ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (487)

УДК 519.683

С.В. ШПИРКО

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Постановка задачи

Пусть V — заданное множество из n-мерного евклидового пространства E^n, функция $\Phi(v,w)$ определена на прямом произведении $V \times V$.

Задача равновесного программирования формулируется следующим образом: требуется найти такую точку $v^* \in V$, чтобы выполнялось неравенство

$$\Phi(v^*, v^*) \le \Phi(v^*, w) \quad \forall w \in V. \tag{1}$$

Интерес к равновесным задачам обусловлен тем, что они описывают на модельном уровне различные игровые ситуации, связанные с поиском компромисса и согласования интересов сторон. В этой связи достаточно упомянуть такие важные игровые постановки, как седловые задачи, игры с равновесием по Нэшу, обратные задачи линейного программирования [1].

Наряду с (1) будем рассматривать некоторую модификацию равновесной задачи — найти такую точку $\widehat{v} \in V$, что

$$\Phi(w, \widehat{v}) \le \Phi(w, w) \quad \forall w \in V. \tag{2}$$

В дальнейшем задачу (2) будем называть слабой равновесной задачей, а исходную задачу (1) — сильной. Отметим, что в определенном смысле задачу (2) можно рассматривать как двойственную к исходной задаче (1). Действительно [2], если ввести функцию

$$\psi(v,w) = \Phi(v,v) - \Phi(v,w),$$

то решения задач (1) и (2) будут связаны соотношением

$$\psi(v^*, w) \le \psi(v^*, v^*) \equiv 0 \le \psi(w, \widehat{v}) \quad \forall w \in V.$$

В то же время, как будет показано далее, задача (2) обладает целым рядом преимуществ по сравнению с исходной (1).

Задачи (1) и (2) будем исследовать в предположении, что целевая функция $\Phi(v,w)$ кососимметрична, т. е.

$$\Phi(v,v) - \Phi(v,w) - \Phi(w,v) + \Phi(w,w) \ge 0 \quad \forall v, w \in V. \tag{3}$$

Подчеркнем, что понятие кососимметричности впервые было предложено в [2] в качестве достаточного условия сходимости методов.

Выясним, как связаны между собой обе равновесные задачи (1) и (2).

Лемма 1. *Пусть функция $\Phi(v,w)$ кососимметрична. Тогда любое решение задачи* (1) *является решением задачи* (2). *Если множество V выпукло, а $\Phi(v,w)$ непрерывна по v при любой фиксированной w и выпукла по w при любой v, то решение задачи* (2) *является решением задачи* (1).

Доказательство. Пусть выполнено (1). Отсюда с учетом (3) следует

$$0 \le \Phi(v^*, w) - \Phi(v^*, v^*) \le \Phi(w, w) - \Phi(w, v^*),$$

т. е. v^* — решение задачи (2).

Пусть теперь выполнены все условия леммы и пусть $\widehat{v}$ — решение задачи (2). Зафиксируем произвольную точку $w \in V$. Тогда (2) будет справедливо и для любой промежуточной точки $w(\alpha) = \alpha\widehat{v} + (1-\alpha)w$, $0 < \alpha < 1$,

$$\Phi(w(\alpha), \widehat{v}) \le \Phi(w(\alpha), w(\alpha)).$$

Отсюда в силу выпуклости $\Phi(v, w)$ по второй переменной w имеем

$$\Phi(w(\alpha), \widehat{v}) \le \Phi(w(\alpha), w(\alpha)) \le \alpha\Phi(w(\alpha), \widehat{v}) + (1-\alpha)\Phi(w(\alpha), w),$$

т. е. $(1-\alpha)\Phi(w(\alpha), \widehat{v}) \le (1-\alpha)\Phi(w(\alpha), w)$, $0 < \alpha < 1$.

Разделив обе части неравенства на $1 - \alpha > 0$, перейдем в полученном неравенстве к пределу по $\alpha \to 1$. Отсюда с учетом непрерывности $\Phi(v, w)$ по v приходим к требуемому неравенству

$$\Phi(\widehat{v}, \widehat{v}) = \lim_{\alpha\to 1} \Phi(w(\alpha), \widehat{v}) \le \lim_{\alpha\to 1} \Phi(w(\alpha), w) = \Phi(\widehat{v}, w) \quad \forall w \in V. \qquad \square$$

Нетрудно привести простые примеры, когда множество V^* сильных решений имеет достаточно сложную структуру (напр., оно может состоять из любого числа изолированных точек). В то же время верна

Лемма 2. *Пусть $\Phi(v, w)$ выпукла по w при фиксированной v и множество $\widehat{V}$ слабых решений (2) непусто. Тогда оно выпукло.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные точки $\overline{v}_1^*, \overline{v}_2^* \in \widehat{V}$ и рассмотрим произвольную промежуточную точку $v^*(\alpha) = \alpha\overline{v}_1^* + (1-\alpha)\overline{v}_2^*$, $0 < \alpha < 1$. Тогда в силу выпуклости $\Phi(v, w)$ по w и определения (2) имеем

$$\Phi(w, v^*(\alpha)) \le \alpha\Phi(w, \overline{v}_1^*) + (1-\alpha)\Phi(w, \overline{v}_2^*) \le \alpha\Phi(w, w) + (1-\alpha)\Phi(w, w) = \Phi(w, w),$$

т.е. $v^*(\alpha) \in \widehat{V}$ и, следовательно, $\widehat{V}$ выпукло. $\square$

Одна из главных проблем в теории равновесного программирования состоит в выяснении условий существования равновесного решения. Как следует из леммы 1, в общем случае множество слабых решений (2) включает в себя все сильные решения (1). Отсюда можно предположить, что для существования решений задачи (2) требуются более слабые условия, чем для существования сильных решений (1).

2. Существование и единственность решения в сильно кососимметричном случае

Как следует из теоремы Какутани [3], равновесная задача (1) имеет хотя бы одно решение, если множество V — выпуклый компакт, а функция $\Phi(v, w)$ выпукла по переменной w и непрерывна по v.

Возникает вопрос: можно ли ослабить условия существования равновесного решения, например, отказаться от требования ограниченности допустимого множества V. Оказывается, это возможно, но при этом целевая функция $\Phi(v, w)$ должна удовлетворять одному дополнительному условию. А именно, по аналогии с сильно выпуклыми задачами оптимизации введем понятие сильной кососимметричности целевой функции

$$\Phi(v, v) - \Phi(v, w) - \Phi(w, v) + \Phi(w, w) \ge \beta\|v - w\|^2 \quad \forall v, w \in V, \tag{4}$$

где $\beta > 0$ — константа сильной кососимметричности.

Прежде всего понятно, что любая сильно кососимметричная функция является просто кососимметричной функцией.

Класс сильно кососимметричных функций достаточно широк. В качестве примеров сильно кососимметричных функций можно привести функции типа скалярного произведения (с константой $\beta = 1$) $\Omega(v, w) = \langle v - a, w - a\rangle$, функции вида $\Phi(v, w) = -w/v$. Также нетрудно показать, что если функция $\Phi(v, w)$ является сильно кососимметричной с константой $\beta > 0$, то ее сумма с любой кососимметричной функцией даст сильно кососимметричную функцию с той же константой β. Умножение сильной кососимметричной функции на положительное число приводит к умножению константы β на то же число.

Сначала докажем существование единственного решения в сильно кососимметричном случае для слабой равновесной задачи.

Теорема 1. *Пусть множество $V \in R^n$ выпукло и замкнуто; функция $\Phi(v, w)$ выпукла и дифференцируема по w при фиксированной v и удовлетворяет условию сильной кососимметричности* (4). *Тогда задача* (2) *имеет единственное решение $\widehat{v}^*$, причем выполнено неравенство*

$$\Phi(w, \widehat{v}^*) + \beta\|\widehat{v}^* - w\|^2 \le \Phi(w, w) \quad \forall w \in V. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем вначале, что задача (2) имеет хотя бы одно решение. Заметим, что из (5) следует, что точка $\widehat{v}^*$ является точкой слабого решения (2). Поэтому достаточно доказать существование точки $\widehat{v}^*$, удовлетворяющей (5). Для каждой точки $w \in V$ поставим в соответствие множество

$$S(w) = \{v \in V : \Phi(w, v) + \beta\|v - w\|^2 \le \Phi(w, w)\}.$$

Прежде всего отметим, что $S(w)$ непусто (оно содержит, напр., саму точку w). Далее, при каждой фиксированной w множество $S(w)$ является множеством Лебега для сильно выпуклой по v функции

$$\Phi(w, v) + \beta\|v - w\|^2.$$

Поэтому оно выпукло и компактно [4].

Предположим, что неравенство (5) не выполнено. Это значит, что для любой точки $v \in V$ всегда найдется такая $\widetilde{w} = \widetilde{w}(v) \in V$, что соответствующее множество $S(\widetilde{w})$ не содержит данную точку v:

$$\forall v \in V \quad \exists \widetilde{w} = \widetilde{w}(v) : \Phi(\widetilde{w}, v) + \beta\|v - \widetilde{w}\|^2 > \Phi(\widetilde{w}, \widetilde{w}).$$

Другими словами, бесконечная система выпуклых компактов $S(w)$ не имеет общей точки, т. е.

$$\bigcap_{w \in V} S(w) \equiv \emptyset.$$

Тогда по теореме Хелли ([5], с. 68) найдутся точки $w_i \in V$ такие, что

$$\bigcap_{i=0}^{n} S(w_i) \equiv \emptyset.$$

Но это означает, что минимум сильно выпуклой функции максимума

$$\overline{\mu}(v) = \max_{0 \le i \le n} \{\Phi(w_i, v) + \beta\|w_i - v\|^2 - \Phi(w_i, w_i)\}$$

строго положителен, т. е. $\Delta = \min_{v \in V} \overline{\mu}(v) > 0$. Покажем, что это невозможно.

Обозначим через $\overline{v}^* = \operatorname{argmin}\{\widehat{\mu}(v) \mid v \in V\}$. Тогда по теореме 4.3.1 из [6] найдутся неотрицательные множители α_i такие, что

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1, \quad \overline{\mu}(\overline{v}^*) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{\Phi(w_i, \overline{v}^*) + \beta\|w_i - \overline{v}^*\|^2 - \Phi(w_i, w_i)\},$$

$$\Big\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{\nabla_2 \Phi(w_i, \overline{v}^*) + 2\beta(\overline{v}^* - w_i)\}, w - \overline{v}^* \Big\rangle \ge 0 \quad \forall w \in V. \tag{6}$$

Здесь через $\nabla_2\Phi(w, v)$ обозначен градиент функции $\Phi(w, v)$ по второй переменной.

Обозначим $\overline{w} = \sum\limits_{i=0}^{n} w_i$. Отметим, что $\overline{w} \in V$ в силу выпуклости множества V. Тогда в силу выпуклости $\Phi(v,w)$ по w имеем

$$0 < \Delta = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{\Phi(w_i, \overline{v}^*) + \beta \|w_i - \overline{v}^*\|^2 - \Phi(w_i, w_i)\} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{\langle \nabla_2 \Phi(w_i, \overline{v}^*), \overline{v}^* - \overline{w}\rangle + \Phi(w_i, \overline{w}) - \Phi(w_i, w_i) + \beta \|w_i - \overline{v}^*\|^2\}.$$

Продолжим далее цепочку неравенств с учетом (6) и (4)

$$0 < \Delta \leq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{2\beta \langle \overline{v}^* - w_i, \overline{w} - \overline{v}^*\rangle + \beta \|w_i - \overline{v}^*\|^2 + \Phi(w_i, \overline{w}) - \Phi(w_i, w_i)\} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{2\beta \langle \overline{v}^* - w_i, \overline{w} - \overline{v}^*\rangle + \beta \|w_i - \overline{v}^*\|^2 + \Phi(\overline{w}, \overline{w}) - \Phi(\overline{w}, w_i) - \beta \|\overline{w} - w_i\|^2\}.$$

Поскольку $\Phi(v,w)$ выпукла по w, то $\Phi(\overline{w}, \overline{w}) \leq \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \Phi(\overline{w}, w_i)$. Подставляя это в предыдущее неравенство, имеем

$$0 < \Delta \leq \Phi(\overline{w}, \overline{w}) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \Phi(\overline{w}, w_i) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{2\beta \langle \overline{v}^* - w_i, \overline{w} - \overline{v}^*\rangle + \beta \|w_i - \overline{v}^*\|^2 - \beta \|\overline{w} - w_i\|^2\} \leq$$

$$\leq \beta \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{2\langle \overline{v}^* - w_i, \overline{w} - \overline{v}^*\rangle + \|w_i - \overline{v}^*\|^2 - \|\overline{w} - w_i\|^2\}.$$

Преобразовывая полученное неравенство по формуле разности квадратов, приходим к противоречию

$$0 < \Delta \leq \beta \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{2\langle \overline{v}^* - w_i, \overline{w} - \overline{v}^*\rangle + \langle w_i - \overline{v}^* - \overline{w} + w_i, w_i - \overline{v}^* + \overline{w} - w_i\rangle\} =$$

$$= \beta \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \langle 2\overline{v}^* - 2w_i + w_i - \overline{v}^* - \overline{w} + w_i, \overline{w} - \overline{v}^*\rangle = -\beta \|\overline{w} - \overline{v}^*\|^2 \leq 0.$$

Следовательно, исходное предположение было неверным и задача (2) всегда имеет решение $\widehat{v}^*$, причем удовлетворяющее неравенству (5). Докажем теперь, что данное решение единственно.

Предположим противное, т. е. помимо точки $\widehat{v}^*$, удовлетворяющей неравенству (5), существует другое решение $\overline{v}$ задачи (2).

Рассмотрим точку $\overline{w} = (\widehat{v}^* + \overline{v})/2$. В силу выпуклости множества V точка $\overline{w} \in V$.

С одной стороны, используя (5) и выпуклость $\Phi(v,w)$ по w, имеем

$$0 < \beta \|\overline{w} - \widehat{v}^*\|^2 \leq \Phi(\overline{w}, \overline{w}) - \Phi(\overline{w}, \widehat{v}^*) \leq \langle \nabla_2 \Phi(\overline{w}, \overline{w}), \overline{w} - \widehat{v}^*\rangle =$$
$$= \langle \nabla_2 \Phi(\overline{w}, \overline{w}), \overline{w} - 2\overline{w} + \overline{v}\rangle = \langle \nabla_2 \Phi(\overline{w}, \overline{w}), \overline{v} - \overline{w}\rangle.$$

С другой стороны, из выпуклости $\Phi(v,w)$ по w и определения слабого решения (2) получаем

$$\langle \nabla_2 \Phi(\overline{w}, \overline{w}), \overline{v} - \overline{w}\rangle \leq \Phi(\overline{w}, \overline{v}) - \Phi(\overline{w}, \overline{w}) \leq 0.$$

Таким образом, приходим к противоречию. $\square$

В непрерывном случае, как следует из леммы 1, данная теорема доказывает существование решения для исходной сильной задачи (1). Поэтому приведем формулировку соответствующей теоремы без доказательства.

Теорема 2. *Пусть множество $V \in R^n$ выпукло и замкнуто; функция $\Phi(v, w)$ выпукла и дифференцируема по w при фиксированной v, непрерывна по v при фиксированной w и удовлетворяет условию сильной кососимметричности* (4). *Тогда задача* (1) *имеет единственное решение.*

Подчеркнем, что в сильно кососимметричном случае равновесное решение существует и без предположения об ограниченности допустимого множества, что несколько улучшает результаты теоремы Какутани. И более того, это решение оказывается единственным.

3. Существование решения в кососимметричном случае

В просто кососимметричном случае слабая задача (2) имеет по крайней мере одно решение. Соответствующее доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1 и во многом ее повторяет.

Теорема 3. *Пусть множество $V \in R^n$ — выпуклый компакт; функция $\Phi(v, w)$ выпукла и дифференцируема по w при фиксированной v и удовлетворяет условию кососимметричности* (3). *Тогда множество $\widehat{V}$ решений задачи* (2) *непусто и выпукло.*

Как следует из данной теоремы, для существования слабого равновесного решения (2) не требуется непрерывность $\Phi(v, w)$ по v, что позволяет несколько уточнить результаты теоремы Какутани.

В непрерывном случае аналогичный факт справедлив и для исходной задачи (1). Поэтому приведем формулировку соответствующей теоремы также без доказательства.

Теорема 4. *Пусть множество $V \in R^n$ — выпуклый компакт; функция $\Phi(v, w)$ выпукла и дифференцируема по w при фиксированной v, непрерывна по v при фиксированной w и кососимметрична* (3). *Тогда множество V^* решений задачи* (1) *непусто и выпукло.*

В заключение автор выражает большую и искреннюю благодарность своим научным руководителям А.С. Антипину и Ф.П. Васильеву за помощь при выполнении работы.

Литература

1. Антипин А.С. *Итеративные методы прогнозного типа для вычисления неподвижных точек экстремальных отображений* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 17–27.
2. Антипин А.С. *Равновесное программирование: методы градиентного типа* // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 8. – С. 166–178.
3. Обэн Ж.-П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения.* – М.: Мир, 1988. – 267 с.
4. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1980. – 518 с.
5. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. *Курс методов оптимизации.* – М.: Наука, 1986. – 328 с.
6. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. *Введение в минимакс.* – М.: Наука, 1972. – 368 с.

Вычислительный центр
Российской Академии наук,
г. Москва

Поступили
первый вариант 03.04.2001
окончательный вариант 05.09.2002