулярна по переменной w в дополнении к континууму Γ и при $\tau \to 0+$ равномерно стремится к нулю на множестве E.

Доказательство. Обозначим через $\xi(\zeta)$ функцию, обратную к функции $\zeta(\xi)$. По $Q(\zeta)$ из (7) с помощью формулы (2) построим функцию $\lambda(\zeta, k)$. При достаточно малых значениях k, $0 < k < k^*$, функция $\lambda(\zeta, k)$ однолистна в кольце $D(\delta, 1-\varepsilon)$ и для нее выполняется равномерная оценка (5). Величину ε с самого начала можно выбрать столь малой, чтобы кривая γ лежала в области $\xi(D(\delta, 1-\varepsilon))$.

При $0 < k < k^*$ композиция $\nu(\zeta) = \xi \circ \lambda(\zeta, k)$ регулярна и однолистна в кольце $D(\delta, 1-\varepsilon)$. Эту композицию можно рассматривать как результат действия на функцию $\xi = \xi(\zeta)$ вариации $\nu(\xi, k) = \xi \circ \lambda(\zeta(\xi), k)$, для которой на кривой γ при $k \to 0+$ выполняется равномерная оценка

$$\nu(\xi, k) = \xi + k\zeta\xi'(\zeta)Q(\zeta) + o(k). \tag{9}$$

Докажем оценку (9). Для этого внутри кольца $D(\delta, 1-\varepsilon)$ возьмем некоторое замкнутое, концентрическое с ним кольцо R, содержащее в своей внутренности кривую $\beta = \zeta(\gamma)$. Пусть d обозначает расстояние от кривой β до границы кольца R. Положим $\rho(\zeta, k) = \lambda(\zeta, k) - \zeta$. Вследствие (5), (6) для $\rho(\zeta, k)$ в кольце $D(\delta, 1-\varepsilon)$ выполняется оценка

$$|\rho(\zeta, k)| \le \mathrm{e}^{kM} - 1. \tag{10}$$

Будем считать, что $\mathrm{e}^{kM} - 1 < d$ при $0 < k < k^*$. Для фиксированной точки $\zeta \in \beta$ при $0 < k < k^*$ имеет место разложение в ряд Тейлора

$$\nu(\zeta) = \xi \circ \lambda(\zeta, k) = \xi(\zeta + \rho(\zeta, k)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{(n)}(\zeta)}{n!} \rho^n(\zeta, k). \tag{11}$$

Отсюда

$$\nu(\zeta) = \xi(\zeta) + k\zeta\xi'(\zeta)Q(\zeta) + r(\zeta, k), \tag{12}$$

где

$$r(\zeta, k) = \xi'(\zeta)o(k) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^{(n)}(\zeta)}{n!} \rho^n(\zeta, k),$$

$o(k)$ — остаточный член из формулы (5). Обозначим через M_1 максимум модуля функции $\xi(\zeta)$ в кольце R. При $\zeta \in \beta$ имеем оценку, не зависящую от ζ,

$$|\xi^{(n)}(\zeta)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{\xi(\zeta')}{(\zeta' - \zeta)^{n+1}} \, d\zeta' \right| \le \frac{2M_1 n!}{d^{n+1}}. \tag{13}$$

Следовательно, учитывая (6) и (10), при $0 < k < k^*$ и $\zeta \in \beta$ будем иметь неравенство

$$\|r(\zeta, k)\|_\gamma \le \frac{2M_1}{d^2} \left(\mathrm{e}^{kM} - 1 - kM + d \frac{(\frac{\mathrm{e}^{kM}-1}{d})^2}{1 - \frac{\mathrm{e}^{kM}-1}{d}} \right). \tag{14}$$

Правая часть неравенства при $k \to 0+$ является бесконечно малой величиной порядка k^2, не зависящей от ζ. Таким образом, остаточный член $r(\zeta, k)$ в формуле (12) является на кривой β

равномерно бесконечно малой величиной порядка $o(k)$ при $k \to 0+$. В формуле (12) положим $\zeta = \zeta(\xi)$. В результате получим оценку (9), равномерную на кривой γ.

Теперь уже нетрудно получить вариацию (8). Из формулы (9) выразим разность $\nu - \xi$ и подставим ее в подинтегральное выражение формулы (1). В итоге, если в первом вариационном члене положить $\tau = k/2\pi$ и учесть, что $\xi'(\zeta) = 1/\zeta'(\xi)$, получим формулу (8) с остаточным членом

$$r_1(w,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{r(\zeta,k)}{\xi - w}\, d\xi + o(\|\nu - \xi\|_\gamma), \tag{15}$$

где $o(\|\nu - \xi\|_\gamma)$ — остаточный член из формулы (1), а $\nu = \nu(\xi,k)$ — вариация (9). Поскольку $\nu(\xi,k) - \xi = \nu(\zeta) - \xi(\zeta)$, $\xi = \xi(\zeta)$, то на основании (11) и (13) при $\zeta \in \beta$ и $0 < k < k^*$ находим

$$\|\nu - \xi\|_\gamma \leq \frac{2M_1}{d}\frac{\frac{\mathrm{e}^{kM}-1}{d}}{1 - \frac{\mathrm{e}^{kM}-1}{d}}. \tag{16}$$

Пусть d_1 — расстояние между заданным замкнутым множеством E и кривой γ. Ввиду (15) при $w \in E$ и $\zeta \in \beta$ выполняется оценка

$$|r_1(w,\tau)| \leq \frac{\|r(\zeta,k)\|_\gamma L_\gamma}{2\pi d_1} + |o(1)|\|\nu - \xi\|_\gamma, \tag{17}$$

где L_γ — длина кривой γ, а $o(1)$ — равномерно бесконечно малая при $\tau \to 0+$ и $w \in E$ — величина, входящая в состав остаточного члена из формулы (1). Из оценок (14), (16), (17) следует, что остаточный член из формулы (8) при $\tau \to 0+$ и $w \in E$ также является равномерно бесконечно малой величиной. $\square$

Вариации вида (8) были получены ранее в [6],[1] но в более жестких предположениях относительно функции $Q(\zeta)$.

4. Исследование экстремальной ситуации с помощью вариаций (8) для большого числа задач приводит к вариационному условию, которое содержит

Лемма 1. *Пусть* Γ *— некоторый невырожденный континуум, принадлежащий* ξ*-плоскости, дополнение к которому состоит из односвязной области, и для любой функции* $p(\xi)$*, регулярной в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}(\Gamma)$ *континуума* Γ *и имеющей вид* (7)*, выполняется неравенство*[2]

$$\mathrm{Re}\int_\gamma S(\xi)p(\xi)d\xi \leq 0, \tag{18}$$

где γ *– произвольная замкнутая спрямляемая жорданова кривая, лежащая в окрестности* $\dot{U}(\Gamma)$ *и разделяющая граничные компоненты области* $\dot{U}(\Gamma)$*; интегрирование вдоль кривой* γ *осуществляется в направлении, при котором континуум* Γ *остается слева;* $S(\xi)$ *— функция, регулярная в окрестности* $\dot{U}(\Gamma)$ *континуума* Γ*;* $\xi(\zeta)$ *— функция, обратная для функции* $\zeta(\xi)$ *из теоремы* 2.

Тогда функция

$$D(\zeta) = S(\xi(\zeta))(i\zeta\xi'(\zeta))^2, \tag{19}$$

[1]В статье [7] отсутствует ссылка на названную работу [6], поскольку к моменту выхода статьи [7] автор данной работы не был знаком с работой [6]. Автор благодарит профессора В.В. Старкова за указание на эту работу.

[2]Условие (18) возникает в экстремальных задачах, в которых функционалы выражаются через контурные интегралы от аналитических функций.

регулярная в кольце $D(\delta,1)$, аналитически продолжается в кольцо $D(\delta^2,1)$ и на окружности $|\zeta|=\delta$ принимает вещественные неотрицательные значения.

Доказательство. Функция $\xi=\xi(\zeta)$ выполняет конформное отображение кольца $D(\delta,1)$ на область $\dot U(\Gamma)$ так, что граничной окружности $|\zeta|=\delta$ этого кольца отвечает граничная компонента области $\dot U(\Gamma)$, принадлежащая континууму Γ. В интеграле (18) с помощью подстановки $\xi=\xi(\zeta)$ перейдем к переменной ζ. В качестве контура интегрирования γ выберем образ окружности $|\zeta|=\rho$, $\delta<\rho<1$, при отображении $\xi=\xi(\zeta)$. Учитывая (7), условие (18) можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\int\limits_{|\zeta|=\rho} D(\zeta)Q(\zeta)d\theta\geq 0, \tag{20}$$

где $\theta=\arg\zeta$. В кольце $D(\delta,1)$ функцию $D(\zeta)$ можно разложить в ряд Лорана

$$D(\zeta)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_k\zeta^k. \tag{21}$$

Выберем функцию

$$Q(\zeta)=\mathrm{e}^{i\psi}\left(\zeta^n-\frac{\delta^{2n}\mathrm{e}^{-2i\psi}}{\zeta^n}\right),\quad n=1,2,\ldots, \tag{22}$$

где ψ — произвольный вещественный параметр. Реальная часть функции (22) обращается в тождественный нуль на окружности $|\zeta|=\delta$. Подставляя (21) и (22) в (20) и вычисляя интеграл, получим

$$\mathrm{Re}(c_{-n}\mathrm{e}^{i\psi}-c_n\delta^{2n}\mathrm{e}^{-i\psi})\geq 0,\quad n=1,2,\ldots,$$

причем это неравенство выполняется при любом значении ψ. Отсюда

$$c_{-n}=\delta^{2n}\overline{c}_n,\quad n=1,2,\ldots$$

Следовательно,

$$D(\zeta)=c_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(c_k\zeta^k+\delta^{2k}\overline{c}_k\zeta^{-k}).$$

Из полученной формы разложения для $D(\zeta)$ видно, что ряд Лорана для функции $D(\zeta)$ сходится в кольце $D(\delta^2,1)$ и $\mathrm{Im}\,D(\zeta)\equiv\mathrm{Im}\,c_0$ на окружности $|\zeta|=\delta$.

Легко показать, что $\mathrm{Im}\,c_0=0$. Для этого в неравенстве (20) достаточно положить $Q(\zeta)=\mathrm{e}^{i\psi}$, ψ — вещественный параметр, не зависящий от ζ, с областью изменения $[-\pi/2,+\pi/2]$, и проварьировать параметр ψ в границах его изменения. Таким образом, функция $D(\zeta)$ регулярна в кольце $D(\delta^2,1)$, а на окружности $|\zeta|=\delta$ имеет мнимую часть, равную нулю.

Остается показать, что на окружности $|\zeta|=\delta$ вещественная часть функции $D(\zeta)$ неотрицательна. С этой целью в качестве функции $Q(\zeta)$ рассмотрим ядро Шварца

$$Q(\zeta)=\frac{\zeta+z}{\zeta-z}, \tag{23}$$

где z — произвольная точка открытого круга радиуса δ с центром в начале, а ζ — переменная точка кольца $D(\delta,1)$. Легко проверяется, что функция (23) регулярна в кольце $D[\delta,1)$ и имеет положительную вещественную часть на окружности $|\zeta|=\delta$, поэтому на основании (20) интеграл Шварца

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=\rho}D(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\theta,\quad \delta\leq\rho<1, \tag{24}$$

представляющий собой функцию, регулярную в круге $|z| \le \delta$, имеет в этом круге неотрицательную вещественную часть
$$\operatorname{Re} f(z) \ge 0, \quad |z| \le \delta.$$
Так как на окружности $|z| = \delta$ мнимая часть функции $D(z)$ обращается тождественно в нуль, из формулы (24) следует равенство
$$D(z) = \operatorname{Re} f(z),$$
выполняющееся во всех точках окружности $|z| = \delta$. Отсюда на окружности $|z| = \delta$ получаем неравенство $D(z) \ge 0$. $\square$

Следствие. Нули функции $D(\zeta)$, расположенные на окружности $|\zeta| = \delta$, могут иметь только четный порядок, причем самих нулей может быть лишь конечное число.

5. Следующее утверждение двойственно основной лемме М. Шиффера [4] о граничных вариациях.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1, *когда функция* $S(\xi) \not\equiv 0$ *регулярна в полной окрестности континуума* Γ, *граница дополнения к континууму* Γ *до всей плоскости представляет собой кусочно-аналитическую кривую, составленную из конечного числа траекторий квадратичного дифференциала* $S(\xi)(d\xi)^2$ *или их дуг, с точками ветвления лишь в нулях функции* $S(\xi)$.

Доказательство. Вначале покажем, что каждый простой конец области $\dot{U}(\Gamma) = U(\Gamma) \setminus \Gamma$, принадлежащий континууму Γ, состоит ровно из одной точки. Предположим противное. Тогда существует по меньшей мере один простой конец $P \subset \Gamma$, представляющий собой невырожденный континуум и отвечающий некоторой точке ζ' граничной окружности $|\zeta| = \delta$ кольца $D(\delta, 1)$ при отображении $\xi = \xi(\zeta)$. Поскольку $S(\xi) \not\equiv 0$, с самого начала можно считать, что в полной окрестности $U(\Gamma)$ континуума Γ располагается лишь конечное число нулей этой функции.[1] Каждую точку, изображающую нуль функции $S(\xi)$, окружим столь малым открытым кружком с центром в соответствующей точке, чтобы кружки располагались внешним образом по отношению друг к другу и чтобы в дополнении к замыканию их объединения имелась непустая часть P' континуума P. Обозначим через T объединение названных кружков. Пусть p и p' — различные точки множества P'. Выберем две последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\xi'_n\}$ точек области $\dot{U}(\Gamma)$, сходящиеся соответственно к точкам p и p'. В кольце $D(\delta, 1)$ им соответствуют две последовательности $\{\zeta_n = \zeta(\xi_n)\}$ и $\{\zeta'_n = \zeta(\xi'_n)\}$, сходящиеся к точке ζ'. Удалив из последовательностей $\{\zeta_n\}$ и $\{\zeta'_n\}$ конечное число членов, можно добиться, чтобы среди элементов этих последовательностей не было точек множества $F = \zeta(\dot{U}(\Gamma) \bigcap T^*)$.[2]

Далее будет описан алгоритм построения некоторой последовательности гладких дуг, стягивающихся к точке ζ'.

Для каждого n соединим точки ζ_n и ζ'_n дугой λ_n окружности с центральным углом, не превосходящим π, целиком расположенной в замкнутом круговом кольце $D[r_n, R_n]$, где $r_n = \min(|\zeta_n|, |\zeta'_n|)$ и $R_n = \max(|\zeta_n|, |\zeta'_n|)$. При $n \to \infty$ дуги λ_n равномерно стягиваются к точке ζ'. Если в последовательности $\{\lambda_n\}$ существует подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$ дуг, не пересекающихся с множеством F, выбираем эту подпоследовательность и на этом останавливаемся, в противном случае строим новую последовательность дуг следующим образом. Возьмем дугу λ_n, имеющую непустое пересечение с множеством F, и будем двигаться по ней от точки ζ_n до тех пор, пока впервые не встретим точку $\zeta''_n \in F$. После этого заменим дугу λ_n ее частью λ'_n, расположенной между точками ζ_n и ζ''_n. В результате получим новую последовательность дуг $\{\lambda'_n\}$, стягивающуюся при $n \to \infty$ к точке ζ'. При $n \to \infty$ концы ζ''_n построенных дуг стремятся к ζ', поэтому все предельные точки последовательности $\{\xi''_n = \xi(\zeta''_n)\}$ принадлежат множеству

[1] Иначе окрестность можно уменьшить.

[2] T^* обозначает замыкание множества T.

$P\bigcap T^*$. Из последовательности $\{\xi''_n\}$ извлекаем подпоследовательность $\{\xi''_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $p'' \in P\bigcap T^*$. Очевидно, $p'' \neq p$, поскольку $p \notin T^*$. Теперь из последовательности $\{\lambda'_n\}$ отбираем дуги с концами в точках $\zeta''_{n_k} = \zeta(\xi''_{n_k})$. В результате получаем последовательность дуг $\{\lambda'_{n_k}\}$. На этом алгоритм построения дуг заканчивается.

В результате осуществления описанного алгоритма в любом случае приходим к некоторой последовательности дуг $\{\lambda_k\}$, раположенных в кольце $D(\delta, 1)$, равномерно стягивающихся к точке ζ' и обладающих следующими свойствами:

a) любая дуга λ_k представляет собой дугу окружности с центральным углом, не превышающим π;
b) дуги $l_k = \xi(\lambda_k)$ лежат в множестве $\dot{U}(\Gamma)\setminus T$, а их концы $\xi_{1,k}$ и $\xi_{2,k}$ стремятся к различным точкам p_1 и p_2 простого конца P.

Обозначим через d расстояние между точками p_1 и p_2. Очевидно, $d > 0$. При $k \to \infty$ дуги l_k равномерно приближаются к P. Положим $L = \bigcup\limits_k l_k$. Замыкание L^* множества L отделено от нулей функции $S(\xi)$, поэтому модуль функции $S(\xi)$ на множестве L^* имеет положительную нижнюю грань $m > 0$. Между тем, прообразы λ_k дуг l_k при отображении $\xi = \xi(\zeta)$, начиная с некоторого номера, принадлежат произвольно малой ε-окрестности точки ζ' и, следовательно, имеют диаметр, не превосходящий 2ε. Наконец, в соответствии с леммой 1 модуль функции $D(\zeta)$ в кольце $D[\delta, \delta+\varepsilon)$ ограничен сверху некоторой положительной постоянной M. В силу сказанного, а также ввиду соотношения (19), начиная с некоторого номера, на дугах λ_k должно выполняться неравенство

$$|\xi'(\zeta)| \leq \left(\frac{M}{\delta^2 m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны,

$$\xi_{2,k} - \xi_{1,k} = \int_{\lambda_k} \xi'(\zeta) d\zeta,$$

поэтому, начиная с некоторого номера, величина $|\xi_{2,k} - \xi_{1,k}|$ не превосходит $2\pi\varepsilon(M/\delta^2 m)^{1/2}$. При достаточно малом ε это меньше, чем $d/2$, что невозможно, т. к. точки $\xi_{1,k}$ и $\xi_{2,k}$ при $k \to \infty$ стремятся к p_1 и p_2 соответственно.

Итак, каждый простой конец границы области $\dot{U}(\Gamma)$, принадлежащий континууму Γ, состоит из одной граничной точки. Следовательно, граничная компонента Ω окрестности $\dot{U}(\Gamma)$, принадлежащая континууму Γ, состоит лишь из достижимых граничных точек. Это означает, что функцию $\xi(\zeta)$ можно по непрерывности продолжить на граничную окружность $|\zeta| = \delta$ кольца $D(\delta, 1)$, так что в итоге функция $\xi(\zeta)$ будет непрерывной в кольце $D[\delta, 1)$, а соответствие достижимых точек области $\dot{U}(\Gamma)$, составляющих множество Ω, и точек окружности $|\zeta| = \delta$ будет взаимно однозначным. Прообразы лежащих на Ω нулей функции $S(\xi)$ при отображении $\xi = \xi(\zeta)$ на окружности $|\zeta| = \delta$ образуют замкнутое множество, дополнение к которому состоит из не более чем счетного числа открытых дуг. Выберем любую из них. Пусть это будет дуга $\theta' < \theta < \theta''$.

Покажем, что на выбранной дуге функция $\xi(\zeta)$ имеет непрерывную производную по переменной $\theta = \arg\zeta$. С этой целью внутри интервала (θ', θ'') выберем произвольный отрезок $[\theta_0, \theta_1]$. Ограничимся значениями ρ, $\delta < \rho < \rho^*$, столь близкими к δ, что на окружности $|\zeta| = \rho$ нет нулей функции $S(\xi(\zeta))$. На дуге $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ окружности $|\zeta| = \rho$ для соответствующим образом подобранной ветви квадратного корня равенство (19) можно переписать в виде

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \left(\frac{D(\zeta)}{S(\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

откуда интегрованием получим равенство

$$\xi(\zeta)-\xi(\zeta_0)=\int_{\theta_0}^{\theta}\left(\frac{D(\zeta)}{S(\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}d\arg\zeta,$$

выполняющееся на дуге $\theta_0\le\theta\le\theta_1$ окружности $|\zeta|=\rho$. Путем предельного перехода при $\rho\to\delta+0$ убеждаемся, что последнее равенство справедливо и на дуге $\theta_0\le\theta\le\theta_1$ окружности $|\zeta|=\delta$. Поскольку подинтегральное выражение непрерывно зависит от $\arg\zeta$, функция $\xi(\zeta)$ действительно непрерывно дифференцируема по $\theta=\arg\zeta$ внутри дуги $[\theta_0,\theta_1]$ окружности $|\zeta|=\delta$. Так как промежуток $[\theta_0,\theta_1]$ был произвольно выбран внутри интервала (θ',θ''), то действительно функция $\xi(\zeta)$ имеет непрерывную производную по $\theta=\arg\zeta$ на дуге $\theta'<\theta<\theta''$ окружности $|\zeta|=\delta$.

Итак, функция $\xi(\zeta)$ непрерывно дифференцируема внутри любой дуги окружности $|\zeta|=\delta$ с концами в соседних прообразах нулей функции $S(\xi)$. Это означает, что любой участок такой дуги, на котором нет нулей $D(\zeta)$, функция $\xi=\xi(\zeta)$ отображает в кривую класса C^1. Заметим, что равенство (19) можно переписать в виде $S(\xi)(d\xi)^2=D(\zeta)(d\theta)^2$, где $|\zeta|=\delta$ и $\theta=\arg\zeta$. Следовательно, гладкие дуги, входящие в состав Ω, служат частями траекторий квадратичного дифференциала $S(\xi)(d\xi)^2$, поэтому функция $\xi(\zeta)$ является аналитической в любой внутренней точке ζ_0 произвольной дуги окружности $|\zeta|=\delta$ с концами в соседних прообразах нулей функции $S(\xi)$. Действительно, в силу леммы 1 функция

$$\varkappa(\zeta)=-i\int_{\zeta_0}^{\zeta}D^{\frac{1}{2}}(\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}$$

регулярна в точке ζ_0. Утверждение об аналитичности $\xi(\zeta)$ в окрестности точки ζ_0 вытекает из представления $\xi(\zeta)=\mu^{-1}\circ\varkappa(\zeta)$,[1] где

$$\mu(\xi)=\int_{\xi_0}^{\xi}S^{\frac{1}{2}}(\xi)d\xi,\quad \xi_0=\xi(\zeta_0),$$

— функция, регулярная и однолистная в малой окрестности точки ξ_0, а μ^{-1} — функция, обратная к $\mu(\xi)$.

Если $D(\zeta_0)\ne 0$, то в силу (25) $\xi(\zeta)$ однолистна в некоторой окрестности точки ζ_0, и монотонному движению точки ζ вдоль окружности $|\zeta|=\delta$, происходящему в пределах малой окрестности точки ζ_0, отвечает монотонное движение точки $\xi=\xi(\zeta)$ вдоль траектории квадратичного дифференциала $S(\xi)(d\xi)^2$. Если $D(\zeta_0)=0$, то в некоторой окрестности точки ζ_0 функция $D(\zeta)$ не будет иметь других нулей. Ввиду следствия из леммы 1, равенства (25), а также однолистности функции $\xi(\zeta)$ в кольце $D(\delta,1)$ точка ζ_0 может быть лишь нулем второго порядка для $D(\zeta)$. Монотонному движению точки ζ по дуге окружности $|\zeta|=\delta$, происходящему *до* и *после* точки ζ_0 в пределах малой окрестности точки ζ_0, в этом случае также отвечает монотонное движение точки $\xi=\xi(\zeta)$ вдоль траектории квадратичного дифференциала $S(\xi)(d\xi)^2$, но при переходе точки ζ через ζ_0 направление движения точки $\xi=\xi(\zeta)$ вдоль траектории изменяется на противоположное. Следовательно, нули функции $D(\zeta)$, расположенные на окружности $|\zeta|=\delta$ и отличные от прообразов нулей $S(\xi)$, имеют второй порядок и соответствуют концевым точкам аналитических дуг континуума Ω.

Вновь рассмотрим произвольную дугу (θ',θ'') окружности $|\zeta|=\delta$ с концами в соседних прообразах нулей функции $S(\xi)$. Монотонному движению точки ζ по дуге (θ',θ'') будет соответствовать монотонное движение ее образа $\xi=\xi(\zeta)$ по траектории квадратичного дифференциала $S(\xi)(d\xi)^2$, если только при своем движении точка ζ не будет встречать нулей функции $D(\zeta)$. При прохождении точки ζ через нуль функции $D(\zeta)$, расположенный на дуге (θ',θ''), движение

[1]Это представление является следствием равенства (25).

точки ξ будет продолжаться по той же траектории, но в противоположном направлении. По этой причине между соседними прообразами нулей функции $S(\xi)$ может располагаться не более одного нуля функции $D(\zeta)$.[1] Следовательно, дуга (θ', θ'') окружности $|\zeta| = \delta$ при отображении $\xi = \xi(\zeta)$ переводится либо в траекторию дифференциала $S(\xi)(d\xi)^2$, имеющую концы в нулях функции $S(\xi)$, либо в дугу траектории дифференциала $S(\xi)(d\xi)^2$, исходящую из нуля функции $S(\xi)$. Таких дуг может существовать только конечное число. Каждая такая дуга соответствует одной открытой дуге окружности $|\zeta| = \delta$ с концами в соседних прообразах нулей функции $S(\xi)$. Поэтому дополнение ко множеству прообразов нулей функции $S(\xi)$ на окружности $|\zeta| = \delta$ состоит из конечного числа открытых дуг. Так как $\xi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$, число прообразов нулей функции $S(\xi)$, расположенных на окружности $|\zeta| = \delta$, также конечно. В противном случае на окружности $|\zeta| = \delta$ существовала бы целая дуга, целиком отображающаяся в какой-либо нуль функции $S(\xi)$. $\square$

В заключение хочу высказать глубокую признательность профессору Л.А. Аксентьеву за доверие и поддержку, а также поблагодарить рецензента, указавшего на ошибку в первоначальной редакции доказательства леммы 2.

Литература

1. Ерохин В.Д. *О конформных преобразованиях колец и об основном базисе пространства функций, аналитических в элементарной окрестности континуума* // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120. – № 4. – С. 689–696.
2. Гельфер С.А. *О распространении вариационного метода Голузина–Шиффера на многосвязные области* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 142. – № 3. – С. 503–506.
3. Голузин Г.М. *Метод вариаций в конформном отображении.* I // Матем. сб. – 1946. – Т. 19. – № 2. – С. 203–236.
4. Schiffer M. *A method of variation within the family of simple functions* // Proc. London Math. Soc. – 1938. – V. 44. – P. 432–449.
5. Schiffer M. *Variation of the Green function and the theory of p-valued functions* // Amer. J. Math. – 1943. – V. 65. – P. 341–360.
6. Бабенко К.И. *К теории экстремальных задач для однолистных функций класса S* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – М.: Наука. – 1972. – Т. 101. – 320 с.
7. Кожевников В.В. *Факторизация конформных отображений и вариации однолистных функций* // Докл. РАН. – 2000. – Т. 375. – № 3. – С. 305–306.

Кубанский государственный университет

Поступили
первый вариант 21.03.2002
окончательный вариант 31.03.2003

[1] Может случиться, что на Ω совсем нет нулей функции $S(\xi)$, и тогда либо на окружности $|\zeta| = \delta$ вовсе нет нулей $D(\zeta)$, и кривая Ω представляет собой замкнутую траекторию дифференциала $S(\xi)(d\xi)^2$, либо на окружности $|\zeta| = \delta$ имеется ровно два нуля второго порядка функции $D(\zeta)$, и тогда кривая Ω является разомкнутой дугой траектории дифференциала $S(\xi)(d\xi)^2$. Впрочем, если Ω представляет собой замкнутую траекторию, то $S(\xi) \equiv 0$.