ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 517.986

Г.Г. АМОСОВ

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПОЛУГРУПП ИЗОМЕТРИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Исследуется класс C_0-полугрупп изометрических операторов $(U_t)_{t\geq 0}$, связанных с фиксированной C_0-полугруппой изометрических операторов $(V_t)_{t\geq 0}$ в гильбертовом пространстве условием $\|U'_t - V'_t\|_2 = O(t^{1/2})$, $t\to 0$. Здесь $(U'_t)_{t\geq 0}$ и $(V'_t)_{t\geq 0}$ — минимальные унитарные дилатации исходных полугрупп, $\|\cdot\|_2$ — норма Гильберта–Шмидта. Введенное условие является достаточным для коциклической сопряженности полугрупп эндоморфизмов алгебры канонических антикоммутационных соотношений, определяемых полугруппами $(U_t)_{t\geq 0}$ и $(V_t)_{t\geq 0}$. В § 1 дается определение аппроксимации C_0-полугрупп изометрических операторов в гильбертовом пространстве и приводятся его следствия. В § 2 доказано, что среди всех полугрупп изометрических операторов, аппроксимирующих заданную полугруппу с равномерно непрерывной унитарной частью, найдется полугруппа вполне неунитарных изометрических операторов.

1. Определение аппроксимации

Всюду ниже рассматриваются C_0-полугруппы $(V_t)_{t\geq 0}$ изометрических операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве h. Символами s_2, $\|\cdot\|_2$, s_∞ и $\|\cdot\|$ обозначаются класс операторов Гильберта–Шмидта, норма Гильберта–Шмидта, класс вполне непрерывных операторов в h и норма в $B(h)$ соответственно. Генератором C_0-полугруппы $(V_t)_{t\geq 0}$ называется, вообще говоря, неограниченный кососимметрический оператор $d = \lim\limits_{t\to 0}\frac{V_t - I}{t}$ с областью определения $\mathcal{D}(d)$, плотной в h ([1], гл. III, с. 160).

Определение. C_0-полугруппа $(V_t)_{t\geq 0}$ изометрических операторов в гильбертовом пространстве h называется *аппроксимирующей C_0-полугруппу* $(U_t)_{t\geq 0}$ изометрических операторов в h, если у полугрупп $(V_t)_{t\geq 0}$ и $(U_t)_{t\geq 0}$ найдутся такие минимальные унитарные дилатации $(V'_t)_{t\geq 0}$ и $(U'_t)_{t\geq 0}$, действующие в гильбертовом пространстве h', $h\subset h'$, что

$$\|V'_t - U'_t\|_2 = O(t^{1/2}), \quad t\to 0, \tag{1}$$

где $V'_t - U'_t = \Delta_t \in s_2$, $t\geq 0$, есть непрерывное по норме $\|\cdot\|_2$ семейство операторов.

Замечание 1. Из условия (1) следует, что полугруппы, аппроксимирующие друг друга в смысле нашего определения, будут аппроксимировать друг друга в смысле [2], т. е. для них выполнено $\|U_t - V_t\| = O(t^{1/2}), t\to 0$.

Замечание 2. Любая C_0-полугруппа изометрических операторов $(V_t)_{t\geq 0}$ в гильбертовом пространстве h определяет полугруппу эндоморфизмов $(B(V_t))_{t\geq 0}$ алгебры канонических антикоммутационных соотношений $\mathcal{A}(h)$ над h. Для коциклической сопряженности полугрупп эндоморфизмов $(B(U_t))_{t\geq 0}$ и $(B(V_t))_{t\geq 0}$ достаточно, чтобы $(U_t)_{t\geq 0}$ аппроксимировала $(V_t)_{t\geq 0}$ [3].

Предложение 1. *Пусть C_0-полугруппа изометрических операторов $(V_t)_{t\geq 0}$ аппроксимирует C_0-полугруппу изометрических операторов $(U_t)_{t\geq 0}$. Тогда генераторы полугрупп $(V_t)_{t\geq 0}$ и $(U_t)_{t\geq 0}$ имеют равные индексы дефекта.*

Доказательство. По условию имеем $U_t = P_h U'_t|_h$, $V_t = P_h V'_t|_h$, $t \geq 0$, где P_h есть проектор в пространстве h', проектирующий его на подпространство h. Следовательно, $U_t = V_t + P_h \Delta_t|_h$, $t \geq 0$, и семейство $(P_h \Delta_t|_h)_{t\geq 0}$ непрерывно по норме $\|\cdot\|_2$. Обозначив генераторы полугрупп $(V_t)_{t\geq 0}$ и $(U_t)_{t\geq 0}$ символами d и D соответственно, получим

$$(I-D)^{-1} = (I-d)^{-1} - \frac{1}{2}\Delta. \tag{2}$$

Здесь $\Delta = -2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} P_h \Delta_t|_h dt$ — некоторый вполне непрерывный оператор. Пусть $V = (d+I)(d-I)^{-1}$ и $U = (D+I)(D-I)^{-1}$ — когенераторы полугрупп $(U_t)_{t\geq 0}$ и $(V_t)_{t\geq 0}$ соответственно, тогда из (2) следует

$$V = U + \Delta, \quad \Delta \in s_\infty. \tag{3}$$

Добавление вполне непрерывного оператора не меняет индекс оператора, следовательно, (3) означает, что генераторы d и D имеют равные индексы дефекта, поскольку индекс дефекта генератора d равен индексу $n = \dim V - \dim V^* = -\dim V^*$ когенератора V, взятому со знаком минус ([1], гл. III, с. 170–172). $\square$

Следствием предложения 3.2.70 ([4], гл. III, с. 297) является

Предложение 2. *Пусть C_0-полугруппа изометрических операторов $(V_t)_{t\geq 0}$ аппроксимирует C_0-полугруппу изометрических операторов $(U_t)_{t\geq 0}$ и пусть d' и D' — генераторы минимальных унитарных дилатаций $(V'_t)_{t\geq 0}$ и $(U'_t)_{t\geq 0}$ в пространстве h'. Тогда в h' найдутся такие унитарный оператор W, $W - I \in s_2$, и кососопряженный оператор $P \in s_2$, что $d' = W(D'+P)W^*$.*

2. Класс изометрических полугрупп, аппроксимирующих заданную

Напомним, что C_0-полугруппа изометрических операторов называется вполне неунитарной, если не существует подпространства, сужение на которое исходной полугруппы является полугруппой унитарных операторов. Заметим, что любая вполне неунитарная полугруппа изометрических операторов $(V_t)_{t\geq 0}$ унитарно эквивалентна своей модели, C_0-полугруппе сдвигов $(S_t)_{t\geq 0}$, действующей в гильбертовом пространстве $h = H \otimes L_2(0,+\infty)$ по формуле $(S_t f)(x) = f(x-t)$, $x > t$, $(S_t f)(x) = 0$, $0 \leq x \leq t$, $f \in h$. Здесь H — некоторое гильбертово пространство размерности, равной индексу дефекта генератора полугруппы $(V_t)_{t\geq 0}$ ([1], гл. III, с. 170–172). Как известно, для полугруппы $(V_t)_{t\geq 0}$ определено разложение Вольда пространства $h : h = h_0 \oplus h_1$ на подпространство h_0, приводящее $(V_t)_{t\geq 0}$ к C_0-полугруппе унитарных операторов, и подпространство h_1, приводящее $(V_t)_{t\geq 0}$ к C_0-полугруппе вполне неунитарных изометрических операторов с тем же индексом дефекта генератора, что у $(V_t)_{t\geq 0}$ ([1], гл. III, с. 172). Будем говорить, что $(V_t)_{t\geq 0}$ удовлетворяет *условию N*, если C_0-полугруппа $(V_t|_{h_0})_{t\geq 0}$ унитарных операторов в пространстве h_0 непрерывна по норме $\|\cdot\|$.

Теорема. *Пусть C_0-полугруппа $(V_t)_{t\geq 0}$ изометрических операторов в гильбертовом пространстве h с индексом дефекта генератора $0 < n \leq +\infty$ удовлетворяет условию N.*

Тогда найдется аппроксимирующая ее C_0-полугруппа вполне неунитарных изометрических операторов в h с индексом дефекта генератора n.

Доказательство теоремы использует определения и результаты функциональной модели С.-Надя–Фояша ([1], [5]). Пусть $(\lambda_k)_{1\leq k<N}$, $N \leq +\infty$, — система комплексных чисел, занумерованных в произвольном порядке. Предположим, что на числа $(\lambda_k)_{1\leq k<N}$ наложено условие

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \quad |\operatorname{Im}\lambda_k| < R, \quad 1 \leq k < N, \quad \sum_{k=1}^{N} |\operatorname{Re}\lambda_k| < +\infty, \tag{4}$$

где R — некоторое положительное число. В этом случае формула $B(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{N} \frac{\lambda+\overline{\lambda_k}}{\lambda-\lambda_k}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, определяет аналитическую функцию, регулярную в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и равную по модулю единице на мнимой оси. Функция $B(\lambda)$ называется произведением Бляшке ([5], с. 332–333).

Предложение 3. *Пусть на числа $(\lambda_k)_{1\le k<N}$ наложено условие* (4). *Тогда для произведения Бляшке $B(\lambda)$, построенного по системе $(\lambda_k)_{1\le k<N}$, справедливо*

$$|B(\lambda)| < C_1, \quad |\lambda| > C_2; \quad B(\lambda) = 1 - \frac{C_3}{\lambda} + o\Big(\frac{1}{\lambda}\Big), \quad |\lambda| \to +\infty, \ \ \lambda \in \mathbf{C},$$

где C_1, C_2 и C_3 — некоторые положительные числа.

Доказательство. Обозначим $s = -\sum\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Re}\lambda_k$. По условию имеем $0 < s < +\infty$. Следовательно,

$$\ln B(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \ln \frac{1+\overline{\lambda_k}/\lambda}{1-\lambda_k/\lambda} = -\frac{2s}{\lambda} + o\Big(\frac{1}{\lambda}\Big), \quad |\lambda| \to +\infty.$$

Рассмотрим гильбертово пространство $h = L_2(0,+\infty)$. Пусть $P_{[t_1,t_2]}$ обозначает проектор в h на подпространство, состоящее из функций $f(x) = 0$ при почти всех x, $0 < x < t_1, t_2 < x < +\infty$. Определим изометрический оператор Θ, действующий в h по формуле $\Theta = \mathcal{F}^{-1}B\mathcal{F}$, здесь $\mathcal{F}$ и B — преобразование Фурье и оператор умножения на произведение Бляшке соответственно.

Предложение 4. *Пусть выполнены условия предложения* 3. *Тогда $\Delta_{t,\delta} = P_{[t,t+\delta]}\Theta P_{[t,t+\delta]}$, $P_{[t,t+\delta]} \in s_2$, $0 < t, \delta < +\infty$, $\|\Delta_{t,\delta}\|_2 = O(\delta^{1/2})$, $\delta \to 0$.*

Доказательство. Фиксируем число $t > 0$. Введем семейство комплексных чисел $(\mu_{k,\delta})_{k\in\mathbf{N}}$ по формуле $\mu_{k,\delta} = -\frac{1}{2|k|} + i\frac{2\pi k}{\delta}$, $k \in \mathbf{Z}$, $\delta > 0$, и рассмотрим семейство функций $f_{k,\delta}(x) = (-2\operatorname{Re}\mu_{k,\delta})^{1/2}(e^{2\operatorname{Re}\mu_{k,\delta}t} - e^{2\operatorname{Re}\mu_{k,\delta}(t+\delta)})^{-1/2}e^{\mu_{k,\delta}x}$, $t < x < t+\delta$, $f_{k,\delta}(x) = 0$, $0 < x < t$, $t+\delta < x < +\infty$, $k \in \mathbf{Z}$. Семейство функций $(f_{k,\delta})_{k\in\mathbf{Z}}$ образует базис Рисса пространства $H = P_{[t,t+\delta]}h$ ([5], с. 342), иными словами, в пространстве H найдется такой ограниченный оператор V с ограниченным обратным, что семейство $(Vf_{k,\delta})_{k\in\mathbf{Z}}$ является ортонормированным базисом пространства H. Следовательно, для доказательства предложения 4 достаточно доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} \|\Delta_{t,\delta}f_{k,\delta}\|^2$ и исследовать его зависимость от δ. Пусть $f_{k,\delta}^{(1)}(x) = f_{k,\delta}(x)$, $f_{k,\delta}^{(2)} = P_{[t+\delta,+\infty]}f_{k,\delta}^{(1)}$, $t < x < +\infty$, $f_{k,\delta}^{(1)}(x) = f_{k,\delta}^{(2)}(x) = 0$, $0 < x < t$, $k \in \mathbf{Z}$. Тогда $f_{k,\delta} = f_{k,\delta}^{(1)} - f_{k,\delta}^{(2)}$, $k \in \mathbf{Z}$, и $\|\Delta_{t,\delta}f_{k,\delta}\|^2 \le 2(\|\Delta_{t,\delta}f_{k,\delta}^{(1)}\|^2 + \|\Delta_{t,\delta}f_{k,\delta}^{(2)}\|^2)$, $k \in \mathbf{Z}$. Имеем

$$\|\Delta_{t,\delta}f_{k,\delta}^{(i)}\|^2 = 2(\|f_{k,\delta}^{(i)}\|^2 - \operatorname{Re}(\Theta f_{k,\delta}^{(i)}, f_{k,\delta}^{(i)})), \quad k \in \mathbf{Z}, \quad i = \overline{1,2},$$

$$\|f_{k,\delta}^{(1)}\|^2 = \frac{e^{\operatorname{Re}\mu_{k,\delta}t}}{e^{\operatorname{Re}\mu_{k,\delta}t} - e^{\operatorname{Re}\mu_{k,\delta}(t+\delta)}} = -\frac{1}{2\operatorname{Re}\mu_{k,\delta}\delta} + o(1), \quad |k| \to +\infty,$$

$$\|f_{k,\delta}^{(2)}\|^2 = \frac{e^{\operatorname{Re}\mu_{k,\delta}(t+\delta)}}{e^{\operatorname{Re}\mu_{k,\delta}t} - e^{\operatorname{Re}\mu_{k,\delta}(t+\delta)}} = -\frac{1}{2\operatorname{Re}\mu_{k,\delta}\delta} + o(1), \quad |k| \to +\infty.$$

Применяя технику преобразования Лапласа, получим

$$(\Theta f_{k,\delta}^{(i)}, f_{k,\delta}^{(i)}) = B(\mu_{k,\delta})\|f_{k,\delta}^{(i)}\|^2, \quad i = \overline{1,2}.$$

Таким образом, в силу предложения 3

$$\|\Delta_{t,\delta}f_{k,\delta}^{(i)}\|^2 = \|f_{k,\delta}^{(i)}\|^2(1 - \operatorname{Re}B(\mu_{k,\delta})) = \frac{1}{2\delta|\mu_{k,\delta}|^2} + o\Big(\frac{1}{2\delta|\mu_{k,\delta}|^2}\Big) =$$
$$= \frac{\delta}{8\pi^2k^2} + o\Big(\frac{\delta}{k^2}\Big), \quad |k| \to +\infty, \quad \delta \to 0, \quad i = \overline{1,2}.$$

Следовательно,

$$\|\Delta_{t,\delta}\|_2^2 \le C \sum_{k\in\mathbf{Z}} \|\Delta_{t,\delta} f_{k,\delta}\|^2 \le 2C \sum_{k\in\mathbf{Z}} (\|\Delta_{t,\delta} f_{k,\delta}^{(1)}\|^2 + \|\Delta_{t,\delta} f_{k,\delta}^{(2)}\|^2) = O(\delta), \quad \delta \to 0,$$

где C — некоторое положительное число, и $\|\Delta_{t,\delta}\|_2 = O(\delta^{1/2})$, $\delta \to 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы. Пусть оператор d является генератором непрерывной по норме полугруппы унитарных операторов $(U_t)_{t\ge 0}$, являющейся унитарной частью некоторой полугруппы изометрических операторов, отвечающей ей в силу разложения Вольда. Согласно теореме Неймана ([6], гл. X, с. 648) для кососопряженного оператора d найдется ограниченный кососопряженный оператор $D \in s_2$ такой, что кососопряженный оператор $d + D$ имеет чисто точечный спектр. Таким образом, оператор $d + D$ является генератором некоторой непрерывной по норме полугруппы унитарных операторов $(V_t)_{t\ge 0}$ с чисто точечным спектром. Как известно ([6], гл. IX, с. 602), полугруппы $(V_t)_{t\ge 0}$ и $(U_t)_{t\ge 0}$ связаны соотношением $V_t - U_t = \int\limits_0^t U_{t-s} D V_s ds$, $t \ge 0$, следовательно, $V_t - U_t \in s_2$ и $\|V_{t+\delta} - U_{t+\delta} - V_t + U_t\| = O(\delta)$, $t \ge 0$, $\delta \to 0$.

Поскольку полугруппа $(V_t)_{t\ge 0}$ непрерывна по норме, ее спектр лежит в круге радиуса $R > 0$ в комплексной плоскости. Пусть $(i\mu_k)_{1\le k<N}$ — собственные числа генератора полугруппы $(V_t)_{t\ge 0}$, занумерованные в порядке убывания модулей. Имеем $|\mu_k| < R$, $1 \le k < N$, $N \le +\infty$. Введем последовательность комплексных чисел $(\lambda_k)_{1\le k<N}$ с $\operatorname{Im}\lambda_k = -\mu_k$, $1 \le k < N$, а действительные части подобраны таким образом, чтобы выполнялось условие (4). Условие (4) позволяет корректно определить по числам $(\lambda_k)_{1\le k<N}$ произведение Бляшке $B(\lambda)$ (см. на с. 9).

Дальнейшее доказательство проведено для случая индекса дефекта генератора $n = 1$. Это докажет теорему, поскольку любая C_0-полугруппа изометрических операторов в гильбертовом пространстве с ненулевым индексом дефекта генератора разбивается в ортогональную сумму C_0-полугруппы изометрических операторов с индексом дефекта генератора 1 и, возможно, C_0-полугруппы вполне неунитарных изометрических операторов. Мы покажем, что в пространстве $h = L_2(0, +\infty)$ найдется C_0-полугруппа изометрических операторов, унитарно эквивалентная заданной полугруппе изометрических операторов с индексом дефекта генератора 1 и чисто точечным спектром унитарной части, состоящим из чисел $(i\mu_k)_{1\le k<N}$.

Пусть $(S_t)_{t\ge 0}$ — C_0-полугруппа сдвигов пространства $h = L_2(0, +\infty)$. Рассмотрим семейство функций $f_n(x) = (2\operatorname{Re}\lambda_n)^{1/2} e^{\lambda_n x}$, $1 \le n < N$. Отметим, что условие (4) означает неполноту системы $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ в пространстве h (условие сходимости произведения Бляшке). Таким образом, подпространство h_1, натянутое на функции системы $(f_n)_{1\le n<N}$, не совпадает с h и задает подпространство h_0, инвариантное относительно полугруппы $(S_t)_{t\ge 0}$, которое полностью определяется условием ортогональности всем функциям f_n, так что $h = h_0 \oplus h_1$, причем изометрический оператор $\Theta : h \to h$, $\Theta = \mathcal{F}^{-1} B \mathcal{F}$, $\Theta S_t = S_t \Theta$ $\forall t \ge 0$, определяет h_0 и h_1 посредством формулы $h_0 = \Theta h$ ([5], с. 27).

Полугруппа $(S_t)_{t\ge 0}$ сплетается оператором Θ со своим сужением на подпространство h_0: $S_t|_{h_0}\Theta = \Theta S_t$ $\forall t \ge 0$. Изометрический оператор $\Theta : h \to h$ задает унитарное отображение $h \to \operatorname{Ran}\Theta = h_0$, следовательно, полугруппы $(S_t)_{t\ge 0}$ и $(S_t|_{h_0})_{t\ge 0}$ унитарно эквивалентны, так что индекс дефекта генератора полугруппы $(S_t|_{h_0})_{t\ge 0}$ вполне неунитарных изометрических операторов в пространстве h_0 совпадает с индексом дефекта генератора полугруппы $(S_t)_{t\ge 0}$ и равен единице.

Пусть система функций $(g_n)_{1\le n<N}$ получена последовательной ортонормализацией системы $(f_n)_{1\le n<N}$. Рассмотрим C_0-полугруппу $(V_t)_{t\ge 0}$ изометрических операторов в пространстве h такую, что

$$V_t|_{h_0} = S_t|_{h_0}, \quad V_t g_n = e^{-i\operatorname{Im}\lambda_n t} g_n, \ \ t \ge 0, \ \ 1 \le n < N. \tag{5}$$

Покажем, что для изометрических операторов V_t, $t \ge 0$, введенных в (5), справедливо

$$V_t S_t^* - P_{[t,+\infty]} \in s_2, \quad \|V_t - S_t\|_2 \le \|V_t S_t^* - P_{[t,+\infty)}\|_2 = O(t^{1/2}), \quad t \to 0.$$

Фиксируем $t > 0$. Нам нужно доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \|(V_t S_t^* - P_{[t,+\infty)}) f_n\|^2$ для какого-нибудь ортонормального базиса (о. н. б.) $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ пространства h. Выберем в качестве такого базиса произвольное дополнение системы $(S_t g_n)_{1 \le n < N}$ до о. н. б. пространства h.

Заметим, что

$$V_t S_t^* - P_{[t,+\infty)} = P_{[0,t]} V_t S_t^* + (P_{[t,+\infty]} V_t S_t^* - P_{[t,+\infty]})$$

и $(V_t S_t^* - P_{[t,+\infty)})|_{h_t} = 0$, где символом h_t обозначено ортогональное дополнение пространства, натянутого на систему векторов $(S_t g_n)_{1 \le n < N}$. Элемент $S_t^* g_n$ принадлежит линейной оболочке элементов g_i, $i = \overline{1,n}$, так что $(S_t^* g_n, g_n) = e^{\lambda_n t}$, $1 \le n < N$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\|(P_{[t,+\infty)} V_t S_t^* - P_{[t,+\infty)}) S_t g_n\|^2 = \\
&\qquad = 1 + \|P_{[t,+\infty)} g_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(V_t g_n, S_t g_n) < 2(1 - \mathrm{Re}(V_t g_n, S_t g_n)) = 2(1 - e^{\mathrm{Re}\,\lambda_n t}), \quad n \in \mathbf{N}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Для оператора $P_{[0,t]} V_t S_t^*$ имеем соотношения

$$\|P_{[0,t]} V_t S_t^* S_t g_n\|^2 = \|P_{[0,t]} g_n\|^2 = 1 - (P_{[t,+\infty)} g_n, g_n) < 1 - |(S_t^* g_n, g_n)|^2 = 1 - e^{2\,\mathrm{Re}\,\lambda_n t}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (7)$$

Заметим, что при выводе формулы (7) использовано неравенство Бесселя.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} \|(V_t S_t^* - P_{[t,+\infty)}) f_i\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\|(P_{[t,\infty]} V_t S_t^* - P_{[t,\infty]}) S_t g_n\|^2 + \|P_{[0,t]} V_t S_t^* S_t g_n\|^2) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-4\,\mathrm{Re}\,\lambda_n t + o(\mathrm{Re}\,\lambda_n)) = O(t)
\end{aligned}$$

в силу (6), (7) и (4). Следовательно, $\|V_t S_t^* - P_{[t,+\infty)}\|_2 = O(t^{1/2})$.

Заметим, что $V_t - S_t = V_t|_{h_1} - P_{h_1} S_t|_{h_1}$, $t \ge 0$, и полугруппа $(V_t|_{h_1})_{t \ge 0}$ непрерывна по норме по условию. Из условия $V_t - S_t \in s_2$, $t \ge 0$, $\|V_t - S_t\|_2 = O(t^{1/2})$, $t \to 0$, и непрерывности полугруппы $(V_t|_{h_1})_{t \ge 0}$ в смысле нормы $\|\cdot\|$ следует, что семейство $(V_t - S_t)_{t \ge 0}$ непрерывно в смысле нормы $\|\cdot\|_2$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\|V_{t+\delta} - S_{t+\delta} - V_t + S_t\|_2 = \|P_{h_1}(V_{t+\delta} - S_{t+\delta} - V_t + S_t) P_{h_1}\|_2 \le \\
&\qquad \|P_{h_1}(V_\delta - I)(V_t - S_t) P_{h_1}\|_2 + \|(V_\delta - S_\delta) V_t\|_2 + \|(V_t - S_t)(V_\delta - S_\delta)\|_2 \le \\
&\qquad\qquad \le \|P_{h_1}(V_\delta - I) P_{h_1}\|\,\|V_t - S_t\|_2 + \|V_\delta - S_\delta\|_2 (1 + \|V_t - S_t\|_2) \to 0, \quad \delta \to 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем для семейства операторов $\Delta_t = V_t - S_t$, $t \ge 0$,

$$\Delta_t \in s_2, \ \ \|\Delta_{t+s} - \Delta_t\|_2 \to 0, \ \ \|\Delta_s\|_2 = O(s^{1/2}), \ \ t \ge 0, \ \ s \to 0. \qquad (8)$$

Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что у полугрупп $(V_t)_{t \ge 0}$ и $(S_t)_{t \ge 0}$, $V_t - S_t \in s_2$, $t \ge 0$, найдутся унитарные дилатации $(V_t')_{t \ge 0}$ и $(S_t')_{t \ge 0}$ с требуемыми свойствами. Введем унитарные дилатации в пространстве $h' = h \oplus h$ по формуле

$$\begin{gathered}
S_t'(f \oplus g)(x) = ((S_t f)(x) + (P_{[0,t]} g)(t - x)) \oplus (S_t^* g)(x), \\
V_t'(f \oplus g)(x) = ((V_t f)(x) + (\Theta(P_{[0,t]} g)(t - \cdot))(x)) \oplus (S_t^* g)(x), \\
x, t \ge 0, \ \ f, g \in h.
\end{gathered}$$

Теперь результат следует из (8) и предложения 4. $\square$

Автор признателен А.В. Булинскому за внимание к работе и стимулирующее обсуждение.

Литература

1. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Мир, 1970. – 432 с.
2. Robinson D.W. *The approximation of flows* // J. Funct. Anal. – 1977. – V. 24. – № 2. – P. 280–290.
3. Амосов Г.Г. *О классе коциклической сопряженности квазисвободных K-систем* // Некотор. пробл. фунд. и прикл. матем. – М.: Изд-во МФТИ, 1997. – С. 4–16.
4. Браттели У., Робинсон Д. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.* – М.: Мир, 1982. – 512 с.
5. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.

Московский физико-технический институт

Поступили
первый вариант 18.06.1997
окончательный вариант 29.04.1998