Известия вузов. Математика
2017, №5, с. 32–44

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.С. ВОЛОСИВЕЦ, М.А. КУЗНЕЦОВА

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СВЕРТКИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА И СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА

Аннотация. Пусть f, g — функции из различных пространств Лоренца $L^{p,q}[0,1)$, h является их мультипликативной сверткой и $\widehat{h}(k)$ — коэффициенты Фурье h по мультипликативной системе с ограниченной образующей последовательностью. Мы оцениваем остаток ряда из $|\widehat{h}(k)|^a$ с множителями вида k^b через наилучшие приближения f и g в соответствующих пространствах Лоренца. Устанавливается точность этого результата и его следствий для пространств Лебега.

Ключевые слова: пространство Лоренца, мультипликативная система, коэффициенты Фурье, мультипликативная свертка, наилучшее приближение.

УДК: 517.518

1. Введение

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \le p_j \le N$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}(p_i) = \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$. Если $m_0 = 1$, $m_j = p_1 \dots p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, то каждое $x \in [0,1)$ представимо в виде

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}(p_j). \tag{1.1}$$

Разложение определено однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k, n \in \mathbb{Z}_+$, выбираем представление с конечным числом $x_j \ne 0$. Пусть $G(\mathbf{P})$ — группа, состоящая из последовательностей $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $x_j \in \mathbb{Z}(p_j)$ с операцией $\overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{z}$, где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $j \in \mathbb{N}$. Аналогично определяется обратная операция $\overline{x} \ominus \overline{y} = \overline{z}$. Отображение $\lambda_p(\overline{x}) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}$ не является взаимно однозначным, поскольку элементам вида

$$x = k/m_l \in (0,1), \quad k, l \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

соответствуют два элемента $G(P)$. При определении обратного отображения λ_p^{-1} для x вида (1.2) пусть $x_j = [m_j x] \pmod{p_j}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\lambda_p^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_l, 0, \dots)$. Для остальных $x \in [0,1)$ существует единственный элемент $\overline{x} \in G(P)$ со свойством $\lambda_p(\overline{x}) = x$ и тогда $\lambda_p^{-1}(x) = \overline{x}$. Определим обобщенное расстояние $\rho(x,y) = \lambda_p(\lambda_p^{-1}(x) \ominus \lambda_p^{-1}(y))$ и сложение $x \oplus y = \lambda_p(\lambda_p^{-1}(x) \oplus \lambda_p^{-1}(y))$. При этом $x \oplus y$ не определено, если $\lambda_p^{-1}(x) \oplus \lambda_p^{-1}(y) = \overline{z}$, где

Поступила 05.12.2015

Благодарности. Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки России (проект №1.1520.2014/К).

$z_j = p_j - 1$ при $j \geq j_0$, т. е. $x \oplus y$ определено для почти всех (п. в.) $x \in [0,1)$ при $y \in [0,1)$. Аналогично вводится $x \ominus y$ для п. в. $y \in [0,1)$ при фиксированном $x \in [0,1)$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \quad k_j \in \mathbb{Z}(p_j), \tag{1.3}$$

где суммы справа конечны. Для числа $x \in [0,1)$, представленного в виде (1.1), и $k \in \mathbb{Z}_+$, записанного в виде (1.3), положим по определению $\chi_k(x) = \exp\Big(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\Big)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L^1[0,1)$. Поэтому можно определить коэффициенты Фурье и частичную сумму Фурье по этой системе для $f \in L^1[0,1)$ формулами

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_n(x)}dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{f}(j)\chi_j(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подробнее о системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ см. в ([1], § 1.5).

Для измеримой на $[0,1)$ функции f рассмотрим функцию распределения $\lambda_f(y)$ и невозрастающую перестановку f^*:

$$\lambda_f(y) = \mathrm{mes}\{x \in [0,1) : |f(x)| > y\}, \quad f^*(t) = \inf\{y : \lambda_f(y) \leq t\}.$$

Если $0 < p, q < \infty$ и

$$\|f\|^*_{p,q} := \left(\int_0^1 [f^*(t)]^q t^{q/p-1}\, dt\right)^{1/q} < \infty,$$

то f принадлежит пространству Лоренца $L^{p,q}[0,1)$. При $q = \infty$ и $p \in (0,\infty)$ пространство $L^{p,q}[0,1)$ состоит из измеримых функций f на $[0,1)$ таких, что $\|f\|^*_{p,\infty} = \sup\limits_{t>0} t^{1/p} f^*(t) < \infty$. Если $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{p,q}$, если (квази)норма $\|a\|_{l^{p,q}} = \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^*)^q n^{q/p-1}\Big)^{1/q}$ при $0 < p, q < \infty$ или $\|a\|_{l^{p,\infty}} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} n^{1/p} a_n^*$ при $0 < p < \infty$, $q = \infty$, конечна. При $p = q > 0$ пространство $L^{p,q}[0,1)$ совпадает с пространством $L^p[0,1)$, а $l^{p,q}$ — с l^p. Подробнее о пространстве $L^{p,q}$ можно узнать в ([2]; [3], гл. 5, § 3). Будем рассматривать также пространство $C^*[0,1)$, состоящее из измеримых ограниченных функций f на $[0,1)$ таких, что $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega^*(f,\delta) = 0$, где $\omega^*(f,\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \rho(x,y) < \delta\}$. В качестве нормы в $C^*[0,1)$ рассматривается $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$. В $L^{p,q}[0,1)$, $1 < p < \infty$, модуль непрерывности можно ввести равенством

$$\omega^*(f,\delta)_{p,q} = \sup_{0<h<\delta} \|f(x \oplus h) - f(x)\|^*_{p,q}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \widehat{f}(k) = 0, k \geq n\}$. Тогда $E_n(f)_{p,q} = \inf\{\|f - t_n\|^*_{p,q} : t_n \in \mathcal{P}_n\}$. При $p = q$ вместо $E_n(f)_{p,p}$ пишем $E_n(f)_p$, вместо $\|\cdot\|_{p,p}$ — $\|\cdot\|_p$, вместо $\omega^*(f,\delta)_{p,p}$ — $\omega^*(f,\delta)_p$.

Далее важную роль играет мультипликативная свертка двух функций $f, g \in L^1[0,1)$: $f * g(x) = \int\limits_0^1 f(x \ominus t) g(t) dt$. Известно [4], что $f * g(x)$ существует почти всюду (п. вс.), $f * g \in L^1[0,1)$ и $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Будем писать $f \in A^{(\gamma)}, \gamma > 0$, если $\rho_n^{(\gamma)} := \left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^{\gamma}\right)^{1/\gamma}$ конечно для $n = 1$. Аналогично классической теореме М. Рисса ([5], гл. 9, § 7) нетрудно доказать следующий результат.

Теорема A. *Пусть $f \in L^1[0,1)$. Тогда $f \in A^{(1)}$ в том и только том случае, если $f = g * h$, где $g, h \in L^2[0,1)$.*

Доказана

Теорема B ([6])**.** 1) *Пусть $1 < p \le 2$, $f, g \in L^p(\mathbb{T})$, тогда $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(F)|^{p/(2p-2)} < \infty$, где F — 2π-периодическая свертка f и g, $c_n(F) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt$, $n \in \mathbb{Z}$.*

2) *Для любого $p \in (1,2]$ существуют $f, g \in L^p(\mathbb{T})$ такая, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(F)|^{\beta} = \infty$ для любого $\beta < p/(2p-2)$.*

Ряд результатов о сходимости рядов из коэффициентов Фурье по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ мультипликативных сверток получены К. Оневиром в [7]. Эта тематика развивалась в работе С.С. Волосивца [8], где, например, была установлена

Теорема C. *Пусть $1 < p < 2$. Тогда если $g \in L^p[0,1)$ и $h \in \mathrm{Lip}^*(\alpha, \mathbf{P})$ (т. е. $\omega^*(f,\delta)_p = O(\delta^{\alpha})$), $\alpha > (2-p)/p$, то ряд Фурье функции $g * h$ по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится абсолютно. С другой стороны, существуют $g \in L^p[0,1)$ и $h \in \mathrm{Lip}^*((2-p)/p, p)$ такие, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\widehat{g * h}(n)|$ расходится.*

Теорема C дает мультипликативные аналоги тригонометрических результатов М. Изуми и Ш. Изуми ([9], следствие 1 и теорема 2).

Н.А. Ильясов [10]–[12] изучал количественные оценки, связанные с теоремой М. Рисса, теоремой B и их обобщениями. Например, в [10] им доказана

Теорема D. 1) *Пусть $1 < p \le 2$, $f, g \in L^p(\mathbb{T})$, h — 2π-периодическая свертка f и g, $\gamma = p'/2$, где $1/p + 1/p' = 1$. Тогда*

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_{\nu}(h)|^{\gamma}\right)^{1/\gamma} \le C(p) E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})} E_n(g)_{L^p(\mathbb{T})},$$

где $E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})}$ — наилучшее приближение f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в $L^p(\mathbb{T})$.

2) *Пусть $1 < p \le 2$, $\alpha, \beta > 0$, $\gamma = p'/2$, где $1/p + 1/p' = 1$. Тогда существуют $f, g \in L^p(\mathbb{T})$ такие, что $E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})} \asymp n^{-\alpha}$, $E_n(g)_{L^p(\mathbb{T})} \asymp n^{-\beta}$ и для 2π-периодической свертки h функций f и g имеем*

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_{\nu}(h)|^{\gamma}\right)^{1/\gamma} \asymp n^{-\alpha-\beta}.$$

3) *Пусть $2 < p \le \infty$, $f, g \in L^p(\mathbb{T})$, h — 2π-периодическая свертка f и g. Тогда*

$$\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_{\nu}(h)| \le E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})} E_n(g)_{L^p(\mathbb{T})}.$$

4) *Пусть* $2 < p < \infty$, $\alpha, \beta > 0$. *Тогда существуют* $f, g \in C(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ *такие, что* $E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})} = O(n^{-\alpha})$, $E_n(g)_{L^p(\mathbb{T})} = O(n^{-\beta})$ *и для* 2π*-периодической свертки* h *функций* f *и* g *имеем* $\sum\limits_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu(h)| \asymp n^{-\alpha-\beta}$.

Пункт 1) теоремы D можно найти в п. 3) теоремы 1 из [10], п. 2) содержится в теореме 2 из [10], пп. 3) и 4) представляют собой утверждения п. 3) теорем 3 и 4 в указанной ранее работе.

Здесь и далее запись $A(n) \asymp B(n)$ означает, что $A(n) = O(B(n))$, $n \in \mathbb{N}$, и $B(n) = O(A(n))$, $n \in \mathbb{N}$.

Целью данной работы является получение результатов типа теоремы D для коэффициентов Фурье по мультипликативным системам. При этом вместо пространств Лебега L^p используются пространства Лоренца, а ряды из коэффициентов Фурье сверток имеют более сложный вид.

2. Вспомогательные утверждения

Перед тем, как сформулируем первые три леммы, дадим некоторые сведения из теории симметричных пространств.

Банахово пространство $M[0,1)$ измеримых по Лебегу функций называется симметричным, если 1) из $|f(t)| \le |g(t)|$ п. в. на $[0,1)$ и $g \in M[0,1)$ следует $f \in M[0,1)$ и $\|f\|_M \le \|g\|_M$; 2) из равноизмеримости f, g и включения $g \in M[0,1)$ вытекает $f \in M[0,1)$ и $\|f\|_M = \|g\|_M$. Известно, $M[0,1)$ вложено в $L^1[0,1)$ и в $M[0,1)$ непрерывен оператор растяжения $(\sigma_\tau f)(t) = f(t/\tau)X_{[0,1)}(t/\tau)$. Существуют пределы

$$\alpha_M = \lim_{\tau\to+0} \ln \|\sigma_\tau\|_{M\to M}/\ln\tau, \quad \beta_M = \lim_{\tau\to\infty} \ln \|\sigma_\tau\|_{M\to M}/\ln\tau,$$

называемые соответственно нижним и верхним индексами Бойда пространства $M[0,1)$. Известно, что $0 \le \alpha_M \le \beta_M \le 1$. Для симметричного пространства $M[0,1)$ можно ввести ассоциированное пространство $M^1[0,1)$, состоящее из измеримых на $[0,1)$ функций $g(t)$, для которых $\|g\|_{M^1} = \sup\left\{\int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt \,:\, \|f\|_M \le 1\right\} < \infty$. Фундаментальной функцией симметричного пространства $M[0,1)$ называется $\varphi_M(t) = \|X_{[0,t)}\|_M$. Подробнее об этих понятиях и фактах см. в ([13], гл. 2, § 4).

Легко видеть, что для $M[0,1) = L^{p,q}[0,1)$, $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, справедливы равенства $\|\sigma_\tau\|_{M\to M} = \tau^{1/p}$, что дает $\alpha_M = \beta_M = 1/p$, и $\varphi_M(t) = (p/q)^{1/q} t^{1/p}$, откуда $\varphi_M(\tau t)/\varphi(t) = \tau^{1/p}$ и справедливо соотношение

$$\|\sigma_\tau\|_{M\to M} \le C \sup\{\varphi_M(\tau t)/\varphi(t) : 0 < t < \min(1, 1/\tau)\} \tag{2.1}$$

при $C = 1$. В [14] установлены следующие три утверждения.

Лемма 1. *Пусть симметричное пространство* $M[0,1)$ *удовлетворяет условию* $\limsup\limits_{t\to 0} \varphi_M(2t)/\varphi_M(t) = \theta < 2$ *и* $D_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(t)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда при* $n \in \mathbb{N}$ *верно неравенство* $C_1 n\varphi_M(1/n) \le \|D_n\|_M \le C_2 n\varphi_M(1/n)$.

Лемма 2. *Пусть симметричное пространство* $M[0,1)$ *удовлетворяет условию* (2.1) *и*

$$1 < \liminf_{t\to 0} \varphi_M(2t)/\varphi_M(t) \le \limsup_{t\to 0} \varphi_M(2t)/\varphi_M(t) < 2.$$

Тогда для $f \in M[0,1)$ *имеем* $\Big|\sum\limits_{i=n}^{\infty} \widehat{f}(i)/i\Big| = O(\varphi_{M^1}(n^{-1})E_n(f)_M)$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 3. *Пусть симметричное пространство* $M[0,1)$ *таково, что* $0 < \alpha_M \le \beta_M < 1$ *и последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *квазимонотонна, т. е.* $\{k^{-\tau}a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *убывает для некоторого* $\tau \ge 0$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\chi_k$ *является рядом Фурье некоторой функции* $f \in M[0,1)$ *в том и только том случае, если* $g := \sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k X_{[1/(k+1),1/k)}$ *принадлежит* $M[0,1)$, *где* X_A — *характеристическая функция множества* A.

Лемма 4 является аналогом теорем 1 и 5 из работы И. Загера [15], которые, в свою очередь, обобщают теорему Харди–Литтлвуда ([5], гл. 10, § 3).

Лемма 4. *Пусть последовательность* $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *квазимонотонна и стремится к нулю, а последовательность* $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ *возрастает. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ *сходится при* $x \ne 0$ *к* $f(x)$ *и для принадлежности* $f(x)$ *пространству* $L^{p,q}[0,1]$, $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\|a\|_{l^{p'},q} < \infty$ $\Big($*или* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}a_k^q < \infty\Big)$.

Доказательство. Сходимость ряда вытекает из ([16], теорема 1). В силу $\alpha_M = \beta_M = 1/p$ для $M[0,1) = L^{p,q}[0,1]$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, можно применять лемму 3, а в силу возрастания ka_k функция g из этой леммы совпадает со своей перестановкой g^*. Поэтому при $1 \le q < \infty$ имеем

$$\|g\|_{p,q}^* = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} ka_k X_{[1/(k+1),1/k)}\Big\|_{p,q}^* = \bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(ka_k)^q\int_{1/(k+1)}^{1/k} t^{q/p-1}\,dt\bigg)^{1/q} =$$
$$= (p/q)^{1/q}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(k^{-q/p} - (k+1)^{-q/p})(ka_k)^q\bigg)^{1/q} \ge C_1\bigg(\sum_{k=1}^{\infty} k^{q(1-1/p)-1}a_k^q\bigg)^{1/q} =$$
$$= C_1\bigg(\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}a_k^q\bigg)^{1/q}.$$

Аналогично доказывается $\|g\|_{p,q}^* \le C_2\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}a_k^q\Big)^{1/q}$. Наконец, в ([15], раздел II, теорема 3) установлено, что $\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{q/p'-1}a_k^q\Big)^{1/q}$ и $\|a\|_{l^{p'},q}$ являются конечными для квазимонотонной последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ одновременно. □

Лемма 5 доказана Р. О'Нейлом ([17], теорема 2.6) для свертки в пространствах $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Ее доказательство с минимальными изменениями переносится на случай мультипликативной свертки.

Лемма 5. *Пусть* $f \in L^{p_1,q_1}[0,1)$, $g \in L^{p_2,q_2}[0,1)$, *где* $1 < p_1, p_2 < \infty$, $1 \le q_1, q_2 < \infty$ *и* $1/p_1 + 1/p_2 - 1 = 1/r > 0$. *Тогда* $h = f * g \in L^{r,s}[0,1)$, *где* $s \ge 1$ — *любое число такое, что* $1/q_1 + 1/q_2 \ge 1/s$. *При этом*

$$\|h\|_{r,s}^* \le C\|f\|_{p_1,q_1}^*\|g\|_{p_2,q_2}^*.$$

В частности, при $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2$ *получаем* $h \in L^r[0,1)$ *и* $\|h\|_r \le \|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}$ *(неравенство Юнга).*

Лемма 6. *Операторы частичных сумм S_n равномерно ограничены на $L^{p,q}[0,1)$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Как следствие, в этом случае $\|f - S_n(f)\|^*_{p,q} \leq CE_n(f)_{p,q}$.*

Доказательство. Известно (см., например, [18]), что S_n равномерно ограничены в $L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$. По интерполяционной теореме Марцинкевича–Кальдерона ([3], гл. 5, теорема 3.15) получаем равномерную ограниченность S_n во всех $L^{p,q}[0,1)$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Второе утверждение леммы вытекает из первого стандартным образом (см., например, [5], гл. 8, § 20, доказательство теоремы 2). □

Лемма 7 является аналогом результата С.Б. Стечкина [19]. Для полноты изложения приведем набросок доказательства.

Лемма 7. *Пусть $f \in C^*[0,1)$ и имеет ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{m_k}$, где $a_k \geq 0$. Тогда*

$$C \sum_{m_k \geq n} a_k \leq E_n(f)_\infty \leq \sum_{m_k \geq n} a_k. \tag{2.2}$$

Доказательство. Рассмотрим средние Валле-Пуссена $V_n(f) = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} S_k(f)/n = 2\sigma_{2n}(f) - \sigma_n(f)$, где $\sigma_n(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k(f)/n$. Известно ([4], гл. 4, § 10), что операторы σ_n равномерно ограничены в $C^*[0,1)$, поэтому операторы V_n тоже равномерно ограничены в $C^*[0,1)$. Ясно, что $V_n(t_n) = t_n$ для $t_n \in \mathcal{P}_n$, откуда для t_n со свойством $E_n(f)_\infty = \|f - t_n\|_\infty$ имеем

$$\|f - V_n(f)\|_\infty \leq \|f - t_n\|_\infty + \|V_n(t_n) - V_n(f)\|_\infty \leq C_1\|f - t_n\|_\infty = C_1 E_n(f)_\infty.$$

Далее,

$$\begin{gathered}\|f - S_n(f)\|_\infty \leq \|f - V_n(f)\|_\infty + \|V_n(f) - S_n(f)\|_\infty \leq C_1 E_n(f)_\infty + \\ + \left\| n^{-1} \sum_{n \leq m_k < 2n} (2n - m_k) a_k \chi_{m_k} \right\|_\infty \leq C_1 E_n(f)_\infty + \tau |a_{k_0}| \leq (C_1 + 1) E_n(f)_\infty.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь τ — количество m_k, удовлетворяющих неравенству $n \leq m_k < 2n$, равное единице или нулю, k_0 — такой номер, что $n \leq m_{k_0} < 2n$ при $\tau = 1$, k_0 — произвольный номер при $\tau = 0$ и $|a_k| = |\widehat{f}(m_k)| \leq E_{m_k}(f)_\infty \leq E_n(f)_\infty$ ([4], гл. 4, теорема 4.2). Если $a_k \geq 0$, то $|f(x) - S_n(f)(x)| \leq \sum\limits_{m_k \geq n} a_k$ и равенство достигается при $x = 0$, поэтому $\|f - S_n(f)\|_\infty = \sum\limits_{m_k \geq n} a_k$. Отсюда сразу вытекает правое неравенство (2.2) и с помощью (2.3) легко получаем левое неравенство (2.2). □

Лемма 8. *Если $f \in L^{p,q}[0,1)$, $1 < p < 2$, $1 \leq q \leq \infty$, то $\|\{\widehat{f}(n)\}_{n=0}^\infty\|_{l^{p',q}} \leq C\|f\|^*_{p,q}$.*

Доказательство леммы 8 легко следует из известных соотношений: $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L^1[0,1)$ и $\|\{\widehat{f}(n)\}_{n=0}^\infty\|_{l^2} = \|f\|_2$, $f \in L^2[0,1)$, и упомянутой выше теоремы Марцинкевича–Кальдерона.

Лемма 9. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. Если $f \in L^{p,q}[0,1)$, $\widehat{f}(n) \geq 0$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\{n^\tau \widehat{f}(n)\}_{n=1}^\infty$ возрастает при некотором $\tau > 0$. Тогда*

$$\widehat{f}(n) = O(n^{1/p-1} E_n(f)_{p,q}), \quad \widehat{f}(n)\|D_n\|^*_{p,q} = O(E_n(f)_{p,q}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Из леммы 2 имеем

$$\sum_{k=n}^{2n-1} k^{-1}\widehat{f}(k) \le \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\widehat{f}(k) = O(\varphi_{M^1}(1/n)E_n(f)_M) = O(n^{1/p-1}E_n(f)_{p,q}), \quad n \in \mathbb{N},$$

поскольку ассоциированное пространство $M^1[0,1)$ к $M[0,1) = L^{p,q}[0,1)$ есть $L^{p',q'}[0,1)$, где $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$, и $\varphi_{M^1}(t) = C_1 t^{1-1/p}$. С другой стороны, по лемме 1 верно соотношение $\|D_n\|_M = O(n\varphi_M(1/n)) = O(n^{1-1/p})$ при $M[0,1) = L^{p,q}[0,1)$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$. В итоге в силу полученных выше оценок получаем

$$\widehat{f}(n)\|D_n\|^*_{p,q} \le 2^\tau \sum_{k=n}^{2n-1} n^{-1}\widehat{f}(k)\|D_n\|^*_{p,q} \le 2^{\tau+1} \sum_{k=n}^{2n-1} k^{-1}\widehat{f}(k)\|D_n\|^*_{p,q} \le C_3 E_n(f)_{p,q}.$$

С помощью оценки снизу из леммы 1 получаем первое неравенство леммы. □

Лемма 10. *Пусть $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ убывает к нулю, $1 < p < \infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $f \in L^p[0,1)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^p k^{p-2}$. В последнем случае верно*

$$E_n(f)_p \le C\left(n^{1-1/p}a_n + \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^p k^{p-2}\right)^{1/p}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Первое утверждение леммы установлено в [20] и является аналогом теоремы Харди–Литтлвуда (см. [5], гл. 10, § 3), его обобщение приведено в [16]. Неравенство для наилучших приближений в случае более общих классов $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ см. в [21], первый тригонометрический результат такого рода принадлежит А.А. Конюшкову [22].

3. Основные результаты

Теорема 1. 1) *Пусть $1 < p_1,\ p_2 < 2$, $1 \le q_1 \le p_1'$, $1 \le q_2 \le p_2'$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$, $1/s = 1/q_1 + 1/q_2$ (т. е. $1/s \ge 1 - 1/r$). Если $f \in L^{p_1,q_1}[0,1)$, $g \in L^{p_2,q_2}[0,1)$, то $h = f * g \in L^{r,s}[0,1)$ и верны неравенства*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{s/r'-1}|\widehat{h}(k)|^s\right)^{1/s} \le C\|f\|^*_{p_1,q_1}\|g\|^*_{p_2,q_2}, \tag{3.1}$$

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{s/r'-1}|\widehat{h}(k)|^s\right)^{1/s} \le CE_n(f)_{p_1,q_1}E_n(g)_{p_2,q_2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Аналогичное утверждение верно при $1 \le q_1, q_2 < \infty$, если $\{\widehat{f}(n)\}_{n=1}^\infty$, $\{\widehat{g}(n)\}_{n=1}^\infty$ квазимонотонны и $\{n\widehat{f}(n)\}_{n=1}^\infty$, $\{n\widehat{g}(n)\}_{n=1}^\infty$ возрастают.

2) *Пусть $1 < p_1,\ p_2 < 2$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$. Если $f \in L^{p_1}[0,1)$, $g \in L^{p_2}[0,1)$, то $h = f * g \in L^r[0,1)$ и справедливы неравенства*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{h}(k)|^{r'}\right)^{1/r'} \le \|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}, \tag{3.3}$$

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |\widehat{h}(k)|^{r'}\right)^{1/r'} \le E_n(f)_{p_1}E_n(g)_{p_2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Доказательство. 1) Как указано во введении, $\widehat{h}(n)=\widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, и по лемме 5 верно $h\in L^{r,s}[0,1)$. В силу условия $1/s=1/q_1+1/q_2$ и неравенства Гёльдера с показателями q_1/s и q_2/s имеем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{s/r'-1}|\widehat{f}(n)\widehat{g}(n)|^s\right)^{1/s}=\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{s(1/p_1'-1/q_1)}|\widehat{f}(n)|^s n^{s(1/p_2'-1/q_2)}|\widehat{g}(n)|^s\right)^{1/s}\le$$
$$\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^{q_1}n^{q_1/p_1'-1}\right)^{1/q_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{g}(n)|^{q_2}n^{q_2/p_2'-1}\right)^{1/q_2}. \quad (3.5)$$

Так как по условию $n^{q_i/p_i'-1}$, $i=1,2$, убывают, то правая часть приведенного выше неравенства не превосходит $\|\{\widehat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^{p_1'},q_1}\|\{\widehat{g}(n)\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^{p_2'},q_2}$ ([23], теорема 368). Последнее выражение, в свою очередь, по лемме 8 не превосходит $C_1\|f\|^*_{p_1,q_1}\|g\|^*_{p_2,q_2}$. Аналогично получаем

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{s/r'-1}|\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)|^s\right)^{1/s}\le\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^{q_1}k^{q_1/p_1'-1}\right)^{1/q_1}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\widehat{g}(k)|^{q_2}k^{q_2/p_2'-1}\right)^{1/q_2}. \quad (3.6)$$

Если $a=\{0,\dots,0,\widehat{f}(n),\widehat{f}(n+1),\dots\}$, $b=\{0,\dots,0,\widehat{g}(n),\widehat{g}(n+1),\dots\}$, то правая часть неравенства (3.6) не превосходит $\|a\|_{l^{p_1'},q_1}\|b\|_{l^{p_2'},q_2}$, что по леммам 6, 8 не больше, чем

$$C_1\|f-S_n(f)\|^*_{p_1,q_1}\|g-S_n(g)\|^*_{p_2,q_2}\le C_2E_n(f)_{p_1,q_1}E_n(g)_{p_2,q_2}.$$

Если $\{\widehat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\widehat{g}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ квазимонотонны, то, как отмечено в ([15], раздел II, теорема 3),

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\widehat{f}(n))^{q_1}k^{q_1/p_1'-1}\right)^{1/q_1}\asymp\|\{\widehat{f}(k)\}_{k=1}^{\infty}\|_{p_1',q_1}$$

и аналогично (3.5) получаем оценку (3.1). Так как последовательности a и b, введенные выше, не являются квазимонотонными, из (3.6) не следует (3.2). Вместо них рассмотрим $c=\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $d=\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $c_k=\begin{cases}\widehat{f}(n), & 1\le k\le n;\\ \widehat{f}(k), & k>n,\end{cases}$ $d_k=\begin{cases}\widehat{g}(n), & 1\le k\le n;\\ \widehat{g}(k), & k>n.\end{cases}$ Очевидно, что c и d являются квазимонотонными и в силу (3.6) и леммы 8

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{s/r'-1}|\widehat{f}(n)\widehat{g}(n)|^s\right)^{1/s}\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{q_1/p_1'-1}c_k^{q_1}\right)^{1/q_1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{q_2/p_2'-1}d_k^{q_2}\right)^{1/q_2}\le$$
$$\le C_2\|c\|_{p_1',q_1}\|d\|_{p_2',q_2}\le C_3\|f-S_n(f)+\widehat{f}(n)D_n'\|^*_{p_1,q_1}\|g-S_n(g)+\widehat{g}(n)D_n'\|^*_{p_2,q_2}, \quad (3.7)$$

где $D'_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\chi_k$, $D'_1=0$. Но по лемме 6

$$\|f-S_n(f)\|^*_{p_1,q_1}=O(E_n(f)_{p_1,q_1}),\quad \|g-S_n(g)\|^*_{p_2,q_2}=O(E_n(g)_{p_2,q_2}),$$

а по лемме 9

$$\widehat{f}(n)\|D'_n\|^*_{p_1,q_1}=O(E_n(f)_{p_1,q_1}),\quad \widehat{g}(n)\|D'_n\|^*_{p_2,q_2}=O(E_n(g)_{p_2,q_2}),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Подставляя эти соотношения в (3.7), выводим (3.2).

2) Пусть $1<p_1,p_2<2$, $q_1=p_1'$, $q_2=p_2'$, $1/r=1/p_1+1/p_2-1$, $1/s=1/p_1'+1/p_2'$, т.е. $s=r'$. Тогда (3.6) превращается в

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)|^{r'}\right)^{1/r'}\le\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^{p_1'}\right)^{1/p_1'}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\widehat{g}(k)|^{p_2'}\right)^{1/p_2'}. \quad (3.8)$$

По теореме Хаусдорфа–Юнга–Ф. Рисса и аналогу теоремы М. Рисса (см. лемму 3 при $p = q$) правая часть (3.8) не превосходит $C_3\|f - S_n(f)\|_{p_1}\|g - S_n(g)\|_{p_2} \le C_4 E_n(f)_{p_1} E_n(g)_{p_2}$ и (3.4) доказано. Неравенство (3.3) доказывается аналогично. □

Замечание 1. Утверждение п. 2) теоремы 1 является аналогом теоремы 1 из [11].

Докажем точность теоремы 1 в некотором смысле.

Теорема 2. 1) *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2,\ 1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1,\ 1 \le q_1, q_2 < \infty,\ 1/s = 1/q_1 + 1/q_2$. *Если* $\theta < s$, *то существует* $f_0 \in L^{p_1,q_1}[0,1)$, $g_0 \in L^{p_2,q_2}[0,1)$ *такие, что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{r,\theta}[0,1)$ *и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta/r'-1}(\widehat{h_0}(k))^{\theta} \tag{3.9}$$

расходится.

2) *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2,\ 1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$. *Если* $\theta > r$ *и* $\gamma < r'$, *то найдутся* $f_0 \in L^{p_1}[0,1)$, $g_0 \in L^{p_2}[0,1)$ *такие, что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{\theta}[0,1)$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{h_0}(k)|^{\gamma}$ *расходится.*

Доказательство. 1) Рассмотрим функцию $f_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/p_1'} \ln^{-1/q_1-\varepsilon}(Nn)\chi_n(x)$, где $\varepsilon > 0$ и значение $N \ge 2$ будет определено ниже. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q_1/p_1'-1}(\widehat{f_0}(k))^{q_1} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}(\ln(k+1))^{-1-q_1\varepsilon} < \infty.$$

С другой стороны, функция $\varphi(x) = x^{1/p}(\ln Nx)^{-1/q-\varepsilon}$ имеет производную

$$\varphi'(x) = \frac{x^{1/p-1}}{(\ln Nx)^{1/q+\varepsilon} + 1}\left(\frac{\ln Nx}{p} - (1/q + \varepsilon)\right)$$

и возрастает при $x \ge 1$, $0 < \varepsilon < 1$ и $N \ge \exp(p(1/q + 1))$. Таким образом, для $a_n = n^{-1/p_1'} \ln^{-1/q_1-\varepsilon}(Nn)$ при достаточно больших N последовательность $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и по лемме 4 имеем $f_0 \in L^{p_1,q_1}[0,1)$. Аналогично при достаточно больших N функция

$$g_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/p_2'} \ln^{-1/q_2-\varepsilon}(Nn)\chi_n(x)$$

принадлежит $L^{p_2,q_2}[0,1)$.

С другой стороны, для $h_0 = f_0 * g_0$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta/r'-1}(\widehat{h_0}(k))^{\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(1/r'-1/p'_1-1/p'_2)-1}(\ln(Nk))^{-\theta/q_1-\theta/q_2-2\theta\varepsilon} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}(\ln(k+1))^{-\theta/s-2\theta\varepsilon}. \tag{3.10}$$

Так как $\theta < s$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем $\theta/s + 2\varepsilon\theta < 1$ и ряд в правой части (3.10) расходится. Теми же рассуждениями, что и в начале доказательства устанавливаем

$$n\widehat{h_0}(n) = n^{1-p_1'-p_2'}(\ln Nn)^{-1/q_1-1/q_2-2\varepsilon}$$

возрастает при всех $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1$ и достаточно больших N. В итоге по лемме 4 при достаточно больших N и достаточно малых $\varepsilon > 0$ верно, что $h_0 \notin L^{r.\theta}[0,1)$ при $\theta < s$ и ряд (3.9) расходится, а также, как установлено ранее, $f_0 \in L^{p_1,q_1}[0,1)$ и $g_0 \in L^{p_2,q_2}[0,1)$. Утверждение 1) доказано.

2) Аналогично доказательству 1) имеем $f_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/p_1'} \ln^{-1}(n+1)\chi_n(x)$ и $g_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/p_2'} \ln^{-1}(n+1)\chi_n(x)$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p_1-2}(\widehat{f_0}(n))^{p_1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}\ln^{-p_1}(n+1) < \infty$ и по лемме 10 получаем $f_0 \in L^{p_1}[0,1)$. Аналогично, $g_0 \in L^{p_2}[0,1)$. Но для $h_0 = f_0 * g_0$ при $\theta > r$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\theta-2}(\widehat{h_0}(n))^{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\theta-2-\theta(1/p_1'+1/p_2')}(\ln(n+1))^{-2\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\theta-2-\theta+\theta/r}(\ln(n+1))^{-2\theta} = \infty,$$

что по лемме 10 дает $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{\theta}[0,1)$. Если же $\gamma < r'$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\widehat{h_0}(n))^{\gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma(1/p_1'+1/p_2')}\ln^{-2\gamma}(n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma/r'}\ln^{-2\gamma}(n+1) = +\infty. \qquad \square$$

Замечание 2. Утверждение 1) теоремы 2 частично обобщает результат Л. Япа ([24], теорема 2). Утверждение 2) теоремы 2 является аналогом теоремы 2 из [11].

В следующем утверждении обсуждается точность неравенства (3.4) из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$. *Пусть последовательности* $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *убывают к нулю и для них выполнены условия*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \nu_k^{p_1} k^{-1} \asymp \nu_n^{p_1}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k^{p_2} k^{-1} \asymp \mu_n^{p_2}, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{3.11}$$

и, кроме того, $\nu_n \le C\nu_{2n}$, $\mu_n \le C\mu_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют функции* $f_0 \in L^{p_1}[0,1)$, $g_0 \in L^{p_2}[0,1)$ *такие, что* $E_n(f_0)_{p_1} \asymp \nu_n$, $E_n(g_0)_{p_2} \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$ *и для* $h_0 = f_0 * g_0 \in L^r[0,1)$ *верно* $\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty} (\widehat{h_0}(k))^{r'}\Big)^{1/r'} \asymp \nu_n\mu_n$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n n^{-1/p'_1}\chi_n(x) \quad \text{и} \quad g_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n n^{-1/p'_2}\chi_n(x).$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p_1-2}(\widehat{f_0}(n))^{p_1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n^{p_1} n^{-1} < \infty$. По лемме 10 имеем $f_0 \in L^{p_1}[0,1)$ и в силу (3.11) справедливо неравенство

$$E_n(f_0)_{p_1} \le C_1\Bigg(n^{1-1/p_1}\widehat{f_0}(n) + \Bigg(\sum_{k=n}^{\infty} k^{p_1-2}(\widehat{f_0}(k))^{p_1}\Bigg)^{1/p_1}\Bigg) = $$

$$= C_1\Bigg(\nu_n + \Bigg(\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\nu_k^{p_1}\Bigg)^{1/p_1}\Bigg) \le C_2\nu_n.$$

С другой стороны, согласно частному случаю $p = q$ леммы 6, (3.11) и теореме Пэли ([5], гл. 2, § 4) получаем

$$E_n(f_0)_{p_1} \ge C_3\|f_0 - S_n(f_0)\|_{p_1} \ge C_4\Bigg(\sum_{k=n}^{\infty} k^{p_1-2}(\widehat{f_0}(k))^{p_1}\Bigg)^{1/p_1} = C_4\Bigg(\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\nu_k^{p_1}\Bigg)^{1/p_1} \ge C_5\nu_n.$$

Таким образом, $E_n(f_0)_{p_1} \asymp \nu_n$, $n \in \mathbb{N}$, и аналогично доказывается, что $E_n(g_0)_{p_2} \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для $h_0 = f_0 * g_0$ имеем

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}(\widehat{h_0}(k))^{r'}\right)^{1/r'} = \left(\sum_{k=n}^{\infty}(\nu_k\mu_k)^{r'}k^{-1}\right)^{1/r'} \geq$$
$$\geq \left(\sum_{k=n+1}^{2n}(\nu_k\mu_k)^{r'}k^{-1}\right)^{1/r'} \geq \nu_{2n}\mu_{2n}2^{-1/r'} \geq 2^{-1/r'}C^{-2}\nu_n\mu_n = C_6\nu_n\mu_n.$$

Здесь использованы неравенства $\nu_n \leq C\nu_{2n}$, $\mu_n \leq C\mu_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, из условия теоремы. Противоположная оценка следует из теоремы 1. □

Замечание 3. Утверждение теоремы 3 является обобщением тригонометрического результата из [11], где рассматривались последовательности $\nu_n = n^{-\alpha}$, $\mu_n = n^{-\beta}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, которые удовлетворяют условиям теоремы 3.

Сформулируем результат, аналогичный теореме 3, для случая $f, g \in L^{p,q}[0,1)$, $p > 2$.

Теорема 4. 1) *Пусть* $2 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $f, g \in L^{p,q}[0,1)$, $h = f * g$. *Тогда* $\sum\limits_{k=n}^{\infty}|\widehat{h}(k)| \leq CE_n(f)_{p,q}E_n(f)_{p,q}$.

2) *Пусть* $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— убывающие к нулю последовательности такие, что*

$$\sum_{k=n}^{\infty}\nu_k k^{-1} \asymp \nu_n, \quad \sum_{k=n}^{\infty}\mu_k k^{-1} \asymp \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

и $\nu_k \leq C\nu_{2k}$, $\mu_k \leq C\mu_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют* $f_0 \in C^*[0,1)$, $g_0 \in C^*[0,1)$ *такие, что* $E_n(f_0)_\infty \asymp \nu_n$, $E_n(g_0)_\infty \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, *и для* $h_0 = f_0 * g_0$ *справедливо соотношение*

$$\sum_{k=n}^{\infty}|\widehat{h}(k)| \asymp \nu_n\mu_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. 1) В силу неравенства Коши–Буняковского, равенства Парсеваля и свойства частичных сумм Фурье в $L^2[0,1)$ находим

$$\sum_{k=n}^{\infty}|\widehat{h}(k)| = \sum_{k=n}^{\infty}|\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)| \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\widehat{g}(k)|^2\right)^{1/2} =$$
$$= \|f - S_n(f)\|_2\|g - S_n(g)\|_2 = E_n(f)_2E_n(g)_2.$$

Известно [2], что при $2 < p < \infty$ и $1 \leq q < \infty$ верно неравенство $\|\cdot\|_2 \leq C_1\|\cdot\|_{p,q}$, поэтому $E_n(f)_2E_n(g)_2 \leq C_1^2E_n(f)_{p,q}E_n(g)_{p,q}$, $n \in \mathbb{N}$, откуда следует утверждение 1).

2) Рассмотрим функции $f_0(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_{m_k}\chi_{m_k}(x)$ и $g_0(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_{m_k}\chi_{m_k}(x)$. Согласно лемме 7 для $n \in (m_k, m_{k+1}]$ имеем $E_n(f_0)_\infty \asymp \sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\nu_{m_j} \asymp \nu_n$, $n \in \mathbb{N}$, в силу условия (3.12) и условия на ν_n. Аналогично, $E_n(g_0)_\infty \asymp \mu_n$. Далее,

$$\sum_{j=n}^{\infty}|\widehat{f_0}(j)\widehat{g_0}(j)| = \sum_{i=k+1}^{\infty}\nu_{m_i}\mu_{m_i} \geq \nu_{m_{k+1}}\mu_{m_{k+1}} \geq C_2\nu_n\mu_n$$

в силу условий п. 2). Обратное неравенство следует из 1). □

Авторы выражают признательность рецензенту за замечания и советы, которые помогли улучшить текст работы, а также за указание на работу [24].

Литература

[1] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша* (Наука, М., 1987).

[2] Hunt R.A. *On $L(p,q)$ spaces*, L'Enseign. Math. **12** (3), 249–275 (1966).

[3] Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах* (Мир, М., 1974).

[4] Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах* (Элм, Баку, 1981).

[5] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды* (Физматгиз, М., 1961).

[6] Onneweer C.W. *On absolutely convergent Fourier series*, Arkiv Math. **12** (1–2), 51–58 (1974).

[7] Onneweer C.W. *Absolute convergence of Fourier series on certain groups.* II, Duke Math. J. **41** (3), 679–688 (1974).

[8] Волосивец С.С. *О сходимости рядов из коэффициентов Фурье мультипликативных сверток*, Изв. вузов. Матем., № 11, 27–39 (2008).

[9] Izumi M., Izumi S.-I. *Absolute convergence of Fourier series of convolution functions*, J. Approxim. Theory **1** (1), 103–109 (1968).

[10] Ilyasov N.A. *To the M. Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series*, Transactions of NAS of Azerbaijan, Ser. phys.-tech. and math. sci. **24** (1), 113–120 (2004).

[11] Ilyasov N.A. *To the M. Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series (second report)*, Transactions of NAS of Azerbaijan, Ser. phys.-tech. and math. sci. **24** (4), 135–142 (2004).

[12] Ильясов Н.А. *Скоростная L_p-версия критерия М. Рисса абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье*, Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН **16** (4), 193–202 (2010).

[13] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов* (Наука, М., 1978).

[14] Volosivets S.S. *On Hardy and Bellman transforms of series with respect to multiplicative systems in symmetric spaces*, Anal. Math. **35** (2), 131–148 (2009).

[15] Sagher Y. *An application of interpolation theory to Fourier series*, Studia Math. **41** (2), 169–181 (1972).

[16] Волосивец С.С. *О некоторых условиях в теории рядов по мультипликативным системам*, Anal. Math. **33** (3), 227–246 (2007).

[17] O'Neil R. *Convolution operators and $L(p,q)$ spaces*, Duke Math. J. **30** (1), 129–142 (1963).

[18] Young W.S. *Mean convergence of generalized Walsh–Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **218**, 311–320 (1976).

[19] Стечкин С.Б. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье* (*третье сообщение*), Изв. АН СССР. Сер. матем. **20** (3), 385–412 (1956).

[20] Тиман М.Ф., Рубинштейн А.И. *О вложении классов функций, определенных на нуль-мерных группах*, Изв. вузов. Матем., № 6, 66–76 (1980).

[21] Агафонова Н.Ю. *О наилучших приближениях функций по мультипликативным системам и свойствах их коэффициентов Фурье*, Anal. Math. **33** (3), 247–262 (2007).

[22] Конюшков А.А. *Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье*, Матем. сб. **44** (1), 53–84 (1958).

[23] Харди Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. *Неравенства* (Ин. лит., М., 1948).

[24] Yap L.Y.H. *Convolution functions on compact Abelian groups*, Anal. Math. **3** (4), 317–320 (1977).

С.С. Волосивец

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,

ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,

`e-mail:` VolosivetsSS@mail.ru

М.А. Кузнецова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,

ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,

`e-mail:` maffka2@bk.ru

S.S. Volosivets and M.A. Kuznetsova

Multiplicative convolutions of functions from Lorentz spaces and convergence of series from Fourier–Vilenkin coefficients

Abstract. Let f and g be functions from different Lorentz spaces $L^{p,q}[0,1)$, h be their multiplicative convolution and $\widehat{h}(k)$ be Fourier coefficients of h with respect to a multiplicative system with bounded generating sequence. We estimate the remainder of the series of $|\widehat{h}(k)|^a$ with multiplicators of type k^b in terms of best approximations of f and g in corresponding Lorentz spaces. We establish the sharpness of this result and its corollaries for Lebesgue spaces.

Keywords: Lorentz space, multiplicative system, Fourier coefficients, multiplicative convolution, best approximation.

S.S. Volosivets

Saratov State National Research University,
83 Astrakhanskya str., Saratov, 410012 Russia,

`e-mail:` VolosivetsSS@mail.ru

M.A. Kuznetsova

Saratov State National Research University,
83 Astrakhanskya str., Saratov, 410012 Russia,

`e-mail:` maffka2@bk.ru