ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (487)

УДК 517.977

А.В. АРГУЧИНЦЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ТОЧНЫХ ФОРМУЛ ПРИРАЩЕНИЯ

Введение

Задачи оптимального управления системами гиперболических уравнений первого порядка с управляемыми начально-краевыми условиями, заданными в виде конечномерных связей, имеют несколько принципиальных особенностей. Во-первых, в задачах такого вида несправедлив аналог классического поточечного принципа максимума. В [1] для данного класса задач автором доказан вариационный принцип максимума. Оптимальное граничное или стартовое управление доставляет максимум специальному функционалу в задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений, построенной на характеристиках исходной гиперболической системы. Во-вторых, в задачах такого типа принципиально невозможно применение весьма эффективных численных методов [2], [3], основанных на идеях наиболее емких аппроксимаций целевых функционалов и динамических систем. Это вызвано тем, что вспомогательные управления на каждом шаге методов строятся как функции, зависящие от состояния процесса. Обобщение данного подхода на гиперболические системы возможно в случае распределенных управлений, входящих в правые части систем [3]. В случае же граничных или стартовых управлений принципиальная трудность заключается в несовпадении числа независимых переменных для функций управления и состояния.

В данной статье исследуется специальный класс задач оптимального управления линейными гиперболическими системами первого порядка, в котором граничные условия определяются из управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой нестандартный способ задания краевых условий вызван, с одной стороны, желанием преодолеть перечисленные выше трудности, а с другой, наличием ряда конкретных прикладных задач данного типа [4]–[6].

В [7] показана справедливость классического принципа максимума для указанного класса задач. В данной работе для простоты изложения рассмотрен вариант линейной гиперболической системы, линейного целевого функционала и линейной управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с зависящими от управления коэффициентами при фазовых переменных. Последнее обстоятельство (билинейность системы обыкновенных дифференциальных уравнений) приводит к тому, что принцип максимума не будет являться достаточным условием оптимальности. Попытка же применения для рассматриваемой задачи общих итерационных схем принципа максимума [8] приводит к бесконечному итерационному процессу. На каждой итерации возникает необходимость неоднократного интегрирования системы гиперболических уравнений.

В предлагаемой статье на основе применения неклассического точного варианта формулы приращения удалось свести задачу к задаче оптимального управления системой обыкновенных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00243) и программы "Университеты России" (проект УР.03.01.008).

дифференциальных уравнений. При этом исходную гиперболическую систему необходимо проинтегрировать всего лишь два раза: в начале процесса после выбора начального управления и в самом его конце. Отметим также, что возникшую в результате сведения задачу оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений можно решать с помощью всего арсенала существующих достаточно эффективных методов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимизации системы гиперболических уравнений первого порядка с линейной правой частью

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = g(x,s,t), \qquad (1)\\ g(x,s,t) = \Phi(s,t)x + f(s,t),\\ (s,t) \in P, \quad P = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1].\end{gathered}$$

Здесь $x = x(s,t)$ — n-мерная вектор-функция, $A(s,t)$ — диагональная матрица размерности $n \times n$. Отметим, что к системе с диагональной матрицей коэффициентов сводится произвольная система гиперболических уравнений первого порядка ([9], с. 25–28). Дополнительно предположим, что диагональные элементы $a_i(s,t)$, $i = 1, \dots, n$, матрицы $A(s,t)$ знакопостоянны в прямоугольнике P: $a_i(s,t) > 0$, $i = 1, \dots, m_1$; $a_i(s,t) = 0$, $i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2$; $a_i(s,t) < 0$, $i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, n$. Составим две диагональные подматрицы: $A^+(s,t)$ размерности $m_1 \times m_1$ и $A^-(s,t)$ размерности $(n - m_2) \times (n - m_2)$ из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы A соответственно. Из вектора состояния $x = x(s,t)$ выделим два подвектора: $x^+ = x^+(s,t) = (x_1, x_2, \dots, x_{m_1})$ и $x^- = x^-(s,t) = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \dots, x_n)$, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A.

Поставим для системы (1) управляемые начально-краевые условия. Для простоты будем считать, что начальные условия и условия на правой границе прямоугольника P фиксированы:

$$x(s,t_0) = x^0(s), \quad s \in S, \qquad (2)$$

$$x^-(s_1,t) = q(t), \qquad t \in T. \qquad (3)$$

Краевые условия на другой боковой границе прямоугольника определяются из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x_t^+(s_0,t) &= N(u(t),t)x^+(s_0,t) + b(t), \quad t \in T,\\ x^+(s_0,t_0) &= [x^0(s_0)]^+, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $N(u,t)$ — матричная функция размерности $m_1 \times m_1$, $b(t)$ — m_1-мерная вектор-функция. В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на отрезке T вектор-функций $u = u(t)$, удовлетворяющих почти всюду на этом отрезке ограничению типа включения

$$u(t) \in U, \qquad (5)$$

где U — компакт из пространства E^r.

Цель задачи состоит в минимизации линейного функционала терминального типа

$$J(u) = \int_S \langle c(s), x(s,t_1)\rangle ds. \qquad (6)$$

Задачу оптимального управления (1)–(6) рассмотрим при следующих предположениях:

1) диагональные элементы $a_i = a_i(s,t)$, $i = 1, \dots, n$, матрицы A непрерывны и непрерывно дифференцируемы в P;

2) вектор-функции $x^0(s)$ и $q(t)$ непрерывны соответственно на S и T и удовлетворяют условию согласования $q(t_0) = [x^0(s_1)]^-$;

3) матричные функции $\Phi(s,t)$, $N(u,t)$, вектор-функции $f(t)$, $b(t)$, $c(s)$ непрерывны по своим аргументам всюду в области своего определения.

Отметим, что краевые условия на левой боковой границе прямоугольника P, определяемые из системы уравнений (4), являются абсолютно непрерывными на T функциями.

Сделанных предположений недостаточно для существования классического (непрерывного и непрерывно дифференцируемого) решения задачи (1)–(4). Остановимся на используемом понятии обобщенного решения. Введем характеристики системы (1), определяемые из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{ds}{dt} = a_i(s,t), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{7}$$

Для того чтобы однозначно зафиксировать характеристику, достаточно указать точку $(\xi,\tau) \in P$, через которую она проходит. Обозначим решения уравнений (7) $s_i = s_i(\xi,\tau;t)$.

Известно ([9], с. 57–59), что в случае существования классического решения рассматриваемой полулинейной гиперболической системы данная система эквивалентна системе интегральных уравнений

$$x_i(s,t) = x_i(\xi_i,\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} g_i(x(\xi,\tau),\xi,\tau)\Big|_{\xi=s_i(s,t;\tau)} d\tau, \tag{8}$$
$$(s,t) \in P, \quad i = 1,\ldots,n,$$

где (ξ_i,τ_i) — точка начала i-ой характеристики, проходящей через точку (s,t).

На основе системы интегральных уравнений (8) установлены ([9], с. 55–59) существование и единственность так называемого решения в широком смысле, а именно такого решения $x = x(s,t)$, которое непрерывно в P и каждая его компонента $x_i = x_i(s,t)$ непрерывно дифференцируема вдоль любой характеристики i-го семейства характеристик системы (1).

В силу введенного понятия обобщенного решения в точках прямоугольника P можно определить производную специального вида $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_i$ i-ой компоненты вектора состояния вдоль соответствующего семейства характеристик. Очевидно, что для гладкой функции $x_i = x_i(s,t)$ эта производная равна

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_i = x_{it} + a_i(s,t)x_{is}.$$

В дальнейшем вместо левой части системы (1) будем рассматривать дифференциальный оператор

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_A = \left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_1, \ldots, \left(\frac{dx_n}{dt}\right)_n\right).$$

При сделанных предположениях система

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_A = \Phi(s,t)x + f(s,t)$$

и система интегральных уравнений (8), определяющая обобщенное решение, эквивалентны в прямоугольнике P.

2. Формула приращения функционала

Построим отличный от классического точный вариант формулы приращения целевого функционала. Рассмотрим два допустимых процесса: $\{u,x\}$, $\{\tilde{u} = u + \Delta u,\ \tilde{x} = x + \Delta x\}$ и приращение функционала $\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u)$. Тогда система в приращениях имеет вид

$$\left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_A = \Phi(s,t)\Delta x, \quad (s,t) \in P, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \Delta x(s,t_0) = 0, \quad s \in S; \quad \Delta x^-(s_1,t) = 0, \quad t \in T; \\ \Delta x_t^+(s_0,t) = N(\tilde{u}(t),t)\tilde{x}^+(s_0,t) - N(u(t),t)x^+(s_0,t), \quad t \in T, \\ \Delta x^+(s_0,t_0) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Представим правую часть формулы (10) в виде

$$N(\tilde{u},t)\tilde{x}^+ - N(u,t)x^+ = \Delta_{\tilde{u}}N(u(t),t)x^+(s_0,t) + N(\tilde{u}(t),t)\Delta x^+(s_0,t), \quad t \in T,$$

и с учетом (9) запишем формулу приращения целевого функционала

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \langle c(s), \Delta x(s,t_1)\rangle ds + \iint\limits_P \Big\langle \psi(s,t), \left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_A - \Phi(s,t)\Delta x(s,t)\Big\rangle ds\, dt +$$
$$+ \int\limits_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t) - \Delta_{\tilde{u}}N(u(t),t)x^+(s_0,t) - N(\tilde{u}(t),t)\Delta x^+(s_0,t)\rangle dt, \tag{11}$$

где $\psi = \psi(s,t) \in E^n$; $p = p(t) \in E^{m_1}$ — пока произвольные вектор-функции.

В (11) к слагаемым $\int\limits_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t)\rangle dt$, $\iint\limits_P \langle \psi(s,t), \left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_A\rangle ds\, dt$ применим соответственно обычную и обобщенную ([8], с. 37) формулы интегрирования по частям. Получим

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \langle c(s), \Delta x(s,t_1)\rangle ds + \int\limits_S \langle \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\rangle ds - \iint\limits_P \langle \psi_t + (A^T\psi)_s + \Phi^T\psi, \Delta x\rangle ds\, dt +$$
$$+ \int\limits_T \langle A^{+T}\psi^+(s_1,t), \Delta x^+(s_1,t)\rangle dt - \int\limits_T \langle A^{+T}\psi^+(s_0,t), \Delta x^+(s_0,t)\rangle dt -$$
$$- \int\limits_T \langle A^{-T}\psi^-(s_0,t), \Delta x^-(s_0,t)\rangle dt + \langle p(t_1), \Delta x^+(s_0,t_1)\rangle - \int\limits_T \langle \dot{p}(t), \Delta x^+(s_0,t)\rangle dt -$$
$$- \int\limits_T \langle p(t), \Delta_{\tilde{u}}N(u(t),t)x^+(s_0,t)\rangle dt - \int\limits_T \langle p(t), N(\tilde{u}(t),t)\Delta x^+(s_0,t)\rangle dt. \tag{12}$$

Отличие от стандартной формулы приращения заключается в обработке последнего члена в формуле (12). Откажемся от представления этого члена в виде суммы двух слагаемых, содержащих невозмущенное значение $N(u(t),t)$ и приращение $\Delta_{\tilde{u}}N(u(t),t)$. Потребуем, чтобы функции $\psi = \psi(s,t)$ и $p = p(t)$ являлись решениями следующей сопряженной задачи:

$$\begin{gathered} \psi_t + (A^T\psi)_s = -\Phi^T\psi, \\ \psi(s,t_1) = -c(s), \quad s \in S, \\ \psi^+(s_1,t) = 0, \quad t \in T, \\ \psi^-(s_0,t) = 0, \quad t \in T; \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \dot{p} = -A^{+T}\psi^+(s_0,t) - N^T(\tilde{u}(t),t)p(t), \\ p(t_1) = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Окончательно получим формулу приращения целевого функционала в виде

$$\Delta J(u) = -\int_T \langle p(t,\tilde{u}), \Delta_{\tilde{u}}N(u(t),t)x^+(s_0,t)\rangle dt. \tag{15}$$

Вторая формула является симметричной и получается в результате подстановки в (10) правой части вида

$$N(\widetilde{u},t)\widetilde{x}^{+} - N(u,t)x^{+} = \Delta_{\widetilde{u}}N(u(t),t)\widetilde{x}^{+}(s_0,t) + N(u(t),t)\Delta x^{+}(s_0,t).$$

Тогда

$$\Delta J(u) = -\int_T \langle p(t,u), \Delta_{\widetilde{u}}N(u(t),t)x^{+}(s_0,t,\widetilde{u})\rangle dt. \tag{16}$$

Отметим принципиальное отличие формул (15), (16) от классической формулы приращения, используемой при доказательстве принципа максимума в [7]: формулы (15), (16) точные (без остаточных членов). Однако при этом система (14) или система (4) интегрируются на возмущенных управлениях.

Поскольку задача (13) не зависит от управления, т. е. решается один раз, то формула (15) дает возможность сведения исходной задачи (1)–(6) к линейной по состоянию $p = p(t)$ задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\widetilde{J}(\widetilde{u}) = \Delta J(u) = -\int_T \langle p(t,\widetilde{u}), \Delta_{\widetilde{u}}N(u(t),t)x^{+}(s_0,t)\rangle dt \to \min,\\ \dot{p} = -A^{+T}\psi^{+}(s_0,t) - N^T(\widetilde{u}(t),t)p(t), \quad p(t_1) = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Здесь $u = u(t)$ задано, а управлением является вектор-функция $\widetilde{u} = \widetilde{u}(t)$.

Таким образом, может быть предложена следующая схема решения задачи (1)–(6):

1) задается произвольное допустимое управление $u = u(t)$, находятся решения $x = x(s,t,u)$ исходной и $\psi = \psi(s,t)$ сопряженной начально-краевых задач;

2) составляется и решается вспомогательная задача (17) — задача оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений; пусть $\widetilde{u}^* = \widetilde{u}^*(t)$ — ее решение;

3) найденная функция $\widetilde{u}^* = \widetilde{u}^*(t)$ является также и решением исходной задачи, причем оптимальное значение целевого функционала $J(\widetilde{u}^*) = J(u) + \widetilde{J}(\widetilde{u}^*)$.

Итак, задача (1)–(6) сведена к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее решения система дифференциальных уравнений с частными производными интегрируется только 2–3 раза (поиск $x = x(s,t,u)$, $\psi = \psi(s,t)$ и при необходимости $\widetilde{x}^* = x(s,t,\widetilde{u}^*)$).

Если бы задача (1)–(6) решалась итерационными процессами классического принципа максимума ([8], с. 98–108), то на каждой итерации приходилось бы неоднократно интегрировать гиперболическую систему (1).

Рассмотрим подробнее задачу оптимального управления (17).

3. Вспомогательная задача

Обозначим для удобства $v = v(t) = \widetilde{u}(t)$ и перепишем задачу (17) в новых обозначениях

$$\begin{gathered}\widetilde{J}(v) = -\int_T \langle p(t,v), \Delta_v N(u(t),t)x^{+}(s_0,t)\rangle dt \to \min,\\ \dot{p} = -N^T(v(t),t)p(t) - A^{+T}\psi^{+}(s_0,t), \; p(t_1) = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

С математической точки зрения это линейная задача оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее характерной особенностью является то, что матрица коэффициентов системы зависит от управления. Таким образом, принцип максимума не является достаточным условием оптимальности. Для решения можно использовать нестандартные процедуры, также основанные на идеях точных формул приращения [2].

Для двух допустимых процессов: $\{v, p\}$ и $\{\widetilde{v} = v + \Delta v,\ \widetilde{p} = p + \Delta p\}$ формула приращения целевого функционала имеет вид

$$\Delta \widetilde{J}(v) = \int_T \Delta_v H(\xi(t, \widetilde{v}), p(t, v), v, t) dt \tag{19}$$

или

$$\Delta \widetilde{J}(v) = \int_T \Delta_v H(\xi(t, v), p(t, \widetilde{v}), v, t) dt, \tag{20}$$

где вектор-функция $\xi = \xi(t)$ удовлетворяет сопряженной для (18) системе уравнений

$$\dot{\xi} = N(v, t)\xi(t) + (N(v, t) - N(u, t))x^+(s_0, t, u), \quad t \in T, \quad \xi(t_0) = 0;$$

а скалярная функция

$$H(\xi, p, v, t) = \langle \xi(t), -N^T(v, t)p(t) - A^+\psi^+(s_0, t)\rangle - \langle p(t), (N(v, t) - N(u, t))x^+(s_0, t, u)\rangle$$

— это функция Понтрягина для задачи (18).

Введем отображение $v^*(\xi, p, t)$ с помощью экстремального соотношения

$$v^*(\xi, p, t) = \arg\min_{v \in U} H(\xi, p, v, t), \tag{21}$$

где $\xi \in E^{m_1}$, $p \in E^{m_1}$, $t \in T$. Обозначим через $D_p(t) = \{p(t, v), v \in U\}$ множество достижимости фазовой системы в момент $t \in T$, а через $D_\xi(t) = \{\xi(t, v), v \in U\}$ — множество достижимости сопряженной системы в момент $t \in T$.

Тогда для оптимальности управления $v(t)$ в задаче (18) достаточно выполнения хотя бы одного из симметричной пары условий

$$v(t) = v^*(\xi(t, v), p, t), \ \ p \in D_p(t), \ \ t \in T; \tag{22}$$

$$v(t) = v^*(\xi, p(t, v), t), \ \ \xi \in D_\xi(t), \ \ t \in T. \tag{23}$$

Предложим две процедуры улучшения управления $v = v(t)$.

На основе формулы приращения (20) (условия (22)) строится *первая процедура улучшения*:

1) по данному v найдем $\xi(t, v)$, $t \in T$;

2) сформируем экстремальное управление $\widetilde{v}^*(p, t) = v^*(\xi(t, v), p, t)$;

3) найдем решение $p(t)$, $t \in T$, фазовой системы

$$\dot{p} = -N^T(\widetilde{v}^*(p, t), t)p - A^+\psi^+(s_0, t), \quad p(t_1) = 0,$$

вместе с управлением $\widetilde{v}(t) = \widetilde{v}^*(p(t), t)$, $t \in T$. Свойство улучшения вполне очевидно. Поскольку $\widetilde{v}(t) = v^*(\xi(t, v), p(t, \widetilde{v}), t)$, то в силу определения отображения v^* получим

$$\Delta_{\widetilde{v}(t)} H(\xi(t, v), p(t, \widetilde{v}), v(t), t) \leq 0, \quad t \in T.$$

Отсюда на основании формулы приращения (20) заключаем, что $\Delta_{\widetilde{v}} \widetilde{J}(v) \leq 0$.

Таким образом, для любого управления $v = v(t)$ первая процедура улучшения вырабатывает управление $\widetilde{v} = \widetilde{v}(t)$ со свойством $\widetilde{J}(\widetilde{v}) \leq \widetilde{J}(v)$. Равенство $\widetilde{v}(t) = v(t)$, $t \in T$, означает, что исходное управление $v(t)$ удовлетворяет условию (21).

Симметричная схема улучшения получится на основе формулы приращения (19) (условия (23)).

Вторая процедура улучшения:

1) по данному v найдем $p(t, v)$, $t \in T$;

2) сформируем экстремальное управление $\widetilde{v}^*(\xi, t) = v^*(\xi, p(t, v), t)$;

3) найдем решение $\xi(t)$, $t \in T$, сопряженной системы

$$\dot{\xi} = N(\widetilde{v}^*(\xi, t), t)\xi(t) + (N(\widetilde{v}^*(\xi, t), t) - N(u, t))x^+(s_0, t, u), \quad t \in T, \quad \xi(t_0) = 0,$$

вместе с управлением $\widetilde{v}(t) = \widetilde{v}^*(\xi(t), t)$, $t \in T$.

Аналогичная схема решения задачи (1)–(6) и соответствующие процедуры решения вспомогательной задачи могут быть построены на основе формулы (16).

Отметим возможность обобщения рассмотренного подхода на случай квадратичного целевого функционала. При этом необходимо использовать точные формулы приращения второго порядка.

Литература

1. Аргучинцев А.В. *Неклассическое условие оптимальности в задаче управления граничными условиями полулинейной гиперболической системы* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 3–11.
2. Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
3. Аргучинцев А.В., Васильев О.В. *Итерационные процессы принципа максимума и их модификации в системах с распределенными параметрами* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 6. – С. 797–803.
4. Marcus M., Mizel Victor J. *Semilinear hereditary hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions, A* // J. Math. Anal. and Appl. – 1980. – V. 76. – № 2. – P. 440–475.
5. Marcus M., Mizel Victor J. *Semilinear hereditary hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions, B* // J. Math. Anal. and Appl. – 1980. – V.77. – № 1. – P. 1–19.
6. Голубь Н.Н. *Необходимые условия оптимальности для многомерных распределенных систем, содержащих звенья с распределенными параметрами* // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 10. – С. 1878–1881.
7. Аргучинцев А.В. *К поиску оптимальных граничных управлений в двумерных полулинейных гиперболических уравнениях* // Модели и мет. исслед. операций. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 50–58.
8. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А.*Методы оптимизации и их приложения.* Часть 2. *Оптимальное управление.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 151 с.
9. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1978. – 687 с.

Иркутский государственный университет

Поступила
19.07.2002