ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 517.957

Л.А. САХНОВИЧ

МАТРИЧНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ИЕРАРХИЯ УРАВНЕНИЙ

В статье рассматривается семейство уравнений

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial F_N}{\partial x} + [G, F_N] = 0; \quad N = 1, 2, 3, \dots, \tag{0.1}$$

где $[\cdot,\cdot]$ — символ коммутанта, т. е. $[G, F_N] = GF_N - F_N G$. Матрицы $G(x,t,z)$, $F_N(x,t,z)$ имеют порядок $2m \times 2m$ и являются многочленами относительно z соответственно степени 1 и N. При $N = 2$ и некоторой редукции уравнение (0.1) совпадает с известным матричным нелинейным уравнением Шредингера, а при $N = 3$ — с матричным модифицированным уравнением Кортевега де Фриза. Семейство уравнений (0.1) образует так называемую иерархию. В статье доказывается, что уравнения (0.1) являются дифференциальными, выводятся рекуррентные формулы для построения $F_N(x,t,z)$. На этом пути находится бесконечный набор полиномиальных законов сохранения для уравнений (0.1). Для скалярного случая ($m = 1$) близкие результаты известны (см. [1], [2]). Далее используются полученные результаты для построения асимптотики матрицы-функции Вейля–Титчмарша $v_N(t,z)$ при $z \to \infty$ канонической системы дифференциальных уравнений вида [3], [4]

$$\frac{\partial W}{\partial x} = G(x,t,z)W. \tag{0.2}$$

Этот результат является новым и в скалярном случае. В статье введены классы регулярности $\mathcal{P}_T$ и выводится теорема существования и единственности решения уравнения (0.1) в классе $\mathcal{P}_T$ в области $0 \le x < \infty$, $0 \le t \le T$. При этом предполагаются известными только начальные данные.

Интересно отметить, что для стационарной линейной задачи

$$\frac{dW}{dx} = G(x,0,z)W \tag{0.3}$$

также находится асимптотика соответствующей функции Вейля–Титчмарша $v(z)$. При этом используются шаг за шагом нестационарные нелинейные уравнения иерархии.

Таким образом, в статье выявлена связь уравнений иерархии, законов сохранения и коэффициентов асимптотики функции Вейля–Титчмарша.

1. Построение иерархии уравнений

1. Пусть матрицы-функции $G(x,t,z)$ и $F_N(x,t,z)$ имеют вид

$$G(x,t,z) = g_1(x,t) + zg_0(x,t), \tag{1.1}$$

$$F_N(x,t,z) = f_N(x,t) + zf_{N-1}(x,t) + \dots + z^N f_0(x,t). \tag{1.2}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного Фонда Г. Сороса (грант UCX 000).

Матрицы-функции $g_k(x,t)$ $(k=0,1)$ и $f_k(x,t)$ $(0 \le k \le N)$ порядка $2m \times 2m$ предполагаются дифференцируемыми. Кроме того, будем далее считать

$$g_0 = f_0 = ij, \quad j = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_m \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

$$g_1(x,t) = \begin{bmatrix} 0 & R_{12}(x,t) \\ R_{21}(x,t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

где $R_{12}(x,t)$, $R_{21}(x,t)$ — матрицы порядка $m \times m$.

Рассмотрим матричные уравнения

$$\frac{\partial W(x,t,z)}{\partial x} = G(x,t,z)W(x,t,z), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial W(x,t,z)}{\partial t} = F_N(x,t,z)W(x,t,z). \tag{1.6}$$

Как известно, соотношение (0.1) является условием совместности уравнений (1.5) и (1.6).

В данном параграфе выведем рекуррентные формулы для построения $f_k(x,t)$ $(k>0)$, т. е. дадим метод построения иерархии (0.1). Из (0.1) и (1.1)–(1.4) следует

$$-\frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x} + [g_1, f_k] + [g_0, f_{k+1}] = 0, \quad 0 \le k < N, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} - \frac{\partial f_N}{\partial x} + [g_1, f_N] = 0. \tag{1.8}$$

Отметим, что соотношения (1.7) не зависят от N.

2. Существенную роль в дальнейшем играет матричное нелинейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x,t,z) = 2izw(x,t,z) - w(x,t,z)R_{21}(x,t)w(x,t,z) + R_{12}(x,t), \tag{1.9}$$

где $w(x,t,z)$ — матрица-функция порядка $m \times m$.

Из общей теории асимптотических рядов следует утверждение [5].

Теорема 1.1. *Пусть матрицы $R_{12}(x,t)$, $R_{21}(x,t)$ аналитичны по x в области, содержащей полуось $x \ge 0$. Тогда существует аналитическое по x $(x \ge 0)$ и z $(|z| > \Delta_0)$ решение $w(x,t,z)$, допускающее разложение*

$$w(x,t,z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x,t,z)/(iz)^k \tag{1.10}$$

(Δ_0 зависит от x и t).

При этом справедливы равенства

$$\begin{aligned} w_1(x,t) &= -\frac{1}{2}R_{12}(x,t), \\ w_{k+1}(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}w_k(x,t) + \sum_{p+s=k} w_p(x,t)R_{21}(x,t)w_s(x,t)\right], \end{aligned} \quad p,s \ge 1. \tag{1.11}$$

Пусть матрица-функция $\varphi(x,t,z)$ порядка $m \times m$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = R_{12}w\varphi, \quad \varphi(0,t,z) = E_m. \tag{1.12}$$

При помощи w и φ введем матрицы-функции

$$\mu = R_{21}w, \quad \varphi_1 = e^{-izx}w\varphi, \quad \varphi_2 = e^{-izx}\varphi. \tag{1.13}$$

Из (1.8), (1.12), (1.13) следует, что матрицы φ_1 и φ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= iz\varphi_1 + R_{12}\varphi_2,\\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= -iz\varphi_2 + R_{21}\varphi_1.\end{aligned} \tag{1.14}$$

3. Запишем уравнение, аналогичное уравнению (1.9),

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{w}(x,t,z) = -2iz\widetilde{w}(x,t,z) + R_{21}(x,t) - \widetilde{w}(x,t,z)R_{12}(x,t)\widetilde{w}(x,t,z). \tag{1.15}$$

Из теоремы 1.1 следует, что решение (1.15) допускает разложение

$$\widetilde{w}(x,t,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{w}_k(x,t)/(-iz)^k. \tag{1.16}$$

Из (1.16) выводим следующие аналоги соотношений (1.11):

$$\widetilde{w}_1 = -\frac{1}{2}R_{21}, \tag{1.17}$$

$$\widetilde{w}_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widetilde{w}_k}{\partial x} + \sum_{p+s=k} \widetilde{w}_p R_{12}\widetilde{w}_s\right); \quad p,s,k \geq 1. \tag{1.18}$$

Матрица $\widetilde{\varphi}(x,t,z)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x} = R_{12}\widetilde{w}\widetilde{\varphi}, \quad \widetilde{\varphi}(0,t,z) = E_m. \tag{1.19}$$

Введем теперь матрицы-функции

$$\widetilde{\mu} = R_{12}\widetilde{w}, \quad \widetilde{\varphi}_1 = e^{ixz}\widetilde{\varphi}, \quad \widetilde{\varphi}_2 = e^{ixz}\widetilde{w}\widetilde{\varphi}. \tag{1.20}$$

Из (1.15) и (1.19), (1.20) следует, что $\widetilde{\varphi}_1(x,t,z)$ и $\widetilde{\varphi}_2(x,t,z)$ также удовлетворяют системе (1.14). Таким образом, доказана

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда матрица*

$$W(x,t,z) = \begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}_1(x,t,z) & \varphi_1(x,t,z) \\ \widetilde{\varphi}_2(x,t,z) & \varphi_2(x,t,z) \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

удовлетворяет системе (1.5).

Заметим, что в силу (1.12), (1.19) и разложений (1.9), (1.16) матрица $W(x,t,z)$ обратима в окрестности $z = \infty$.

Следствие 1.1. Матрица-функция

$$F(x,t,z) = W(x,t,z)(ij)W^{-1}(x,t,z) \tag{1.22}$$

удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = [G,F]. \tag{1.23}$$

Из (1.13) и (1.20) вытекают соотношения

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2^{-1} = w, \quad \widetilde{\varphi}_2 \cdot \widetilde{\varphi}_1^{-1} = \widetilde{w}. \tag{1.24}$$

В силу (1.21)–(1.24) равенство (1.22) может быть записано в виде

$$F(x,t,z) = W_1(x,t,z)(ij)W_1^{-1}(x,t,z), \tag{1.25}$$

где

$$W_1(x,t,z) = \begin{bmatrix} E_m & w(x,t,z) \\ \widetilde{w}(x,t,z) & E_m \end{bmatrix}.$$

Следствие 1.2. Матрица-функция $F(x,t,z)$ в окрестности $z=\infty$ допускает разложение

$$F(x,t,z) = ij + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x,t)/z^k. \tag{1.26}$$

Переписывая (1.25) в виде

$$F(x,t,z)W_1(x,t,z) = W_1(x,t,z)ij$$

и пользуясь асимптотическими разложениями (1.9), (1.16), (1.26), выводим следующую рекуррентную формулу:

$$f_p(x,t) = -\sum_{k=0}^{p-1} f_k(x,t) \begin{bmatrix} 0 & w_{p-k}(x,t)/i^{p-k} \\ \widetilde{w}_{p-k}(x,t)/(-i)^{p-k} & 0 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} 0 & w_p(x,t)/i^{p-1} \\ \widetilde{w}_p(x,t)/(-i)^{p-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad p \geq 1, \quad f_0 = ij. \tag{1.27}$$

Из соотношений (1.1), (1.23), (1.26) выводим, что коэффициенты $f_k(x,t)$ разложения (1.26) удовлетворяют соотношениям (1.7) при всех $k \geq 0$.

Запишем $f_p(x,t)$ в блочном виде

$$f_p(x,t) = \{f_{kl}(x,t,p)\}_{kl=1}^2,$$

где $f_{kl}(x,t,p)$ — матрицы порядка $m \times m$.

Следствие 1.3. Пусть коэффициенты $f_p(x,t)$ функции $F_N(x,t,z)$ (см. (1.2)) определены при помощи формул (1.27). Тогда уравнение (0.1) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{12}}{\partial t} &= 2if_{12}(x,t,N+1), \\ \frac{\partial R_{21}}{\partial t} &= -2if_{21}(x,t,N+1). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Действительно, уравнение (0.1) эквивалентно системе (1.8). Учитывая формулу (1.4) и равенство (1.7) при $k=N$, приходим к системе (1.28).

Замечание 1.1. Предложенный выбор коэффициентов $f_p(x,t)$ функции $F_N(x,t,z)$ не является единственным. Для нас важно, что при таком выборе интересные в прикладном и теоретическом плане уравнения оказываются членами построенной иерархии.

Из формул (1.11), (1.18) следует

$$w_2 = -\frac{1}{4}\frac{\partial R_{12}}{\partial x}, \quad \widetilde{w}_2 = -\frac{1}{4}\frac{\partial R_{21}}{\partial x}, \tag{1.29}$$

$$w_3 = -\frac{1}{8}\frac{\partial^2 R_{12}}{\partial x^2} + \frac{1}{8}R_{12}R_{21}R_{12}, \tag{1.30}$$

$$\widetilde{w}_3 = -\frac{1}{8}\frac{\partial^2 R_{21}}{\partial x^2} + \frac{1}{8}R_{21}R_{12}R_{21}. \tag{1.31}$$

Из (1.10), (1.17), (1.29)–(1.31) и (1.27) вытекают соотношения

$$f_1(x,t)=\begin{bmatrix}0 & R_{12}(x,t)\\ R_{21}(x,t) & 0\end{bmatrix},\qquad f_2(x,t)=\frac{1}{2}i\begin{bmatrix}R_{12}R_{21} & -\frac{\partial R_{12}}{\partial x}\\ \frac{\partial R_{21}}{\partial x} & -R_{21}R_{12}\end{bmatrix},\tag{1.32}$$

$$f_{12}(x,t,3)=-\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 R_{12}}{\partial x^2}-2R_{12}R_{21}R_{12}\Big),\tag{1.33}$$

$$f_{21}(x,t,3)=-\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 R_{21}}{\partial x^2}-2R_{21}R_{12}R_{21}\Big).\tag{1.34}$$

В силу (1.28) и (1.32)–(1.34) уравнения иерархии имеют следующий вид:

если $N=1$, то

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial t}=\frac{\partial R_{12}}{\partial x},\quad \frac{\partial R_{21}}{\partial t}=\frac{\partial R_{21}}{\partial x};$$

если $N=2$, то

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{12}}{\partial t}&=-\frac{1}{2}i\Big(\frac{\partial^2 R_{12}}{\partial x^2}-2R_{12}R_{21}R_{12}\Big),\\ \frac{\partial R_{21}}{\partial t}&=\frac{1}{2}i\Big(\frac{\partial^2 R_{21}}{\partial x^2}-2R_{21}R_{12}R_{21}\Big);\end{aligned}\tag{1.35}$$

если выполнено одно из условий редукции

$$R_{12}=\pm R_{21}^*,\tag{1.36}$$

то система (1.35) эквивалентна матричному нелинейному уравнению Шредингера

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial t}=-\frac{1}{2}i\Big(\frac{\partial^2 R_{12}}{\partial x^2}\mp 2R_{12}R_{12}^*R_{12}\Big);$$

если выполнено условие редукции (1.36) и $N=3$, то система (1.28) эквивалентна матричному модифицированному уравнению Кортевега де Фриза

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial t}=-\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^3 R_{12}}{\partial x^3}\mp\frac{\partial R_{12}}{\partial x}R_{12}^*R_{12}\mp 3R_{12}R_{12}^*\frac{\partial R_{12}}{\partial x}\Big).$$

2. Законы сохранения

1. Законы сохранения для уравнения (1.28) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Tr}[T(x,t)]+\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Tr}[S(x,t)]=0,\tag{2.1}$$

где $\operatorname{Tr}T$ является плотностью, а $\operatorname{Tr}S$ — потоком.

2. Из (0.1) и (0.2) следует равенство [5]

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x,t,z)-F_N(x,t,z)W(x,t,z)=W(x,t,z)\Phi(t,z),\tag{2.2}$$

где $\Phi(t,z)$ — некоторая матрица порядка $2m\times 2m$. Пусть F_{kl} и Φ_{kl} — блоки матриц F_N и Φ размерности $m\times m$. Из соотношений (1.21) и (2.2) следует

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=F_{21}\varphi_1+F_{22}\varphi_2+\widetilde{\varphi}_2\Phi_{12}+\varphi_2\Phi_{22}.\tag{2.3}$$

В силу (1.13) и (2.3) имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi^{-1}=F_{21}w+F_{22}+\widetilde{\varphi}_2\Phi_{12}\varphi_2^{-1}+\varphi_2\Phi_{22}\varphi_2^{-1}.\tag{2.4}$$

Заметим, что верно равенство

$$\operatorname{Tr}(\widetilde{\varphi}_2\Phi_{12}\varphi_2^{-1} + \varphi_2\Phi_{22}\varphi_2^{-1}) = \operatorname{Tr}(\varphi_2^{-1}\widetilde{\varphi}_2\Phi_{12} + \Phi_{22}). \tag{2.5}$$

Согласно (1.12), (1.13) и (1.19), (1.20) справедливо равенство

$$\varphi_2^{-1}\widetilde{\varphi}_2 = e^{2izx}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x,t)/z^k.$$

Теперь, дифференцируя обе части (2.4) по x и учитывая (2.5), можем записать

$$\operatorname{Tr}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\varphi^{-1} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varphi^{-1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Tr}(F_{21}w + F_{22}) + \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Tr}(\varphi_2^{-1}\widetilde{\varphi}_2\Phi_{12}). \tag{2.6}$$

Здесь учитывается, что $\Phi_{22}(t,z)$ не зависит от x.

Для вывода законов сохранения нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть в дополнение к условиям теоремы* 1.1 *выполняется следующее условие*: $\frac{\partial}{\partial t}R_{12}(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial t}R_{21}(x,t)$ *аналитичны по* x *в области, содержащей полуось* $x \geq 0$. *Тогда верны разложения*

$$\frac{\partial w(x,t,z)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial w_k(x,t)}{\partial t}\Big/(iz)^k, \quad |z| > \Delta_0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \widetilde{w}(x,t,z)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial \widetilde{w}_k(x,t)}{\partial t}\Big/(-iz)^k, \quad |z| > \Delta_0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Дифференцируя обе части (1.9) по переменной t, получаем уравнение относительно $\frac{\partial w}{\partial t}$. Применяя общую теорему ([5], c. 255) и равенство (1.10), выводим (2.7). Аналогично выводится (2.8). $\square$

Лемма 2.1. *Существует функция* $c(x,t)$ *такая, что*

$$\|\varphi^{\pm 1}(x,t,z)\| + \|\widetilde{\varphi}(x,t,z)\| \leq c(x,t).$$

Доказательство следует непосредственно из равенств (1.10), (1.12) и (1.16), (1.19).

Лемма 2.2. *Справедлива оценка*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2^{-1}\widetilde{\varphi}_2\Phi_{12})\right\| \leq [A_1(x,t)|z|^N + A_2(x,t)]e^{-2(\operatorname{Im} z)x}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0. \tag{2.9}$$

Доказательство. В силу (1.13), (1.20) верно равенство

$$\varphi_2^{-1}\widetilde{\varphi}_2 = e^{2izx}\varphi^{-1}\widetilde{w}\widetilde{\varphi}.$$

Из леммы 2.1 следует

$$\|\varphi_2^{-1}\widetilde{\varphi}_2\| \leq c(x,t)e^{-2(\operatorname{Im} z)x}/|z|, \quad \operatorname{Im} z \geq 0. \tag{2.10}$$

Учитывая (1.12), (1.19) и (2.10), получаем

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2^{-1}\widetilde{\varphi}_2)\right\| \leq c(x,t)e^{-2(\operatorname{Im} z)x}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0. \tag{2.11}$$

Рассмотрим теперь $\Phi(t,z)$. Согласно (2.2) имеем

$$\Phi(t,z) = W(0,t,z)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}W(0,t,z) - F_N(0,t,z)W(0,t,z)\right],$$

т. е.

$$\|\Phi(t,z)\| \leq c_1(t) + c_2(t)|z|^N, \quad \operatorname{Im} z \geq 0. \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.9), (2.12) вытекает доказываемая оценка (2.9).

Воспользуемся равенством

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varphi^{-1}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}\varphi^{-1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi^{-1}. \tag{2.13}$$

Так как

$$\operatorname{Tr}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi^{-1}\right) = \operatorname{Tr}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varphi^{-1}\right),$$

то из (1.12), (2.6), (2.13) и леммы 2.2 получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Tr}\mu = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Tr}(F_{21}w + F_{22}) + O(e^{-2(\operatorname{Im} z)x}|z|^N). \tag{2.14}$$

Перепишем равенство (1.2) в виде

$$F_N(x,t,z) = [f_0(x,t) + \tfrac{1}{z}f_1(x,t) + \cdots + \tfrac{1}{z^N}f_N(x,t)]z^N.$$

Положим

$$\mu_n(x,t) = R_{21}(x,t)w_n(x,t). \tag{2.15}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в обеих частях (2.14), выводим утверждение. □

Теорема 2.2. *Для уравнений иерархии* (1.28) *справедливы следующие законы сохранения:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Tr}\mu_n(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}i^n\operatorname{Tr}\sum_{m+s=n+N} f_{21}(x,t,m)w_s(x,t)/i^s, \tag{2.16}$$

где $0 \le m \le N$, $n \ge 1$, $s \ge 1$.

Замечание 2.1. Плотности $\operatorname{Tr}\mu_n$ не зависят от N, т. е. являются общими для всей иерархии (1.28).

Замечание 2.2. Пользуясь формулами (1.10), (1.29), (1.30) и (2.15), имеем

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}R_{21}R_{12}, \quad \mu_2 = -\frac{1}{4}R_{21}\frac{\partial R_{12}}{\partial x}, \quad \mu_3 = -\frac{1}{8}R_{21}\left(\frac{\partial^2 R_{12}}{\partial x^2} - R_{12}R_{21}R_{12}\right).$$

Замечание 2.3. Если выполнено условие $R_{12} = \pm R_{21}^*$, то $\mu_1 = \mp R_{12}^* R_{12}$, т. е. μ_1 является знакоопределенной матрицей. Значит, соответствующая плотность может трактоваться как энергия.

Отметим еще, что в этом важном частном случае ($n = 1$) формула (2.16) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Tr}\mu_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(-i)\operatorname{Tr} f_{22}(x,t,N+1). \tag{2.17}$$

Формула (2.17) вытекает непосредственно из (2.16), если учесть, что в силу (2.14) верно равенство

$$f_{22}(x,t,N+1) = -\sum_{k=0}^{N} f_{21}(x,t,k)w_{N+1-k}(x,t)/i^{N+1-k}.$$

3. Асимптотика функции Вейля–Титчмарша

1. В этом параграфе отдельно рассмотрим случай, когда выполнено условие редукции

$$R_{12}(x,t) = R_{21}^*(x,t). \tag{3.1}$$

В этом случае линейная задача (0.2) является самосопряженной, т. е. могут быть использованы результаты спектральной теории [1]. В частности, системе (0.2) соответствует матрица-функция Вейля–Титчмарша $v(t,z)$ порядка $m \times m$ которая определяется при помощи следующего неравенства

$$\int_0^\infty [E_m, iv^*(t,z)]Uw^*(x,t,z)w(x,t,z)U^* \begin{bmatrix} E_m \\ -iv(t,z) \end{bmatrix} dx < \infty,$$

где $w(x,t,z)$ — решение системы (0.2), удовлетворяющее условию

$$w(0,t,z) = E_{2m},$$

а

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} E_m & -E_m \\ E_m & E_m \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Нам понадобится следующая

Теорема 3.1 ([2]). *Пусть решение системы* (1.28) *удовлетворяет условию редукции* (3.1) *и неравенству*

$$\left\| \frac{\partial^k R_{12}(x,t)}{\partial x^k} \right\| \le M, \quad 0 \le k \le N, \quad 0 \le x < \infty, \quad 0 \le t \le T.$$

Тогда соответствующая система (0.2) *имеет единственную функцию Вейля–Титчмарша $v_N(t,z)$, которая определяется при помощи равенства*

$$v_N(t,z) = i\{r_{11}(t,z,N)[-iv(z)] + r_{12}(t,z,N)\}\{r_{21}(t,z,N)[-iv(z)] + r_{22}(t,z,N)\}^{-1}, \tag{3.3}$$

причем $v(z) = v(0,z)$, а матрица $r_N(t,z) = \{r_{kl}(t,z,N)\}_{kl=1}^2$ определяется соотношениями

$$\frac{dr_N(t,z)}{dt} = -\widetilde{F}_N^*(0,t,\overline{z})r_N(t,z), \quad r_N(0,z) = E_{2m}, \tag{3.4}$$

где

$$\widetilde{F}_N(0,t,z) = UF_N(0,t,z)U^*. \tag{3.5}$$

Запишем матрицу $\widetilde{F}_N(0,t,z)$ в блочном виде

$$\widetilde{F}_N(0,t,z) = \{\widetilde{F}_{kl}(t,z,N)\}_{kl=1}^2,$$

где все блоки имеют размерности $m \times m$. Дифференцируя по t обе части (3.3) и учитывая (3.4), получаем

$$\frac{dv_N}{dt} = -\widetilde{F}_{11}^*(t,\overline{z},N)v_N - i\widetilde{F}_{21}^*(t,\overline{z},N) + v_N\widetilde{F}_{22}^*(t,\overline{z},N) - iv_N\widetilde{F}_{12}^*(t,\overline{z},N)v_N. \tag{3.6}$$

2. Далее будем предполагать, что $v_N(t,z)$ в окрестности $z = \infty$ допускает разложение

$$v_N(t,z) = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k(t,N)/z^k, \quad \alpha_0(t,N) = iE_m. \tag{3.7}$$

Определение 3.1. Будем говорить, что решение $R_{12}(x,t)$ системы (1.28) принадлежит классу регулярности $\mathcal{P}_T$, если функция Вейля–Титчмарша $v_N(t,z)$ соответствующей системы (0.2) допускает в окрестности $z = \infty$ при $0 \le t \le T$ представление (3.7).

В силу (1.2) и (3.4) матрица-функция $\widetilde{F}^*_{kl}(t,\overline{z},N)$ допускает представление

$$\widetilde{F}^*_{kl}(t,\overline{z},N)=\sum_{s=0}^{N}\psi_{kl}(t,s)z^{N-s}.$$

Подставляя формулу (3.7) в уравнение (3.6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем

$$\frac{d\alpha_k(t,N)}{dt}=\sum_{p+s-N=k}\psi_{11}(t,s)\alpha_p(t,N)+\sum_{p+s-N=k}\alpha_p(t,N)\psi_{22}(t,s)-i\sum_{p+l+s-N=k}\alpha_p(t,N)\psi_{12}(t,s)\alpha_l(t,N),$$

где $p\geq 0$, $l\geq 0$, $0\leq s\leq N$, $k\geq 1$.

Кроме того, из соотношений (3.6), (3.7) следует

$$-\sum_{p+s=m}\psi_{11}(t,s)\alpha_p(t,N)+\sum_{p+s=m}\alpha_p(t,N)\psi_{22}(t,s)-$$
$$-\sum_{p+l+s=m}\alpha_p(t,N)\psi_{12}(t,s)\alpha_l(t,N)-i\psi_{21}(t,m)=0, \quad (3.8)$$

где $p\geq 0$, $l\geq 0$, $0\leq s\leq m\leq N$.

Согласно (1.3), (3.2) и (3.5) верно равенство

$$\begin{bmatrix}\psi_{11}(t,0) & \psi_{12}(t,0)\\ \psi_{21}(t,0) & \psi_{22}(t,0)\end{bmatrix}=i\begin{bmatrix}0 & E_m\\ E_m & 0\end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Учитывая (3.9), перепишем (3.8) в виде

$$2i\alpha_m(t,N)=\sum_{p+s=m}\psi_{11}(t,s)\alpha_p(t,N)-\sum_{p+s=m}\alpha_p(t,N)\psi_{22}(t,s)+i\psi_{21}(t,m)+$$
$$+i\sum_{p+l+s=m}\alpha_p(t,N)\psi_{12}(t,s)\alpha_l(t,N), \quad (3.10)$$

где $0\leq s\leq m\leq N$, $0\leq p<m$, $0\leq l<m$. Так как коэффициенты $\psi_{ij}(t,s)$ рекуррентного соотношения (3.10) не зависят от N, то верно

Утверждение 3.1. Пусть $N_1\leq N_2$, тогда справедливы равенства

$$\alpha_m(t,N_1)=\alpha_m(t,N_2), \quad 0\leq m\leq N_1.$$

Замечание 3.1. Из формул (1.2), (1.27) и (3.5), (3.10) вытекают, в частности, равенства

$$\alpha_1(t,N)=-R^*_{12}(0,t), \quad N\geq 1,$$
$$\alpha_2(t,N)=-\frac{1}{2}i\left[\frac{\partial}{\partial x}R^*_{12}(x,t)\mid_{x=0}+2R^*_{12}(0,t)^2\right], \quad N\geq 2.$$

3. Как и в скалярном случае [6], функции $\widetilde{F}^*_{kl}(x,t,N)$ могут быть выражены через $\alpha_m(t,N)$, при этом следует пользоваться формулами (1.2), (1.27) и (3.5), (3.10). Опустим соответствующие выражения из-за их громоздкости. После этого уравнение (3.6) связывает только коэффициенты $\alpha_m(t,N)$ и не содержит $R_{12}(0,t)$, $\frac{\partial^k}{\partial x^k}R_{12}(x,t)\mid_{x=0}$. Повторяя теперь рассуждения статьи [6], выводим

Утверждение 3.2. Пусть $\operatorname{Im}v_0(z)>0$ при $\operatorname{Im}z\geq 0$ и

$$v_0(z)=iE_m+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(0)/z^k, \quad |z|\geq|z_0|>0.$$

Тогда уравнение (3.6) имеет одно и только одно решение $v_N(t,z)$ такое, что при $0 \le t \le T_N$ и $|z| \ge |z_N|$ верно представление (3.7), причем

$$v_N(0,z) = v_0(z), \quad \operatorname{Im} v_N(t,z) \ge 0, \quad \operatorname{Im} z \ge 0.$$

Из утверждения 3.2 и результатов статьи [1] непосредственно следует

Теорема 3.2. *Пусть матрица-функция*

$$R_{12}(x,0) = \Phi(z) \tag{3.11}$$

такова, что матрица-функция Вейля–Титчмарша $v_0(z)$ *соответствующей системы* (0.3) *удовлетворяет условиям утверждения* 3.2. *Тогда при некотором* $T_N > 0$ *система* (1.28), (3.1) *имеет одно и только одно решение* $R_{12}(x,t,N)$ ($0 \le x < \infty$, $0 \le t \le T_N$), *принадлежащее классу* $\mathcal{P}_{T_N}$ *и удовлетворяющее условию* (3.11).

В частности, теорема 3.2 применима к нелинейному уравнению Шредингера ($N = 2$) и модифицированному уравнению Кортевега де Фриза ($N = 3$).

Замечание 3.2. Из теоремы 3.2 следует, что для однозначной разрешимости уравнений иерархии (1.28), (3.1) при $0 \le x < \infty$, $0 \le t \le T$ в классе $\mathcal{P}_T$ достаточно начальных данных и не требуется присоединение граничных данных.

4. Формулы (3.10) верны и при $t = 0$. В этом случае получаем равенство

$$2i\alpha_m(0) = \sum_{p+s=m} \psi_{11}(0,s)\alpha_p(0) - \sum_{p+s=m} \alpha_p(0)\psi_{22}(0,s) + \\ + i \sum_{p+l+s=m} \alpha_p(0)\psi_{12}(0,s)\alpha_l(0) + i\psi_{21}(0,m), \tag{3.12}$$

где $0 \le p < m$, $0 \le l < m$, $s \ge 0$, $m > 0$. Формула (3.12) связывает коэффициенты разложения $\alpha_m(0)$ функции $v_0(z)$ со значениями $\Phi^{(k)}(0)$.

Интересно отметить, что формула (3.12), относящаяся к линейной стационарной системе (0.3), выведена в результате исследования иерархии нелинейных нестационарных систем.

Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи.* – М.: Мир, 1987. – 480 с.
2. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде* // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61. – С. 118–134.
3. Сахнович Л.А. *Задачи факторизации и операторные тождества* // УМН. – 1986. – Т. 41. – № 1. – С. 3–55.
4. Сахнович Л.А. *Метод операторных тождеств и задачи анализа* // Алгебра и анализ. – 1993. – Т. 5. – № 1. – С. 3–80.
5. Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1968. – 464 с.
6. Сахнович Л.А. *Интегрируемые нелинейные уравнения на полуоси* // Укр. матем. журн. – 1991. – Т. 43. – № 11. – С. 1578–1584.

Украинская государственная
Академия связи

Поступила
19.03.1997