И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 7 (518)

УДК 517.956

В.Н. ПАВЛЕНКО, Е.А. ЧИЖ

СИЛЬНО РЕЗОНАНСНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ ([1], с. 23), $K = \{v \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega) \mid v(x) \geq \psi(x)$ почти всюду на $\Omega\}$, где $\psi \in \mathbf{C}_2(\overline{\Omega})$, $\psi|_\Gamma \leq 0$.

Рассматривается задача нахождения функции $u \in K$, удовлетворяющей неравенству

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} (v-u)_{x_j} dx + \int_\Omega (a_0(x) - \lambda_0) u(x)(v-u)(x) dx + \\ + \int_\Omega g(x,u)(v-u)(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad (1)$$

где $Lu(x) \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + a_0(x) u(x)$ — равномерно эллиптический дифференциальный оператор, $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_0 \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ и $a_0(x) \geq 0$ на Ω, λ_0 — минимальное собственное значение оператора L с граничным условием $u|_\Gamma = 0$. Функция $g : D \to \mathbf{R}$ ($D = \{(x,\xi) \in \Omega \times R \mid x \in \Omega$ и $\xi \geq \psi(x)\}$) суперпозиционно измерима, т. е. для любой измеримой по Лебегу функции $u(x)$ на Ω со значениями $u(x) \geq \psi(x)$ функция $g(x,u(x))$ измерима по Лебегу на Ω. Кроме того, предполагается, что для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,\cdot)$ может иметь на $[\psi(x), +\infty)$ разрывы только первого рода и непрерывна при $\xi = \psi(x)$, $g(x,\xi) \in [g_-(x,\xi), g_+(x,\xi)]$ для любого $\xi \in [\psi(x), +\infty)$, $g_-(x,\xi) = \liminf\limits_{s \to \xi} g(x,s)$, $g_+(x,\xi) = \limsup\limits_{s \to \xi} g(x,s)$.

Определение 1. Говорят, что нелинейность $g : D \to \mathbf{R}$ по отношению к линейному дифференциальному оператору $Bu = Lu - \lambda_0 u$ удовлетворяет А1-*условию*, если существует не более чем счетное семейство поверхностей $\{S_i,\ i \in I\}$, $S_i = \{(x,\xi) \in D \mid \xi = \psi_i(x)\}$, $\psi_i \in \mathbf{W}^2_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g_+(x,\xi) \neq g_-(x,\xi)$ влечет существование $i \in I$, для которого $(x,\xi) \in S_i$ и $\big(B\psi_i(x) + g_-(x,\psi_i(x))\big)\big(B\psi_i(x) + g_+(x,\psi_i(x))\big) > 0$, либо $B\psi_i(x) + g(x,\psi_i(x)) = 0$.

Некоэрцитивные вариационные неравенства с непрерывными нелинейностями изучались многими математиками. Укажем на работу [2], где приводится библиография основных работ в этом направлении и предлагается новый метод исследования таких задач. Эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями изучались одним из авторов вариационным методом в [3], [4] и методом монотонных операторов в [5]. Однако применительно к неравенствам с дифференциальными операторами в последних трех работах предполагалось, что порядок $2m$ дифференциального оператора больше размерности пространственной переменной и, значит, исключались дифференциальные операторы второго порядка. В [6] для задач с препятствием предложена эквивалентная вариационному неравенству постановка в виде эллиптической краевой задачи с разрывной нелинейностью. Такой подход применительно к коэрцитивным эллиптическим вариационным неравенствам с дифференциальными операторами второго порядка и разрывными нелинейностями получил дальнейшее развитие в ([7], с. 65–69). В данной работе исходное вариационное неравенство (1) заменяется резонансной эллиптической краевой задачей, каждое сильное решение которой является решением (1). Для доказательства существования сильного решения краевой задачи непосредственное применение теорем существования для резонансных эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями из [8], [9] не представляется возможным, т.к. возникающая при переходе к такой задаче нелинейность не ограничена по фазовой переменной. Поэтому строятся аппроксимирующие задачи, разрешимость которых устанавливается вариационным методом, и доказывается сходимость решений аппроксимирующих уравнений к решению рассматриваемой задачи.

Теорема. *Пусть*

1. *существует функция* $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ $(q > n)$ *такая, что для почти всех* $x \in \Omega$
$$|g(x,\xi)| \leq a(x) \quad \forall \xi \geq \psi(x);$$
2. *найдутся такие числа* $r_1 > 0$ *и* $r_2 \geq 0$, *что*
$$\int\limits_{\{x\in\Omega\,|\,d(x,\Gamma)<r_1\}} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\{x\in\Omega\,|\,d(x,\Gamma)\geq r_1\}} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx \geq 0, \tag{2}$$
где $d(x,\Gamma)$ — *расстояние от точки* x *до границы* Γ, $\varphi(x)$ — *положительная в* Ω *собственная функция оператора* L *с граничным условием* $u|_\Gamma = 0$, *соответствующая минимальному собственному значению* λ_0;
3. *нелинейность* $g(x,\xi)$ *по отношению к оператору* $Bu = Lu - \lambda_0 u$ *удовлетворяет* A1-*условию*;
4. *существует* $r_3 > 0$ *такое, что* $\psi(x) \leq 0$ *для любого* $x \in \Omega$ *с расстоянием* $d(x,\Gamma) < r_3$.

Тогда найдется функция $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega) \bigcap K$, *удовлетворяющая* (1).

Замечание 1. Известно ([10], с. 204), что минимальному собственному значению λ_0 дифференциального оператора L с граничным условием $u|_\Gamma = 0$ соответствует одномерное подпространство собственных функций, причем базисная функция φ этого подпространства либо положительна, либо отрицательна в Ω и соответственно либо $\frac{\partial\varphi}{\partial n} < 0$ на Γ, либо $\frac{\partial\varphi}{\partial n} > 0$ на Γ, где $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает производную по внешней нормали к границе Γ.

Замечание 2. Данная теорема обобщает соответствующий результат из [2] на случай разрывной нелинейности, и ее метод доказательства отличен от подхода, предложенного в [2].

2. Вспомогательные результаты

Сопоставим задаче (1) краевую задачу
$$Lu + G(x,u) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$
$$u|_\Gamma = 0, \tag{4}$$
где $G(x,\xi) = \min\{-L\psi(x),\ g(x,\psi(x)) - \lambda_0\psi(x)\}$ при $\xi \leq \psi(x)$, $G(x,\xi) = g(x,\xi) - \lambda_0\xi$ при $\xi > \psi(x)$.

Определение 2. Функция $u \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_q^2(\Omega)$ называется *сильным решением* задачи (3)–(4), если $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет уравнению (3).

Определение 3. Функция $u \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_q^2(\Omega)$ называется *обобщенным решением* задачи (3)–(4), если $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет включению
$$-Lu(x) \in \big[G_-(x,u(x)), G_+(x,u(x))\big].$$

Определение 4 ([11], с. 14). Секвенциальным замыканием локально ограниченного оператора $T : E_1 \to E_2$ (E_i, $i = 1,2$, — банаховы пространства) называется отображение $ST : E_1 \to 2^{E_2}$, значение STu которого для $u \in E_1$ определяется как замкнутая выпуклая оболочка множества всех секвенциальных слабо предельных точек в E_2 последовательностей вида $\{Tu_n\}$, где $u_n \to u$ в E_1. (Здесь через 2^{E_2} обозначается множество всех подмножеств E_2.)

Замечание 3. Рассмотрим оператор $T : L^p(\Omega) \to (L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$ $(q^{-1}+p^{-1}=1)$, задаваемый равенством $Tu = G(x,u(x))$. Согласно ([11], с. 23 и [12], с. 174) включение $z \in STu$ равносильно тому, что $z(x) \in [G_-(x,u(x)), G_+(x,u(x))]$ почти всюду на Ω. Отсюда получаем, что $u \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_2(\Omega) \cap \mathbf{W}^2_q(\Omega)$ удовлетворяет включению $-Lu \in STu$ тогда и только тогда, когда u — обобщенное решение (3)–(4).

Лемма 1. *Сильное решение задачи* (3)–(4) *является решением вариационного неравенства* (1).

Доказательство. Действительно, если $u \in \mathbf{W}^2_q(\Omega)$ удовлетворяет (3) и (4), то $(Lu(x) - L\psi(x))(\psi - u)^+(x) \geq 0$ на Ω, где $(v-u)^+(x) = \max\{v(x)-u(x), 0\}$. Это очевидно для тех $x \in \Omega$, для которых $u(x) \geq \psi(x)$, а для тех $x \in \Omega$, где $u(x) < \psi(x)$, имеем

$$(Lu(x) - L\psi(x))(\psi-u)^+(x) = (-G(x,u(x)) - L\psi(x))(\psi-u)^+(x) \geq (L\psi(x) - L\psi(x))(\psi-u)^+(x) = 0.$$

Кроме того,

$$\Big(\frac{\partial u(x)}{\partial n_L} - \frac{\partial \psi(x)}{\partial n_L}\Big)(\psi-u)^+(x)|_\Gamma = 0,$$

т. к. $u|_\Gamma = 0$, $\psi|_\Gamma \leq 0$. Здесь $\partial/\partial n_L = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\cos(n,x_j)\partial/\partial x_i$ — конормальная производная (n — внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(n,x_j)$ — направляющие косинусы нормали n).

Отсюда в силу обобщенного принципа максимума [13] $u(x) \geq \psi(x)$ почти всюду на Ω. Следовательно, $u \in K$. Осталось установить, что $u(x)$ удовлетворяет неравенству (1). Имеем для произвольного $v \in K$ (с учетом неравенства $G(x,\psi(x)) \leq g(x,\psi(x)) - \lambda_0\psi(x)$)

$$\begin{aligned}
0 = \int\limits_\Omega Lu(x)(v-u)(x)dx + \int\limits_\Omega G(x,u)(v-u)(x)dx = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}(x)(v-u)_{x_j}(x)dx + \\
+ \int\limits_\Omega a_0(x)u(x)(v-u)(x)dx + \int\limits_{\{x\in\Omega \,|\, u=\psi(x)\}} G(x,u)(v-u)(x)dx + \\
+ \int\limits_{\{x\in\Omega \,|\, u>\psi(x)\}} G(x,u)(v-u)(x)dx \leq \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}(v-u)_{x_j}dx + \\
+ \int\limits_\Omega (a_0(x)-\lambda_0)u(x)(v-u)(x)dx + \int\limits_\Omega g(x,u)(v-u)(x)dx.
\end{aligned}$$

Таким образом, (1) выполняется. □

Для задачи (3)–(4) рассмотрим аппроксимирующую задачу

$$Lu - \lambda_0 u - \delta_m \Delta u + f_m(x,u) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{6}$$

где $\delta_m \to +0$, $\Delta = \sum\limits_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$ — лапласиан, $f_m(x,\xi) = g(x,\xi)$ при $\xi > \psi(x)$ и $f_m(x,\xi) = \min\{-L\psi(x) + \delta_m\Delta\psi(x),\ g(x,\psi(x)) - \lambda_0\psi(x)\} + \lambda_0\xi$ при $\xi \leq \psi(x)$. Понятие обобщенного решения задачи (5)–(6) вводится аналогично определению 3 для задачи (3)–(4).

Лемма 2. *Задача* (5)–(6) *имеет обобщенное решение* u_m *при любом* $m \in \mathbf{N}$, *причем* $u_m(x) \geq \psi(x)$ *на* Ω.

Доказательство. К задаче (5)–(6) применим вариационный метод. Рассмотрим функционалы $\Phi_m : \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1 \to \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}$, определяемые следующими равенствами: для произвольного $u \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$

$$\Phi_m(u) = J_m(u) + F_m(u),$$
$$J_m(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) + \delta_m \delta_i^j) u_{x_i} u_{x_j} + (a_0(x) - \lambda_0) u^2(x) \Big) dx,$$
$$F_m(u) = \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f_m(x,s)\,ds,$$

где δ_i^j — символ Кронекера ($\delta_i^j = 1$, если $i = j$, и $\delta_i^j = 0$, если $i \neq j$). Для доказательства существования обобщенного решения задачи (5)–(6) в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ достаточно установить слабую полунепрерывность снизу функционала Φ_m и выполнение равенства $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \Phi_m(u) = +\infty$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ означает норму в пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$). Действительно, тогда найдется $u_m \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$, для которого $\Phi_m(u_m) = \inf\limits_{u \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)} \Phi_m(u)$ ([14], с. 119). Отсюда следует ([11], с. 61) существование функции $z_m \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ такой, что $z_m(x) \in [f_{m_-}(x, u_m(x)),\ f_{m_+}(x, u_m(x))]$ почти всюду на Ω и для произвольного $v \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) + \delta_m \delta_i^j)(u_m)_{x_i}(x) v_{x_j}(x) + (a_0(x) - \lambda_0) u_m(x) v(x) + z_m(x) v(x) \Big) dx = 0.$$

Отсюда заключаем ([10], с. 225), что $u_m \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$ и является сильным решением задачи

$$Lu(x) - \delta_m \Delta u(x) = \lambda_0 u(x) - z_m(x), \quad x \in \Omega, \qquad u|_\Gamma = 0. \tag{7}$$

Последнее влечет $-Lu_m(x) + \delta_m \Delta u_m(x) + \lambda_0 u_m(x) \in [f_{m_-}(x, u_m(x)), f_{m_+}(x, u_m(x))]$ для почти всех $x \in \Omega$. Таким образом, u_m — обобщенное решение задачи (5)–(6).

Поскольку λ_0 — минимальное собственное значение дифференциального оператора L с граничным условием (4), то оператор из $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$ в $\mathbf{W}_2^{-1}(\Omega)$, порожденный линейной частью уравнения (5), монотонный ([10], с. 203). Последнее влечет слабую полунепрерывность снизу функционала J_m на $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$ ([14], с. 102). Нелинейность f_m индуцирует компактный оператор из $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$ в $\mathbf{W}_2^{-1}(\Omega)$, поэтому функционал F_m слабо непрерывен на $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$ [3]. Таким образом, слабая полунепрерывность снизу функционала Φ_m на $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$ установлена.

Оценим $\Phi_m(u)$ снизу на $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$. Имеем для любого $u \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$

$$\Phi_m(u) \geq \frac{\delta_m}{2}\|u\|^2 + \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f_m(x,s)\,ds =$$
$$= \frac{\delta_m}{2}\|u\|^2 + \int_\Omega dx \int_0^{\psi(x)} f_m(x,s)\,ds + \int_\Omega dx \int_{\psi(x)}^{u(x)} f_m(x,s)\,ds. \tag{8}$$

Так как $|f_m(x,s)| \leq \lambda_0|s| + |L\psi(x)| + \delta_m|\Delta\psi(x)| + |g(x,\psi(x))| + \lambda_0|\psi(x)| + a(x)$, $\psi \in \mathbf{C}_2(\overline{\Omega})$, то существует постоянная $M > 0$ такая, что первый интеграл в правой части (8) по модулю не превосходит M. Далее,

$$\int_\Omega dx \int_{\psi(x)}^{u(x)} f_m(x,s)ds = \int\limits_{\{x\in\Omega \mid u(x)>\psi(x)\}} dx \int_{\psi(x)}^{u(x)} g(x,s)ds +$$

$$+ \int\limits_{\{x\in\Omega \mid u(x)<\psi(x)\}} dx \int_{\psi(x)}^{u(x)} (\lambda_0 s + \min\{(-L+\delta_m\Delta)\psi(x), g(x,\psi(x)) - \lambda_0\psi(x)\})ds \geq$$

$$\geq -\int_\Omega |a(x)|\,|u(x)-\psi(x)|dx -$$

$$-\int_\Omega \left(\lambda_0 \frac{\psi^2(x)}{2} + |u(x)-\psi(x)|\big(|(-L+\delta_m\Delta)\psi(x)| + |g(x,\psi(x))| + \lambda_0|\psi(x)|\big)\right)dx.$$

Поэтому существуют постоянные $A>0$ и $B>0$ такие, что

$$\int_\Omega dx \int\limits_{\psi(x)}^{u(x)} f_m(x,s)ds \geq -A\|u\| - B.$$

Из полученных оценок интегралов и неравенства (8) следует

$$\Phi_m(u) \geq \frac{\delta_m}{2}\|u\|^2 - M - A\|u\| - B \;\; \forall u \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega).$$

Последнее неравенство влечет $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \Phi_m(u) = +\infty$. Таким образом, установлено существование обобщенных решений u_m аппроксимирующих задач (5)–(6) при любом $m \in \mathbf{N}$. Заметим, что $u_m(x) \geq \psi(x) \quad \forall m \in \mathbf{N}$ на Ω (доказывается так же, как принадлежность множеству K решения задачи (3)–(4) из $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ с заменой L на $L - \delta_m\Delta$, а $G(x,\xi)$ — на $G_m(x,\xi) = -\lambda_0\xi + f_m(x,\xi)$ с учетом равенств $G_m(x,u(x)) = g(x,u(x)) - \lambda_0 u(x)$ для $u(x) > \psi(x)$ и $G_m(x,u(x)) = \min\{-(L-\delta_m\Delta)\psi(x), g(x,\psi(x)) - \lambda_0\psi(x)\}$ для $u(x) \leq \psi(x)$). $\square$

3. Доказательство теоремы

В силу леммы 1 для доказательства существования решения вариационного неравенства (1) достаточно показать, что задача (3)–(4) имеет сильное решение. Согласно лемме 2 при любом $m \in \mathbf{N}$ аппроксимирующая задача (5)–(6) имеет обобщенное решение u_m, т. е. существует функция $z_m \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $z_m(x) \in [f_{m-}(x,u_m(x)),\ f_{m+}(x,u_m(x))]$, почти всюду на Ω удовлетворяющая (7). Докажем ограниченность последовательности $\{u_m\}$ в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ (заметим, что $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$, поскольку $q > n$). Допустим противное. Тогда из последовательности $\{u_m\}$ можно выделить подпоследовательность (будем обозначать ее так же $\{u_m\}$) такую, что $\|u_m\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} \to +\infty$. Положим $v_m = u_m/\|u_m\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})}$. Тогда $\|v_m\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} = 1$ и

$$(L - \delta_m\Delta)v_m = \lambda_0 v_m - \frac{z_m(x)}{\|u_m\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})}}. \tag{9}$$

Так как $u_m(x) \geq \psi(x)$, то последовательность $\{z_m(x)\}$ ограничена в $\mathbf{L}_q(\Omega)$ и, значит, правая часть (9) равномерно ограничена по m в $\mathbf{L}_q(\Omega)$. Отсюда с учетом неотрицательности $a_0(x)$ на Ω следует ограниченность $\{v_m\}$ в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ ([10], с.226). Так как пространство $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ рефлексивно, то существует подпоследовательность последовательности $\{v_m\}$, слабо сходящаяся в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ к v. Будем ее по-прежнему обозначать $\{v_m\}$. Переходя к пределу в (9) при $m \to \infty$, для предельной функции v получим $Lv = \lambda_0 v$. Так как $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$, то $v_m \to v$ в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$. Поэтому $v|_\Gamma = 0$ и v — ненулевая функция ($\|v\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} = 1$), значит, v — собственная функция оператора L с граничным условием (4), соответствующая собственному значению λ_0. Таким образом, в силу замечания 1 v либо положительна, либо отрицательна в Ω. Если предположить, что $v(x) < 0$ в Ω, то получим противоречие с неравенством $u_m(x) \geq \psi(x)$ $\forall x \in \Omega$, т. к.

$u_m(x) = \|u_m\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} v_m(x)$ и $\|u_m\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} \to \infty$. Следовательно, v положительная в Ω и, значит, $v = \alpha\varphi(x),\ \alpha > 0$. Имеем

$$\int_\Omega z_m(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega ((Lu_m - \lambda_0 u_m) - \delta_m \Delta u_m)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_\Omega (-L\varphi(x) + \lambda_0\varphi(x))u_m(x)dx + \delta_m \int_\Omega \Delta\varphi(x)u_m(x)dx = \delta_m \|u_m\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} \int_\Omega \Delta\varphi(x)v_m(x)dx.$$

Так как $\delta_m \to +0$ и

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \Delta\varphi(x)v_m(x)dx = \alpha \int_\Omega \Delta\varphi(x)\varphi(x)dx = -\alpha \int_\Omega \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2 dx = -\alpha\|\varphi\|^2 < 0,$$

то для достаточно больших $m \in N$

$$\int_\Omega z_m(x)\varphi(x)dx < 0. \tag{10}$$

Поскольку $v_m \to v$ в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$, $v(x) > 0$ в Ω и $\frac{\partial v}{\partial n} < 0$ на Γ, то существует номер $m_1 \in \mathbf{N}$ такой, что $v_m(x)$, а следовательно, и $u_m(x)$ положительны в Ω при всех $m > m_1$.

Обозначим $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid d(x,\Gamma) < r_1\}$, $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ и $\Omega_3 = \{x \in \Omega \mid d(x,\Gamma) < r_3\}$, $\Omega_4 = \Omega \setminus \Omega_3$, где r_1, r_3 — положительные константы из условий 2) и 4) теоремы.

Покажем, что для достаточно больших $m \in \mathbf{N}$ верно неравенство $u_m(x) > \psi(x)$ на Ω. В силу условия 4) теоремы $\psi(x) \le 0$ для любого $x \in \Omega_3$. Следовательно, $\psi(x) \le 0 < u_m(x)$ на Ω_3 при всех $m > m_1$. Рассмотрим множество $\Omega_4 = \{x \in \Omega \mid d(x,\Gamma) \ge r_3\}$. Если Ω_4 пустое, то $u_m(x) > \psi(x)$ на Ω при всех $m > m_1$. Предположим, что $\Omega_4 \ne \emptyset$, тогда это множество — не пустой компакт. Так как $u_m(x) = \|u_m\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} v_m(x) \to +\infty$ для любого $x \in \Omega$, то в силу непрерывности функций u_m и ψ для всех x из Ω_4 найдется номер m_x и окрестность $U(x)$ точки x такие, что $u_m > \psi$ на $U(x)$ при всех $m > m_x$. Поскольку множество Ω_4 — компакт, то из его открытого покрытия $\{U(x)\}_{x\in\Omega_4}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{U(x_i)\}_{i=1}^s$. Пусть $m_2 = \max\{m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_s}\}$, тогда $u_m(x) > \psi(x)$ на Ω_4 при всех $m > m_2$. Таким образом, $u_m(x) > \psi(x)$ в $\Omega \quad \forall m > m_3 = \max\{m_1, m_2\}$.

При произвольном $m > m_3$ и для почти всех $x \in \Omega$ с учетом неравенства $u_m(x) > \psi(x)$ получаем $z_m(x) \ge f_{m-}(x, u_m(x)) = g_-(x, u_m(x))$. Отсюда для множества Ω_1 имеем

$$\int_{\Omega_1} z_m(x)\varphi(x)dx \ge \int_{\Omega_1} g_-(x, u_m(x))\varphi(x)dx \ge \int_{\Omega_1} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx, \tag{11}$$

т. к. $u_m(x) > 0$ в Ω и $g_-(x, u_m(x)) = \lim\limits_{\eta\to u_m(x)} \inf g(x,\eta) \ge \inf\limits_{\xi>0} g(x,\xi)$. Множество $\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid d(x,\Gamma) \ge r_1\}$ — компакт и $u_m(x) \to +\infty \quad \forall x \in \Omega$, поэтому существует $m_4 \in \mathbf{N}$ такой, что $u_m(x) > r_2$ на Ω_2 при любом $m > m_4$ (доказывается аналогично неравенству $u_m(x) > \psi(x)$ в Ω_4). Тогда для Ω_2 при $m > \max\{m_3, m_4\}$ получаем

$$\int_{\Omega_2} z_m(x)\varphi(x)dx \ge \int_{\Omega_2} g_-(x, u_m(x))\varphi(x)dx \ge \int_{\Omega_2} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx. \tag{12}$$

Таким образом, для достаточно больших m из (11), (12) и (2) имеем

$$\int_\Omega z_m(x)\varphi(x)dx \ge \int_{\Omega_1} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int_{\Omega_2} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx \ge 0.$$

Получили противоречие с (10). Ограниченность $\{u_m\}$ в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ доказана. Отсюда и из равенства

$$(L - \delta_m\Delta)u_m = \lambda_0 u_m - z_m \tag{13}$$

следует ограниченность последовательности $\{u_m\}$ в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ (обоснование этого факта аналогично доказательству ограниченности последовательности $\{v_m\}$ в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$). В силу рефлексивности пространства $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ последовательность $\{u_m\}$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Будем обозначать ее так же через $\{u_m\}$, а ее слабый предел — через u. Из компактности вложения $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ следует, что последовательность $\{u_m\}$ сильно сходится к u в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$. Следовательно, $u|_\Gamma = 0$.

Последовательность $\{f_m(x,\xi)\}$ ограничена в $\mathbf{L}_q(\Omega)$ равномерно по $\xi \geq \psi(x)$, из чего с учетом неравенства $u_m(x) \geq \psi(x)$ на Ω следует ограниченность $\{z_m\}$ в $\mathbf{L}_q(\Omega)$. В силу рефлексивности этого пространства из $\{z_m\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность к некоторому $z(x)$ в $\mathbf{L}_q(\Omega)$. Покажем, что почти всюду на Ω верно включение $z(x) - \lambda_0 u(x) \in [G_-(x,u(x)), G_+(x,u(x))]$. Для почти всех $x \in \Omega$ верно включение

$$z_m(x) \in [f_{m-}(x,u_m(x)), f_{m_+}(x,u_m(x))].$$

Заметим, что $f_{m_+}(x,u_m(x)) = g_+(x,u_m(x))$ на Ω. Рассмотрим $f_{m-}(x,u_m(x)) = \min\{-L\psi(x) + \delta_m\Delta\psi(x),\ g(x,\psi(x)) - \lambda_0\psi(x)\} + \lambda_0 u_m(x)$, если $u_m(x) = \psi(x)$, и $f_{m-}(x,u_m(x)) = g_-(x,u_m(x))$, если $u_m(x) > \psi(x)$. В силу неравенства

$$|\min(u+\eta,v) - \min(u,v)| \leq |\eta| \quad \forall u,\eta,v \in \mathbf{R}$$

заключаем, что $|G_-(x,u_m(x)) - f_{m-}(x,u_m(x)) + \lambda_0 u_m(x)| \leq \delta_m|\Delta\psi(x)|$ на Ω. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда для достаточно больших номеров $m \in \mathbf{N}$ отрезок

$$[f_{m-}(x,u_m(x)) - \lambda_0 u_m(x), f_{m+}(x,u_m(x)) - \lambda_0 u_m(x)] \subset [G_-(x,u_m(x)) - \varepsilon, G_+(x,u_m(x))].$$

Переходя к слабому пределу при $m \to \infty$ в $\mathbf{L}_q(\Omega)$, в силу свойств секвенциального замыкания оператора $Tu = G(x,u(x))$ (см. замечание 2 и [11], с. 23) получаем

$$z(x) - \lambda_0 u(x) \in [G_-(x,u(x)) - \varepsilon, G_+(x,u(x))]$$

для почти всех $x \in \Omega$. В силу произвольности ε из равенства (13) при $m \to \infty$ следует $-Lu(x) = z(x) - \lambda_0 u(x) \in [G_-(x,u(x)),\ G_+(x,u(x))]$ при почти всех $x \in \Omega$. По условию 3) теоремы нелинейность $g(x,\xi)$ удовлетворяет A1-условию по отношению к оператору $Bu = Lu - \lambda_0 u$. Функция $G(x,\xi)$ по сравнению с $g(x,\xi)$ по фазовой переменной ξ может иметь только разрывы на поверхности $\xi = \psi(x)$, когда $\min\{-L\psi(x),\ g(x,\psi(x)) - \lambda_0\psi(x)\} = -L\psi(x)$. Однако в этом случае $Lu(x) + G(x,u(x)) = L\psi(x) - L\psi(x) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$. Таким образом, точки разрыва функции G также удовлетворяют A1-условию по отношению к оператору $Bu = Lu - \lambda_0 u$. Отсюда следует ([7], с. 101), что почти всюду на Ω функция u удовлетворяет уравнению (3) и, значит, является сильным решением задачи (3)–(4). $\square$

Литература

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1964. – 540 с.
2. Adly S., Goeleven D. and Thera M. *Recession mappings and noncoercitive variational inequalities* // Nonlinear Anal. – 1996. – V. 26. – № 9. – P. 1573–1603.
3. Павленко В.Н. *Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 8. – С. 1397–1402.
4. Павленко В.Н. *Полуправильные решения для эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями* // Укр. матем. журн. – 1991. – Т. 43. – № 2. – С. 230–235.
5. Павленко В.Н. *О разрешимости вариационных неравенств с разрывными полумонотонными операторами* // Укр. матем. журн. – 1993. – Т. 45. – № 3. – С. 443-447.
6. Chang K.-C. *Free boundary problems and the set-valued mappings* // J. Different. Eq. – 1983. – V. 49. – № 1. – P. 1–28.
7. Павленко В.Н. *Уравнения и вариационные неравенства с разрывными нелинейностями*: Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. – Екатеринбург, 1995. – 149 с.

8. Павленко В.Н., Винокур В.В. *Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 5. – С. 43–58.
9. Павленко В.Н., Винокур В.В. *Теоремы существования для уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами* // Укр. матем. журн. – 2002. – Т. 54. – № 3. – С. 349–363.
10. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения второго порядка.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.
11. Павленко В.Н. *Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами*: *Учеб. пособие.* – Челябинск: Изд. центр ЧелГУ, 1997. – 75 с.
12. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом.* – М.: Наука, 1983. – 272 с.
13. Chang K.-C. *The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities* // Comm. Pure Appl. Math. – 1980. – V. 33. – № 2. – P. 117–146.
14. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.

Челябинский государственный университет

Поступила 17.12.2003