ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 4 (503)

УДК 517.519

Л.А. АПАЙЧЕВА

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ЯДРАМИ ГИЛЬБЕРТА

При решении сингулярных интегральных уравнений и краевых задач теории аналитических функций приходится вычислять сингулярные интегралы (см., напр., [1]–[5]). В данной работе, являющейся естественным продолжением [6], предлагается эффективный способ оценки погрешности квадратурных формул (к. ф.) и кубатурных формул (кб. ф.) для сингулярного интеграла (с. и.) с ядром Гильберта, полученных с помощью дискретных аналогов сумм Фурье, Бернштейна–Рогозинского, а также интерполяционных к. ф. для с. и. в классе функций $H_k[\varphi]$; доказывается оптимальность по порядку точности этих к. ф. и кб. ф. в ряде классов функций.

1. Постановка задачи

Рассмотрим с. и. с ядром Гильберта

$$Jx = J(x;s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma, \tag{1}$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши.

Введем классы функций, на которых будем исследовать к. ф. для с. и. (1). Пусть $H_k[\varphi]$, $k = 1, 2, \dots,$ — класс непрерывных 2π-периодических функций, для которых конечная разность k-го порядка $\Delta_h^k x(t)$ с шагом h удовлетворяет неравенству

$$\sup_{|h|\le\delta} \|\Delta_h^k x(t)\|_C = \omega_k(x;\delta) \le \varphi(\delta), \quad 0 < \delta \le \pi,$$

где $\varphi(\delta)$ — функция сравнения k-го порядка; в случае $\varphi(\delta) = M\delta^\alpha$, $0 < \alpha \le k$, где M — некоторая положительная постоянная, вместо $H_k[\varphi]$ будем писать $H_{k,\alpha}(M)$; $W^rH_k[\varphi]$ $(W^0H_k[\varphi] = H_k[\varphi])$, k — некоторое натуральное число, $r \ge 0$ целое, — класс функций $x(t) \in C_{2\pi}$, имеющих абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно, у которых r-я производная принадлежит классу $H_k[\varphi]$; $Z^\alpha(M)$, $0 < \alpha \le 2$ $(Z^1(M) = Z(M))$, — класс функций Зигмунда из $C_{2\pi}$, модуль гладкости $\omega_2(x;\delta)$, $\delta > 0$, которых удовлетворяет неравенству $\omega_2(x;\delta) \le M\delta^\alpha$, $0 < \alpha \le 2$, $M = \mathrm{const}$; $W^rH^\omega(W^0H^\omega = H^\omega)$ — класс r раз дифференцируемых 2π-периодических функций, r-е производные которых удовлетворяют неравенству $\omega(x^{(r)};\delta) \le \omega(\delta)$, где r — целое неотрицательное число, $\omega(\varphi;\delta)$ — модуль непрерывности функции $\varphi \in C_{2\pi}$ с шагом $\delta > 0$, а $\omega(\delta)$ — данный модуль непрерывности; в частном случае при $\omega(\delta) \le M\delta^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, имеем класс $W^rH^\alpha(M)$, $r = 0, 1, \dots$

2. Применение дискретного аналога частных сумм Фурье

Для произвольных чисел $N = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, \dots$, $r = 0, 1 \dots$ и равноотстоящих узлов

$$s_k = s_k^{(N)} = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = \overline{1, N}, \quad N = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

в ([4], гл. III) для с. и. (1) предложена и исследована общая к. ф.

$$J(x;s) \approx J_{n,N,r}(x;s) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{m,r}^{(n)}(-a_{m,N}\sin ms + b_{m,N}\cos ms), \tag{3}$$

где

$$a_{m,N} = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} x(s_j)\cos ms_j, \quad b_{m,N} = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} x(s_j)\sin ms_j, \quad m = \overline{1,n}, \tag{4}$$

а $\lambda_{m,r}^{(n)}$, $m = \overline{1,n}$, $\lambda_{0,r}^{(n)} = 1$, $n = 1,2,\ldots$, $r = 0,1,\ldots$, — некоторая треугольная матрица чисел.

В (3) положим $\lambda_{m,r}^{(n)} = 1$, $m = \overline{1,n}$, $r = 0,1,\ldots$ Тогда из (2)–(4) получаем удобную в приложениях к. ф. для с.и. (1)

$$J(x;s) \approx J_{n,N}(x;s) = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{D}_n(s_j - s)x(s_j); \tag{5}$$

здесь и далее $D_n(\varphi)$ и $\overline{D}_n(\varphi)$ — данное и соответствующее сопряженное ядра Дирихле порядка n, $[\alpha]$ — целая часть числа α. Параметры N и n связаны в этой формуле лишь соотношением $N \geq 2n-1$.

Теорема 1. *Пусть $x(s) \in W^r H_k[\varphi]$, $r \geq 0$, где $\varphi = \varphi(\delta)$ удовлетворяет условию: найдется $c > 1$ такое, что*

$$1 < \varliminf_{\delta\to+0} \frac{\varphi(c\delta)}{\varphi(\delta)} \leq \varlimsup_{\delta\to+0} \frac{\varphi(c\delta)}{\varphi(\delta)} < c^k. \tag{6}$$

Тогда при любых $N \geq 2n-1$ для погрешности к. ф. (5) справедлива оценка

$$\|Jx - J_{n,N}x\|_C \leq c_1 \frac{\ln n}{n^r}\,\varphi\Big(\frac{1}{n}\Big) + c_2 \frac{\ln n}{(N-n-1)^r}\,\varphi\Big(\frac{1}{N-n-1}\Big). \tag{7}$$

Здесь и далее c_i, $i = 1,2,\ldots$, — вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от n и N.

Доказательство. Погрешность к. ф. (5) представим следующим образом:

$$\|R_{n,N}x\|_C \leq \|Jx - JS_n x\|_C + \|JS_n x - J_{n,N}x\|_C, \tag{8}$$

где

$$R_{n,N}x = Jx - J_{n,N}x,$$
$$J_{n,N}x \equiv \sum_{k=1}^{n} -a_{k,N}\sin ks + b_{k,N}\cos kx,$$

коэффициенты $a_{k,N}$, $b_{k,N}$, $k = \overline{1,n}$, определены формулами (4), а $S_n x = S_n(x;s)$ есть n-й отрезок ряда Фурье функции $x(s)$.

Оценим первое слагаемое из (8). Через $\overline{x}$ обозначим функцию, тригонометрически сопряженную с x. Поскольку

$$Jx - JS_n x = \overline{x} - S_n\overline{x},$$

то для первого слагаемого из неравенства (8) имеем оценку

$$\|Jx - JS_n x\|_C \leq (4 + \frac{4}{\pi^2}\ln n)E_n(\overline{x}), \tag{9}$$

где $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f \in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

Пусть $x(s) \in W^r H_k[\varphi]$, $r \geq 0$, тогда [7], [8]

$$E_n(x) \leq \frac{2K_r c_3(k)}{n^r}\,\omega_k\left(x^{(r)};\,\frac{1}{n}\right) \leq \frac{2K_r c_3(k)}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{10}$$

где $c_3(k)$ — вполне определенная постоянная, зависящая только от k, а

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}} \tag{11}$$

— константа Фавара.

Если $x(s) \in W^r H_k[\varphi]$, $r \geq 0$, где $\varphi = \varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (6), то в силу результатов из [9], [10] сопряженная функция $\overline{x}(s)$ удовлетворяет условию $\overline{x}(s) \in W^r H_k[\overline{\varphi}]$, $\overline{\varphi}(\delta) = M_1\varphi(\delta)$, $0 < \delta \leq \pi$, $M_1 = \mathrm{const}$. Случай $k = 2$, $\varphi(\delta) = M\delta$ представляет результат из [11]. Тогда из неравенств (9), (10) получаем

$$\|Jx - JS_n x\| \leq c_4\left(4 + \frac{4}{\pi^2}\ln n\right)\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^r}. \tag{12}$$

Оценим второе слагаемое из (8). Поскольку

$$JS_n x \equiv \sum_{k=1}^{n} b_k\cos ks - a_k\sin ks, \tag{13}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin kt\,dt, \quad k = \overline{1,n}, \tag{14}$$

— коэффициенты Фурье функции $x(t)$, то из (13) и (5) находим

$$JS_n x - J_{n,N}x = \sum_{k=1}^{n} -(a_k - a_{k,N})\sin ks + (b_k - b_{k,N})\cos ks. \tag{15}$$

Пусть $T_{N-n-1}(s)$ — тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения порядка не выше $N-n-1$ функции $x(s)$. Тогда, учитывая, что $a_{k,N}$, $b_{k,N}$, $k = \overline{1,n}$, являются квадратурными суммами прямоугольников по узлам (2) для интегралов (14), точными для тригонометрических полиномов степени не выше $N-1$, из (15), (14) и (4) получаем

$$|JS_n x - J_{n,N}x| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{1}{\pi}\sin ks\int_0^{2\pi}\cos kt[x(t) - T_{N-n-1}(t)]dt + \frac{1}{\pi}\cos kx\int_0^{2\pi}\sin kt[x(t) - T_{N-n-1}(t)]dt\right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{N}\sin ks\sum_{j=1}^{N}[x(s_j) - T_{N-n-1}(s_j)]\cos ks_j + \frac{2}{N}\cos ks\sum_{j=1}^{N}[T_{N-n-1}(s_j) - x(s_j)]\sin ks_j\right\}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\overline{D}_n(t-s)[x(t) - T_{N-n-1}(t)]dt\right| + \left|\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\overline{D}_n(s_j - s)[T_{N-n-1}(s_j) - x(s_j)]\right| \leq$$

$$\leq E_{N-n-1}(x)\left\{\max_s\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\overline{D}_n(s-t)|dt\right) + \max_s\left(\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}|\overline{D}_n(s_j - s)|\right)\right\}, \tag{16}$$

где $\overline{D}_n(\varphi) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\varphi$.

Известно [12], что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{D}_n(\varphi)|\,d\varphi \le 2(1+\ln n). \tag{17}$$

Кроме того, с помощью результата ([13], с. 242) и оценки (17) при $N \ge 2n-1$ находим

$$\max_s \left(\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} |\overline{D}_n(s-s_j)|\right) \le 2(2+\pi)(1+\ln n). \tag{18}$$

Тогда из неравенств (16)–(18) при любых $N \ge 2n-1$ получаем

$$\|JS_n x - J_{n,N}x\|_C \le 2(1+\ln n)(3+\pi)E_{N-n-1}(x). \tag{19}$$

Так как $x(t) \in W^r H_k[\varphi]$, $r = 0, 1, \ldots$, и $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (6), то из неравенств (8), (12), (19), (10) следует оценка (7). $\square$

Далее символ $\asymp$ означает слабую эквивалентность.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при $n \asymp N$ для погрешности к. ф. (5) справедлива оценка

$$\|R_{n,N}x\|_C = O\left(\frac{\ln N}{N^r}\,\varphi\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Теорема 2. *Пусть $x(s) \in W^r H^\omega$, $r = 0, 1, \ldots$, где при $r = 0$ выполняется дополнительное условие*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty. \tag{20}$$

Тогда при любых $N \ge 2n-1$ справедливы неравенства

$$\sup_{x\in W^r H^\omega} \|R_{n,N}x\|_C \le \frac{2\ln n}{\pi^2 n^r}\int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t\,dt + \\ + \frac{K_r(3+\pi)(1+\ln n)}{(N-n)^r}\omega\left(\frac{1}{N-n}\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

$$\sup_{x\in H^\omega} \|R_{n,N}x\|_C \le c_4\left\{\int_0^{1/n} \frac{\omega(x;t)}{t}\,dt + \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right\} + K_r(3+\pi)(1+\ln n)\omega\left(\frac{1}{N-n}\right), \tag{22}$$

где K_r — константа Фавара (11).

Доказательство. Докажем оценку (21). Используем неравенство (8). Обозначим через $\overline{W^r}H^\omega$ ($r \ge 1$ целое) класс функций, сопряженных с функциями класса $W^r H^\omega$. Поскольку

$$\sup_{x\in W^r H^\omega} \|Jx - JS_n x\|_C = \sup_{x\in \overline{W^r}H^\omega} \|x - S_n x\|_C,$$

то оценка первого слагаемого из (8) вытекает из ([14], с. 145); второе слагаемое оцениваем с помощью неравенства (19) и известной оценки (напр., [15])

$$\sup_{x\in W^r H^\omega} E_n(x) \le \frac{K_r}{2(n+1)^r}\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right), \quad r = 0, 1, \ldots \tag{23}$$

Теперь докажем оценку (22). С этой целью оценим первое слагаемое из (8) следующим образом:

$$\|Jx - JS_n x\|_C \le \|J(x - T_n x)\|_C + \|JS_n\|_{C\to C}\|x - T_n x\|_C, \tag{24}$$

где

$$\|JS_n\|_{C\to C} = \max_s \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{D}_n(t-s)|\,dt\right),$$

а $T_n x$ — полином наилучшего равномерного приближения порядка не выше n функции $x \in C_{2\pi}$; оценка для первого слагаемого из этого неравенства имеется в ([14], с. 113). Поэтому, используя (8), (19), (24) и (23), получаем оценку (22). $\square$

Из оценки (21) при $\omega(\delta) = M\delta^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, вытекает

Следствие 2. Пусть $x(s) \in W^r H^\alpha(M)$, $0 < \alpha \le 1$, $r = 1, 2, \ldots$ Тогда при $N \ge 2n-1$ имеет место оценка

$$\sup_{x\in W^r H^\alpha(M)} \|R_{n,N}x\|_C \le \frac{M2^{1+\alpha}}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \ln n \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt + \frac{MK_r\pi^\alpha(3+\pi)(1+\ln n)}{(N-n)^{r+\alpha}} + O\Big(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\Big).$$

В частности, при $\alpha = 1$

$$\sup_{x\in W^r H^1(M)} \|R_{n,N}x\|_C \le \frac{4M\ln n}{\pi^2 n^{r+1}} + \frac{MK_r\pi(3+\pi)(1+\ln n)}{(N-n)^{r+1}} + O\Big(\frac{1}{n^{r+1}}\Big).$$

3. Применение дискретного аналога сумм Бернштейна–Рогозинского

В этом пункте предлагаются оценки погрешности в классе $H_2[\varphi]$ еще одного варианта к. ф. (3), (4).

Возьмем произвольные числа $N = 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, \ldots$, и положим в формуле (3) $\lambda_{m,r}^{(n)} = \cos m\delta$ ($m = \overline{1,n}$; $r = 0, 1, \ldots$), где $\delta = \frac{\pi}{2n+1}$ или $\delta = \frac{\pi}{2n}$. Тогда получаем к. ф. для с.и. (1)

$$J(x;s) \approx J_{n,N}(x;s) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N x(s_j)[\overline{D}_n(s_j - s - \delta) + \overline{D}_n(s_j - s + \delta)], \tag{25}$$

основанную на аппроксимации плотности $x(\sigma)$ дискретным аналогом сумм Бернштейна–Рогозинского порядка n. Числа n и N в этой формуле, как и в п. 1, связаны лишь соотношением $2n \le N+1$, а узлы s_j, $j = \overline{1,N}$, определены в (2). Частные случаи к. ф. (25) были исследованы в [16].

Теорема 3. *Пусть $x(s) \in H_2[\varphi]$, где $\varphi = \varphi(\delta)$ — модуль гладкости, удовлетворяющий условию*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}\,dt < \infty.$$

Тогда при любых n таких, что $2n \le N+1$, для погрешности к. ф. (25) справедлива оценка

$$\|Jx - J_{n,N}x\|_C \le c_5\Big\{\int_0^{1/n} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \varphi\Big(\frac{1}{n}\Big)\ln n + \varphi\Big(\frac{1}{N-n-1}\Big)\ln n\Big\}.$$

В частности, если $x(s) \in Z^\alpha(M)$, то при $N \ge 2n-1$ таких, что $n \asymp N$, к. ф. (25) равномерно сходится со скоростью

$$\sup_{x\in Z^\alpha(M)} \|Jx - J_{n,N}x\|_C = O\Big(\frac{\ln N}{N^\alpha}\Big), \quad 0 < \alpha \le 2.$$

Доказательство проводим по схеме, аналогичной предложенной в теореме 1. Погрешность к. ф. (25) представляем в виде

$$\|Jx - J_{n,N}x\| \le \|Jx - JB_n x\| + \|JB_n x - JB_{n,N}x\|, \tag{26}$$

где

$$JB_n x = \sum_{k=1}^{n} \cos k\delta(b_k \cos ks - a_k \sin ks),$$

$$JB_{n,N} x \equiv J_{n,N} x = \sum_{k=1}^{n} \cos k\delta(b_{k,N} \cos ks - a_{k,N} \sin ks),$$

а $B_n x = B_n(x;s)$ — сумма Бернштейна–Рогозинского порядка n, $B_{n,N} x = B_{n,N}(x;s)$ — дискретный аналог сумм Бернштейна–Рогозинского, коэффициенты a_k, b_k и $a_{k,N}$, $b_{k,N}$, $k = \overline{1,n}$, определены формулами (14) и (4) соответственно, $\delta = \frac{\pi}{2n+1}$ или $\delta = \frac{\pi}{2n}$.

Далее, для оценки правой части неравенства (26) используются результаты работ ([4], гл.III; [7]; [17]; [18]) и

Лемма 1 ([19]). *Пусть $x(s) \in C_{2\pi}$ и выполняется условие*

$$\int_0^1 \frac{\omega_k(x;t)}{t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}\,dt < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0;\pi]$ имеет место оценка

$$\|Jx\|_C \leq c_7(k)\biggl(\int_0^{\varepsilon} \frac{\omega_k(x;t)}{t}dt + \|x\|_C \ln\frac{\pi}{\varepsilon}\biggr), \tag{27}$$

где $c_7(k)$ — постоянная, зависящая только от k, $\varphi(t)$ — функция сравнения k-го порядка.

Следствие 3. Пусть $x(s) \in H^{\omega}$, где

$$\int_0^{1/N} \frac{\omega(t)}{t}\,dt \leq c_6\omega\Bigl(\frac{1}{N}\Bigr)\ln N \quad (N \geq 2). \tag{28}$$

Тогда при $N \geq 2n-1$ таких, что $n \asymp N$, для погрешности к. ф. (25) имеет место оценка

$$\sup_{x\in H^{\omega}} \|Jx - J_{n,N}x\|_C = O\Bigl(\omega\Bigl(\frac{1}{N}\Bigr)\ln N\Bigr).$$

4. Об интерполяционных квадратурных формулах для сингулярных интегралов

В ряде работ (напр., [3], гл. I; [4], гл. III) подробно исследованы, в частности, следующие интерполяционные к. ф. для с.и. (1):

$$J(x;s) \approx J_N(x;s) = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} x(s_j)\frac{\sin(n+1)\frac{s_j-s}{2}\sin n\frac{s_j-s}{2}}{\sin\frac{s_j-s}{2}}, \quad N = 2n+1, \tag{29}$$

$$J(x;s) \approx J_N(x;s) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} x(s_j)\sin^2 n\frac{s_j-s}{2}\operatorname{ctg}\frac{s_j-s}{2}, \qquad N = 2n, \tag{30}$$

где узлы s_j, $j = \overline{1,N}$, определены в (2).

Результаты Б.Г. Габдулхаева по интерполяционным к. ф. для с. и. продолжены в работах [19] и [20], в которых исследована сходимость к. ф. (29), (30) в классе функций $W^r H_k[\varphi]$, $r = 0, 1, \ldots$ В этом пункте аналогичная задача решается более простым способом с более сильными результатами. Оценки погрешности интерполяционных к. ф. (29), (30) будут получены непосредственно из следующего результата.

Лемма 2 ([4], гл. III). *Для любой плотности $x(s) \in C_{2\pi}$, удовлетворяющей условию (20), интерполяционный квадратурный процесс (29), (30) равномерно сходится при неограниченном возрастании числа N узлов интерполяции. При этом для любых $n = [N/2]$, $N = 2, 3, \ldots$, справедливы оценки*

$$\|R_N x\|_C \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{8}{\pi} + \frac{4}{\pi} \ln \frac{2N}{\pi} + \frac{2}{\pi}(2j-1)\ln 2 + \alpha_j \right\} E_{2^{j-1}n-1}(x)_C, \tag{31}$$

$$\|R_N x\|_C \leq \left(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2N}{\pi} + \frac{N-2n}{n} \right) \max_{1 \leq j \leq N} |x(s_j) - Q_m(s_j)| + \|J(x - Q_m x)\|, \tag{32}$$

где

$$\alpha_j = \alpha_j(N) = \{0 \quad \textit{при} \quad N = 2n; \quad 3/2^j n \quad \textit{при} \quad N = 2n+1, \quad n = [N/2]\},$$

а Q_m — произвольный тригонометрический полином порядка не выше $m = [(N-1)/2]$.

Теорема 4. *Если $x(s) \in W^r H_k[\varphi]$, где при целом $r \geq 1$ $\varphi = \varphi(\delta)$ — произвольная функция сравнения k-го порядка, а при $r = 0$ удовлетворяет условию (28), $\omega = \varphi$, то для погрешности интерполяционных к. ф. (29), (30) справедливы оценки*

$$\|R_N x\|_C \leq \frac{2K_r c_3(k)}{n^r} H_k[x^{(r)}; \varphi] \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \left\{ \frac{2^r}{2^r - 1} \left(\frac{4}{\pi} \ln \frac{2N}{\pi} + \frac{8}{\pi} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2(1 + 2^{-r}) \ln 2}{\pi (1 - 2^{-r})^2} + \beta_r \right\}, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

$$\|R_N x\|_C \leq c_8(k) H_k[x; \varphi] \left\{ \left(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2N}{\pi} + \frac{N-2n}{n} \right) \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \right.$$
$$\left. + 2^k \int_0^{1/N} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \ln N \right\}, \quad r = 0, \tag{34}$$

где

$$\beta_r = \{0 \quad \textit{при} \quad N = 2n; \quad 3[2n(1 - 2^{-(r+1)})]^{-1} \quad \textit{при} \quad N = 2n+1\}, \tag{35}$$

$$H_k[x^{(r)}; \varphi] = \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_k(x^{(r)}; \delta)}{\varphi(\delta)},$$

K_r — константа Фавара, $n = [N/2]$, $c_8(k) = c_7(k) c_3(k)$ (постоянные $c_3(k)$ и $c_7(k)$, зависящие только от k, определены в (10) и (27) соответственно).

Доказательство. Если $x(t) \in W^r H_k[\varphi]$, $r = 1, 2, \ldots$, то из оценок (31) и (10) с учетом неравенства

$$\omega_k\left(x^{(r)}; \frac{1}{n}\right) \leq H_k[x^{(r)}; \varphi] \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{36}$$

после несложных выкладок получаем оценку (33).

Теперь рассмотрим случай $r = 0$. С этой целью воспользуемся оценкой (32). Положим $Q_m(s) = T_m(s)$, где $T_m(s) = T_m(x; s)$ — тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения порядка не выше $m = [(N-1)/2]$ функции $x(s)$. Для оценки второго слагаемого из (32) используем неравенство (27). С помощью [7] и (36) получаем

$$\omega_k(x - T_m; \delta) \leq 2^k \|x - T_m x\| \leq c_3(k) 2^k H_k[x; \varphi] \varphi(\delta). \tag{37}$$

Тогда из (27), (37) и (10) находим

$$\|J(x - T_m x)\| \leq c_9(k) H_k[x; \varphi] \left\{ 2^k \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt + \varphi\left(\frac{1}{N}\right) \ln \frac{\pi}{\varepsilon} \right\}. \tag{38}$$

Теперь из (32), (38) (при $\varepsilon = 1/N$) и (10) получаем оценку (34). $\square$

5. Некоторые замечания и дополнения

Класс $W^r H_k[\varphi]$ является весьма общим. Поэтому из теоремы 4 можно получить многочисленные следствия.

1. При $\varphi(\delta) = M\delta^\alpha(1+|\ln\delta|^\beta)$, где $M = \text{const}$, $0 < \alpha \le k$, $r \ge 0$ и k — некоторые натуральные числа, а β — произвольное действительное число, для погрешности к. ф. (29), (30) получаем оценку

$$\|R_N x\|_C = O\Big(\frac{\ln^{1+\gamma} N}{N^{r+\alpha}}\Big), \quad \text{где} \quad \gamma = \begin{cases} \beta & \text{при } \beta > 0; \\ 0 & \text{при } \beta \le 0. \end{cases}$$

2. При $\varphi(\delta) = M\delta\ln^s(1/\delta)$, $0 < \delta < 1/2$, где s — фиксированное целое неотрицательное число, для погрешности к. ф. (29), (30) имеем оценки

$$\|R_N x\|_C \le 2MK_r c_3(k) H_k[x^{(r)};\varphi]\gamma(N,r)\Big(\frac{8}{\pi} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2N}{\pi}\Big)\frac{\ln^s n}{n^{r+1}} = O\Big(\frac{\ln^s n}{N^{r+1}}\Big), \quad r = 1, 2, \dots, \tag{39}$$

$$\|R_N x\|_C \le c_8(k) H_k[x;\varphi]\Big\{\tau(N)\frac{\ln^{s+1} N}{N} + \frac{2^k}{N}\chi(N,s)\ln^s N\Big\} = O\Big(\frac{\ln^{s+1} N}{N}\Big), \quad r = 0, \tag{40}$$

где

$$\gamma(N,r) = \frac{1}{1-2^{-r}} + \Big[\frac{2(1+2^{-r})\ln 2}{\pi(1-2^{-r})^2} + \beta_r\Big]\Big(\frac{8}{\pi} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2N}{\pi}\Big)^{-1} = O(1), \tag{41}$$

$$\tau(N) = 1 + \Big[\frac{2}{\pi}\ln\frac{2N}{\pi} + \frac{4}{\pi} + \frac{N-2n}{n}\Big]\frac{1}{\ln N} = O(1), \tag{42}$$

$$\chi(N,s) = \sum_{j=0}^{s}(s!/j!)\ln^{j-s} N = O(1), \quad 0! = 1, \tag{43}$$

β_r определено формулой (35), $n = [N/2]$; постоянные $c_3(k)$ и $c_8(k)$ можно вычислить при фиксированных k, например, с помощью ([7]; [18], п. 3, гл. III) соответственно, а для константы Фавара из (11) имеем

$$1 \le K_r \le \frac{\pi}{2}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad K_1 = \frac{\pi}{2}, \quad K_2 = \frac{\pi^2}{8}, \quad K_3 = \frac{\pi^3}{24}, \dots$$

В частности, полагая в оценке (40) $k = 2$ и $k = 1$, получим соответственно оценки

$$\|R_N x\|_C \le 8M(1+32\pi^2)H_2[x;\varphi]\Big\{\tau(N)\frac{\ln^{s+1} N}{N} + \frac{4}{N}\chi(N,s)\ln^s N\Big\}, \quad r = 0,$$

$$\|R_N x\|_C \le 12MH[x;\varphi]\Big\{\tau(N)\frac{\ln^{s+1} N}{N} + \frac{2}{N}\chi(N,s)\ln^s N\Big\}, \quad r = 0,$$

где $\tau(n)$, $\chi(N,s)$ определены формулами (42), (43).

Далее, из (39) с помощью результата из ([13], с. 305) при $k = 2$ и $k = 1$ находим оценки

$$\|R_N x\|_C \le \frac{5}{2}MH_2[x^{(r)};\varphi]\gamma(N,r)\Big(\frac{8}{\pi} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2N}{\pi}\Big)\frac{\ln^s n}{n^{r+1}}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

$$\|R_N x\|_C \le 3MH[x^{(r)};\varphi]\gamma(N,r)\Big\{\frac{8}{\pi} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2N}{\pi}\Big\}\frac{\ln^s n}{n^{r+1}}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

где $\gamma(N,r)$ определено формулой (41).

6. Об оптимизации квадратурных формул для сингулярных интегралов

В этом пункте при помощи результатов ([4], гл. III) показывается оптимальность по порядку в некоторых классах непрерывных 2π-периодических функций к. ф. для с. и. (1), рассмотренных выше.

Приведем постановку одной из задач оптимизации к. ф. для с. и. (1), следуя ([4], гл. III). Пусть плотность $x(\sigma)$ — известная функция из некоторого класса $F = \{x\}$ пространства $X = C_{2\pi}$ с обычной нормой. С. и. (1) будем вычислять по к. ф. вида

$$Jx \approx J_N(x;s) = \sum_{k=1}^{N} A_k(s)x(s_k), \quad x \in F, \tag{44}$$

где $\{s_k\}_1^N = \{s_k^N\}_1^N$ $(s_0 = 0,\ s_N = 2\pi)$, $\{A_k(s)\}_1^N$ — произвольная система непрерывных функций. Величина

$$V_N(F) = \inf_{\{s_k, A_j\}_{k,j=1}^N} \sup_{x \in F} \|R_N x\|_{C_{2\pi}}, \quad \text{где} \ \ R_N x = J(x;s) - J_N(x;s),$$

называется оптимальной оценкой погрешности класса к. ф. (44).

Определение. Квадратурная формула

$$Jx \approx J_N^0(x;s) = \sum_{k=1}^{N} A_k^0(s)x(s_k^0), \quad x \in F,$$

где $A_k^0(s) \in C_{2\pi}$, $k = \overline{1,N}$, — некоторые фиксированные функции, а s_k^0, $k = \overline{1,N}$, — некоторые фиксированные узлы, называется оптимальной по порядку, если выполняется условие

$$\sup_{x \in F} \|R_N^0 x\|_{C_{2\pi}} \asymp V_N(F), \quad R_N^0 x = J(x;s) - J_N^0(x;s), \quad x \in F.$$

Из теоремы 27 ([4], гл. III) и теоремы 2 из п. 2 следует

Теорема 5. *Пусть $F = W^r H^\omega$, $r = 0, 1, \ldots$, где при $r = 0$ выполняется дополнительное условие* (20). *Тогда*

$$V_N(F) \asymp \omega\left(\frac{1}{N}\right)\frac{\ln N}{N^r}, \quad r = 0, 1, \ldots,$$

и для любых n таких, что $2n \le N + 1$, $n \asymp N$, к. ф. (5) *оптимальна по порядку на классе F среди всевозможных к. ф. вида* (44).

Из следствия 3 и теоремы 27 ([4], гл. III) вытекает

Теорема 6. *Пусть $F = H^\omega$, где $\omega = \omega(t)$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию* (20). *Тогда*

$$V_N(F) \asymp \omega\left(\frac{1}{N}\right)\ln N,$$

и для любых n таких, что $2n \le N + 1$, $n \asymp N$, к. ф. (25) *оптимальна по порядку на классе F среди всевозможных к. ф. вида* (44).

Далее, из теоремы 4 при $\varphi(\delta) = M\delta^\alpha$, $0 < \alpha \le k$, и теоремы 27 ([4], гл. III) вытекает

Теорема 7. *Пусть $F = W^r H_{k,\alpha}(M)$, $r = 0, 1, \ldots, k$ целое, $0 < \alpha \le k$. Тогда*

$$V_N(F) \asymp \frac{\ln N}{N^{r+\alpha}}$$

и интерполяционные к. ф. (29), (30) *оптимальны по порядку на классе F среди всевозможных к. ф. вида* (44).

7. О кубатурных формулах для сингулярных интегралов

1. Рассмотрим двумерный сингулярный интеграл с ядрами Гильберта

$$Jx = J(x;s,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\theta,\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\theta-s}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-t}{2}\,d\theta\,d\varphi. \tag{45}$$

Пусть C — пространство непрерывных 2π-периодических (по обоим аргументам) функций $x(s,\varphi)$ с нормой

$$\|x\| = \|x\|_C = \max_{s,\varphi}|x(s,\varphi)|.$$

Обозначим через $W^{r,l}H_{k_1,k_2}[\varphi]$, $\varphi = \varphi(\delta_1,\delta_2) = \varphi_1(\delta_1)\varphi_2(\delta_2)$ ($r \geq 0$, $l \geq 0$ — целые; k_1, k_2 — некоторые натуральные числа), класс функций $x(s,\varphi) \in C$, имеющих частные производные $x_s^{(r)} = \frac{\partial^r x(s,\varphi)}{\partial s^r}$, $x_\varphi^{(l)} = \frac{\partial^l x(s,\varphi)}{\partial \varphi^l}$, которые принадлежат классам $H_{k_1}[\varphi_1]$ и $H_{k_2}[\varphi_2]$ соответственно.

Для двумерного с. и. (45) в классах $W^{r,l}H_{k_1,k_2}[\varphi]$, $r \geq 0$, $l \geq 0$, справедливы результаты, аналогичные приведенным в пп. 1–3. Для доказательства используются вышеприведенные результаты и результаты работы [21], [22].

В [23] путем аппроксимации плотности с. и. (45) дискретным аналогом двойных сумм Фейера $\sigma_{pq}^{mn}x$ получена кб. ф.

$$J(x;s,\varphi) \approx J\sigma_{pq}^{nm}x = \frac{1}{4mnpq}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2m} x(s_k,\varphi_j)\overline{G}_p(s,s_k)\overline{G}_q(\varphi,\varphi_j), \tag{46}$$

где

$$s_k = \frac{k\pi}{n}, \quad k=\overline{1,2n}; \quad \varphi_j = \frac{j\pi}{m}, \quad j = \overline{1,2m}, \tag{47}$$

а

$$\overline{G}_l(t,y) = \frac{\sin l(t-y) - l\sin(t-y)}{2\sin^2(t-y)/2}$$

— сопряженное ядро Фейера.

Обозначим через $H^{\alpha,\beta}(M_1,M_2)$ ($0<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$) класс функций $x(s,\varphi)\in C$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $0<\alpha\leq 1$ по переменной s равномерно относительно φ ($x\in H^\alpha(M_1)$ и $x \in H^\beta(M_2)$), $0<\beta\leq 1$, по переменной φ равномерно относительно s (M_1 и M_2 — положительные постоянные).

Через $H^{\alpha,\beta}$, $0<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$, обозначим объединение классов $H^{\alpha,\beta}(M_1,M_2)$ по всем положительным M_1, M_2.

Теорема 8. *Пусть $x(s;\varphi)\in H^{\alpha,\beta}$, $0<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$. Тогда при p, q таких, что $p\leq n$, $q\leq m$, для погрешности кб. ф.* (46), (47) *справедлива оценка*

$$\|J(x-\sigma_{pq}^{nm}x)\| = O\biggl(\frac{\ln p}{p^\alpha} + \frac{\ln q}{q^\beta} + \ln n\ln m\Bigl(\frac{1}{n^\alpha}+\frac{1}{m^\beta}\Bigr)\biggr).$$

Следствие 4. В условиях теоремы 8 при p, q, m и n таких, что $p\asymp n$, $q\asymp m$, а $m^\beta\asymp n^\alpha$, для погрешности кб. ф. (46), (47) справедлива оценка

$$\|J(x-\sigma_{pq}^{nm}x)\| = O\Bigl(\frac{\ln^2 n}{n^\alpha}\Bigr), \quad 0<\alpha\leq 1.$$

В квадрате $[0,2\pi;\ 0,2\pi]$ возьмем произвольную сетку узлов

$$\{s_k,t_j\} = \{s_k^{(n)},t_j^{(m)}\}, \quad 1\leq k\leq 2n, \quad 1\leq j\leq 2m, \quad s_1^{(n)} = t_1^{(m)} = 0, \quad s_{2n}^{(n)} = t_{2m}^{(m)} = 2\pi. \tag{48}$$

Положим $F = H^{\alpha,\beta}(M_1, M_2)$, $0 < \alpha \le 1$, $0 < \beta \le 1$, и интегралу (45) поставим в соответствие кб. ф.

$$Jx \approx J_{n,m}x = \sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2m} x(t_k, s_j)A_{k,j}^{(nm)}(s,t), \tag{49}$$

где $\{A_{kj}^{(nm)}\}$ $(1 \le k \le 2n,\ 1 \le j \le 2m)$ — произвольная система непрерывных функций.

Положим $R_{nm}x = Jx - J_{nm}x$. Следуя [24], введем оптимальную оценку погрешности кб. ф. вида (48), (49)

$$V_{nm}(F) = \inf\{\sup_{x\in F}\|R_{nm}x\| : \{t_k^{(n)}, s_j^{(m)}\},\ \{A_{kj}^{(nm)}\}\}.$$

С помощью результатов [24], [25] доказывается

Теорема 9. *Пусть* $F = H^{\alpha,\beta}(M_1, M_2)$, $0 < \alpha \le 1$, $0 < \beta \le 1$. *Тогда при* n, m *таких, что* $n^\alpha \asymp m^\beta$, *справедлива оценка*

$$V_{nm}(F) \asymp \frac{\ln^2 n}{n^\alpha},$$

и для любых p, q, m, n *таких, что* $p \le n$, $q \le m$, $q \asymp n$, $q \asymp m$, *кб. ф.* (46), (47) *оптимальна по порядку на классе* F *среди всевозможных кб. ф. вида* (48), (49).

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Физматгиз, 1968. – 512 с.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. – С. 251–307.
4. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
5. Тихоненко Н.Я. *Приближенное решение краевых задач теории аналитических функций и их приложения*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Киев, 1994. – 327 с.
6. Апайчева Л.А. *Приближенное вычисление сингулярных интегралов в классе функций* $W^rH_k[\varphi]$. – Казанск. хим.-технол. ин-т. – Казань, 1985. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ 19.12.85, № 8722-В.
7. Стечкин С.Б. *О порядке наилучших приближений непрерывных функций* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15. – № 3. – С. 219–242.
8. Стечкин С.Б. *О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1956. – Т. 20. – № 2. – С. 197–206.
9. Бари Н.К. *О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1955. – Т. 19. – № 5. – С. 285–302.
10. Лозинский С.М. *Обращение теорем Джексона* // ДАН СССР. – 1952. – Т. 83. – № 5. – С. 645–648.
11. Zygmund A. *Smooth functions* // Duke Math. J. – 1945. – V. 12. – № 1. – P. 47–76.
12. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
13. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
14. Степанец А.И. *Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.* – Киев: Наук. думка, 1980. – 340 с.
15. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.
16. Велев Г.Д. *О приближенных методах вычисления сингулярных интегралов*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1982. – 162 с.

17. Стечкин С.Б. *Методы суммирования С.Н. Бернштейна–В. Рогозинского* / В кн.: Харди Г.Х. Расходящиеся ряды. – М.: Ин. лит., 1951. – С. 479–492.
18. Дзядык В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* – М.: Наука, 1977. – 490 с.
19. Мусаев Б.И., Салаев В.В. *О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла с ядром Гильберта* // Современ. пробл. теории функций. Материалы Всес. школы по теории функций. – Баку, 1977, 1980. – С. 186–194.
20. Фесчиев И.Х. *К приближенному вычислению сингулярных интегралов* // Докл. Болг. АН. – 1977. – Т. 30. – № 8. – С. 1109–1112.
21. Габдулхаев Б.Г. *Кубатурные формулы для сингулярных интегралов.* I // Изв. Матем. ин-та Болг. АН. – 1970. – Т. 11. – С. 181–196.
22. Габдулхаев Б.Г. *Кубатурные формулы для сингулярных интегралов.* II // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 4. – С. 3–13.
23. Апайчева Л.А., Велев Г.Д. *О некоторых квадратурных и кубатурных формулах для сингулярных интегралов* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 3. – С. 3–12.
24. Габдулхаев Б.Г., Шарипов Р.Н. *Оптимизация квадратурных формул с кратными узлами для сингулярных интегралов* // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 12. – С. 62–66.
25. Габдулхаев Б.Г. *Экстремальные задачи теории сингулярных кубатур* // Всесоюзн. школа по теории функций, посвящ. 100-летию со дня рожд. Н.Н. Лузина. Тез. докл. – Кемерово, 1983. – С. 29.

Нижнекамский химико-технологический институт

Поступила
05.04.2001