ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 6 (505)

УДК 517.984

В.С. МОКЕЙЧЕВ

ОБ ОТСУТСТВИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ У ЗАДАЧИ, ОБОБЩАЮЩЕЙ ЗАДАЧУ О ВОЛНОВОДАХ

В статье продолжается изучение задачи

$$P(D)u = (\mu + g(x))u, \quad x \in R^n; \quad u \in L^2(R^n), \tag{1}$$

в которой $P(iy) \geq 0$ — символ псевдодифференциального оператора и $g(x) \in L^2_{\text{loc}}(R^n)$ — измеримая, вещественная, ограниченная в существенном функция, равная нулю вне измеримого множества Ω.

В [1] выделены случаи, важные с точки зрения приложений к задаче из теории волноводов, когда задача (1) имеет ненулевое решение. При этом никаких дополнительных ограничений на обобщенное решение u не налагалось. В данной работе докажем,что даже достаточно слабые (для приближенных вычислений естественные) дополнительные ограничения на решение приведут к отсутствию собственных значений.

Часто, чтобы решить задачу (1), используют преобразование Фурье по части переменных. Например, если $g(x)$ зависит только от x_j, то формальное использование преобразования Фурье по остальным переменным приведет к дифференциальному уравнению одного аргумента. Чтобы обосновать такую возможность, следует требовать выполнения при почти всех x_j и почти всех z равенства

$$(F(P(D)u))(x_j, z) = P(D_j, iz)((Fu)(x_j, z)). \tag{2}$$

Здесь и далее $(Fv)(x_j, z)$ — преобразование Фурье медленно растущей обобщенной функции $v(x_j, t)$ (при фиксированном x_j).

В работе решается возникающий вопрос: *какие ограничения на u (а не на Fu) гарантируют выполнение* (2) ?

Введем обозначения. Каждый вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ будем записывать в виде (x_j, t), где t — вектор, получающийся из x вычеркиванием координаты с номером j. Поэтому при любом числе a записи ax, $a(x_j, t)$, $(ax_1, \dots, ax_n)$ означают одно и то же.

Всюду считаем $f(x) = w(x)$ в T, если последние равенства выполняются почти всюду в T.

Ответ дается в следующем, возможно известном в теории обобщенных функций, утверждении.

Теорема 1. *Если u — решение задачи* (1) *и $P(D_j, iz)((Fu)(x_j, z)) \in L^2(R^n)$, то имеет место* (2).

Доказательство. Так как $P(D_j, iz)((Fu)(x_j, z)) \in L^2(R^n)$, то для почти всех z левая часть принадлежит и $L^2(R)$, т. е. является обобщенной функцией (по x_j) медленного роста. Вычислив ее преобразование Фурье по x_j, получим

$$(F(P(D_j, iz)((Fu)(x_j, z))))(z_j, z) = P(iz_j, z)((Fu)(z_j, z)) = P(iz_j, z)(Fu)(z_j, z).$$

С другой стороны, $P(D)u \in L^2(R^n)$, поэтому $(F(P(D)u))(x_j, z) \in L^2(R^n)$. Тогда при почти всех z имеем $(F(P(D)u))(x_j, z) \in L^2(R)$, и можно вычислить преобразование Фурье по x_j, т. е. $(F((F(P(D)u))(x_j, z)))(z_j, z)$. Если $\phi(z_j, z)$ — быстро убывающая функция, то

$$((F(P(D)u))(x_j, z))((F\phi)(x_j, z)) = (P(D)u)((F\phi)(x_j, t)) = u(P(-D)(F\phi)(x)) =$$
$$= (P(iz_j, iz)u)((F\phi)(x)) = (P(iz_j, z))u((F\phi)(x)) = (F(P(D)u))(\phi(z_j, z)).$$

Таким образом, доказано, что в смысле обобщенных функций медленного роста выполняется равенство

$$(F(P(D_j, iz)(Fu)(x_j, z)))(z_j, z) = (F((F(P(D)u))(x_j, z)))(z_j, z).$$

Так как повторные преобразования совпадают, то для почти всех x_j в смысле обобщенных функций выполняется (2). Поскольку $P(D_j, iz)((Fu)(x_j, z)) \in L^2(R^{n-1})$, $(F(P(D)u))(x_j, z) \in L^2(R^{n-1})$ для почти всех x_j, то теорема доказана. □

Итак, чтобы воспользоваться методом преобразования Фурье по части переменных, нужно требовать выполнения аналогов равенства (2), т. е. решать фактически задачу типа (1), (2). Однако может случиться так, что последняя будет иметь только нулевое решение, хотя сама задача (1) будет иметь ненулевое решение.

Выяснить, когда задача типа (1), (2) имеет только нулевое решение, — одна из основных целей статьи.

Другой основной целью является выделение случаев, когда решение задачи (1) оказывается нулевым вне Ω.

К сожалению, для нашей задачи мало пользы от теоремы Пэли–Винера ([2], с. 21), хотя с ее помощью можно доказать свойство $u = 0$ вне шара Ω для некоторых квазиполиномов $P(iz)$.

Пусть A — ортонормированная матрица. Тогда замена аргументов $\tau = Ax$ означает поворот осей координат (для удобства говорим: поворот A), через $j(A)$ будем обозначать координату с номером j при повороте A.

Определение 1. Множество T имеет *простую структуру*, если существуют множество поворотов Π и числа $\tau_{k,0} > 0$ такие, что при каждом $k = 1, 2$ существует поворот A, для которого $R^n - T \subset \{\tau_{k(A)} \geq \tau_{k,0}\}$, причем при каждом $j = 1, 2$

$$R^n - T = \bigcup_{A \in \Pi} \{\tau_{j(A)} \geq \tau_{j,0}\}, \tag{3}$$

где разность означает дополнение T до R^n.

Очевидно, что любой шар является множеством с простой структурой. Это же можно сказать и о любом ограниченном выпуклом множестве, в каждой точке границы которого существует касательная плоскость. Некоторые неограниченные множества также имеют простую структуру: например, полуограниченный цилиндр, параболоид и другие.

Для поворота A замена $u(x) = v(Ax)$ преобразует задачу (1) в задачу

$$Q(D, A)v(\tau) = (\mu + g(A^{-1}\tau))v(\tau),\ v(\tau) \in L^2(R^n). \tag{4}$$

Для того чтобы воспользоваться преобразованием Фурье по части переменных, от решения v требуем, чтобы при $j = 1, 2$

$$(F(Q(D, A)v))(\tau_j, z) = Q((D_j, iz), A)((Fv)(\tau_j, z)). \tag{5}$$

Ниже записи z и (z_j, ξ) означают одно и то же.

Замечание 1. Мы опосредованно накладываем ограничения на u (с помощью равенств (5)). Не будем выписывать ограничения непосредственно на u, которые гарантируют выполнение равенств (5). Смысл этих ограничений можно уяснить, если прочитать на с. 46 приложение к задаче из теории волноводов.

Символ $P(iy)$ обладает *свойством* (M1):

при каждом фиксированном наборе (A, j, τ_0), $j = 1, 2$, используемом в (3), и каждом z все решения, принадлежащие $L^2((\tau_{j,0}, +\infty))$, уравнения

$$Q((D_j, iz), A)w = \mu w, \quad \tau_j \geq \tau_{j,0}, \tag{6}$$

имеют вид $c_j(z)\exp((-\sqrt{|z|^2 - \mu})\tau_j)$, причем $c_j(z) = 0$ при $|z|^2 \leq \mu$.

Набор $(P(iy), \Omega, g(x))$ обладает *свойством* (M2):

задача (1) с условием (6),

$$u(x) = 0 \ \text{ вне } \ T,$$

где T — наименьшее множество с простой структурой, содержащее Ω, имеет только нулевое решение.

Напомним, что записи (τ_j, η), τ означают одно и то же, $Q((D_j, iz), A)$ получается из $Q(D, A)$ формальной заменой D_r на iz_r (естественно при $r \neq j$).

Для наборов $(P(iy), T, g(x))$, обладающих свойствами (M1), (M2), справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Предположим, что $\mu \neq 0$ при $n = 2$, при каждом повороте A из* (3) *$A\Omega$ является частью некоторого множества T, имеющего простую структуру, символ $P(iy)$ обладает свойством* (M1), *$u(x)$ — решение задачи* (1), *причем для $v(\tau) = u(A^{-1}\tau)$ выполняются равенства* (5) *при $j = 1, 2$. Тогда $u(x) = 0$ вне множества $(A^{-1}T)$.*

Теорема 3. *Если выполняются предположения теоремы* 1 *и $(P(iy), \Omega, g(x))$ обладает свойством* (M2), *то у задачи* (1) *отсутствуют ненулевые решения.*

Доказательству этих теорем предпошлем ряд вспомогательных утверждений. В основном они будут связаны с преобразованием Фурье по части переменных. При этом ограничимся обобщенными функциями, принадлежащими $L^2(R^n)$.

В связи с тем что придется часто использовать записи $\sqrt{\rho^2 - a}$, $2\rho^2 - a$, обозначим первую через B, а вторую — через C, при этом $\rho \in R$.

Лемма 1. *Предположим, что $a \neq 0$, при всех целых неотрицательных r, r_1, m выполняются равенства*

$$\int_{\rho^2 \geq a} h(\rho)(\rho B)^r (B + i\rho)^{2r_1}(-B + i\rho)^{-m} d\rho = 0, \quad B = \sqrt{\rho^2 - a}. \tag{7}$$

Тогда $h(\rho) = 0$ при всех $\rho^2 \geq a$.

Доказательство. Предварительно докажем, что из (7) следуют равенства

$$\int_{\rho^2 \geq a} h(\rho)(\rho B)^r (2i\rho B - a)^s C^{-2m} d\rho = 0, \quad C = 2\rho^2 - a, \quad s = 0, 1. \tag{8}$$

Если $m = 0$, то утверждение справедливо: достаточно положить в (7) $m = 0$, $r_1 = 1$, $r_1 = 0$ соответственно. Введем индукционное предположение: равенства (8) выполняются при целых $m \in [0, q-1]$.

Докажем справедливость (8) при $m = q$. Так как $(B + i\rho)(-B + i\rho) = -C$, то из (7) следуют равенства

$$\int_{\rho^2 \geq a} h(\rho)(\rho B)^r (B + i\rho)^{2r_1 + 2q} C^{-2q} d\rho = 0. \tag{9}$$

Выберем m_1 так, чтобы $q \leq 2 \cdot 2^{m_1}$, $q \geq 2^{m_1}$, и положим $r_1 = 2 \cdot 2^{m_1} - q$. В выбранном случае

$$(B + i\rho)^{2r_1 + 2q} = (-C^2 - 4i\rho a B + 2a^2)^{2^{m_1}}.$$

Из этого равенства, из (9) и из индукционного предположения следует

$$\int_{\rho^2\ge a} h(\rho)(\rho B)^r(-2i\rho B+a)^{2^{m_1}}C^{-2q}d\rho = 0. \tag{10}$$

Однако $(-2i\rho B+a)^2 = -C^2-4i\rho Ba+2a^2$. Поэтому из (10) и из индукционного предположения следует

$$\int_{\rho^2\ge a} h(\rho)(\rho B)^r(-2i\rho B+a)^{2^{m_1-1}}C^{-2q}d\rho = 0.$$

Повторив эту процедуру соответствующее число раз, окончательно докажем (8) при $m=q$, $s=1$. Чтобы доказать (8) при $m=q$, $s=0$, достаточно выбрать $r_1 = 2\cdot 2^{m_1}-q-1$ и повторить приведенные выше рассуждения.

Итак, при всех целых $r\ge 0$, $m\ge 0$ выполняются (8). Положим в них $r=2m$, $\psi=\rho B/C$. Нетрудно убедиться в том, что функция ψ монотонна и дифференцируема при $\rho^2\ge a$, значит, имеет обратную $\phi(\psi)$, причем последняя нечетна. Поэтому после замены получим

$$\int_{-1/2}^{1/2} h_1(\psi)\psi^{2m}d\psi = 0, \quad m=0,1,\dots$$

Отсюда следует, что $h_1(\psi)$ и $h(\rho)$ — четные функции. Если в (8) положим $r=2m+1$, $\psi=\rho B/C$, то аналогично докажем, что $h(\rho)$ нечетна. Таким образом доказано, что функция $h(\rho)$ и четна, и нечетна одновременно (естественно при $\rho^2\ge a$). А это означает, что $h(\rho)=0$, если $\rho^2\ge a$. $\square$

Лемма 2. *Предположим, что $a\ne 0$, при всех целых неотрицательных n_1, n_2, m выполняются равенства*

$$\int_{\rho^2\ge a} g_1(\rho)(i\rho)^{n_1}(-B)^{n_2}C^{-m}d\rho = \int_{\rho^2\ge a} g_2(\rho)(i\rho)^{n_2}(-B)^{n_1}C^{-m}d\rho. \tag{11}$$

Тогда $g_1(\rho)=g_2(\rho)$ при $\rho^2\ge a$.

Доказательство. Положим в (11) $n_1=r+\nu$, $n_2=r+2r_1-\nu$. После умножения полученных равенств на $(-1)^\nu C(r_1,\nu)$, где $C(r_1,\nu)$ — коэффициенты бинома Ньютона, и суммирования по ν от 0 до $2r_1$ легко получим, что при $h(\rho)=g_1(\rho)-g_2(\rho)$ выполняются равенства (7). $\square$

Доказательство теоремы 2. Переходя в (4) к преобразованию Фурье по всем переменным, кроме τ_j, и учитывая (5), в силу свойства (M1) получим функцию

$$(Fv)(\tau_j,z) = c_j(z)\exp((-\sqrt{|z|^2-\mu})\tau_j) \quad (\text{если} \quad \tau_j\ge\tau_{j,0}),$$

которая принадлежит $L^2(R^{n-1})$ и $L(R^{n-1})$ при $\tau_j>\tau_{j,0}$. Поэтому имеем

$$v(\tau_j,\tau_r,\xi) = (2\pi)^{(n-1)/2}\int\left(\int c_j(\rho,\eta)\exp((-\sqrt{\rho^2+|\eta|^2-\mu})\tau_j+i\rho\tau_r)d\rho\right)\exp(i\xi\eta)d\eta.$$

Аналогично получим

$$v(\tau_r,\tau_j,\xi) = (2\pi)^{(n-1)/2}\int\left(\int c_r(\rho,\eta)\exp((-\sqrt{\rho^2+|\eta|^2-\mu})\tau_r+i\rho\tau_j)d\rho\right)\exp(i\xi\eta)d\eta.$$

Однако левые части в последних равенствах совпадают, поэтому, обозначая $\eta^2-\mu=-a$, $c_j(\rho,\eta)=f_1(\rho)$, $c_r(\rho,\eta)=f_2(\rho)$, получим в силу единственности преобразования Фурье

$$\int f_1(\rho)\exp(-Bt_j+i\rho t_r)d\rho = \int f_2(\rho)\exp(-Bt_r+i\rho t_j)d\rho, \tag{12}$$

причем $f_k(\rho)=0$, если $\rho^2\le a$. В частности, это означает, что интегрирование на протяжении всего доказательства теоремы 2 производится по всем $\rho^2\ge a$ (если $a<0$, то интегрирование производится по всем ρ).

Вычисляя производные по t_j, t_r в (12), получим

$$\int f_1(\rho)(-B)^{n_1}(i\rho)^{n_2}\exp(-Bt_j)\exp(i\rho t_r)d\rho = \int f_2(\rho)(i\rho)^{n_1}(-B)^{n_2}\exp(i\rho t_j)\exp(-Bt_r)d\rho.$$

При этом все выписанные интегралы абсолютно сходятся. Именно по этой причине после произведенных действий сохранились равенства, и они выполняются при всех $t_k > \tau_{k,0}$.

Итак, при $t_j = t_r + b_1$ (а это ниже считаем выполненным), где число $b_1 \geq 0$,

$$\int f_1(\rho)(-B)^{n_1}(i\rho)^{n_2}\exp((-B+i\rho)t_r)\exp(-Bb_1)dt_r =$$
$$= \int f_2(\rho)(i\rho)^{n_1}(-B)^{n_2}\exp((-B+i\rho)t_r)\exp(i\rho b_1)dt_r.$$

Требуя $|\eta|^2 - \mu = -a \neq 0$, $\rho^2 \geq a$, получим $|C| = |-B+i\rho| \geq |a|$.

Проинтегрировав по t_r, получим

$$\int f_1(\rho)(\exp(-Bb_1))(-B)^{n_1}(i\rho)^{n_2}(-B+i\rho)^{-1}[\exp((-B+i\rho)t_r) - \exp((-B+i\rho)b_2)]dt_r =$$
$$= \int f_2(\rho)(\exp(i\rho b_1))(i\rho)^{n_1}(-B)^{n_2}(-B+i\rho)^{-1}[\exp((-B+i\rho)t_r) - \exp((-B+i\rho)b_2)]dt_r.$$

Отсюда в случае $b_2 \to +\infty$ следует

$$\int f_1(\rho)(\exp(-Bb_1))(-B)^{n_1}(i\rho)^{n_2}(-B+i\rho)^{-1}\exp((-B+i\rho)t_r)dt_r =$$
$$= \int f_2(\rho)(\exp(i\rho b_1))(-B)^{n_3}(i\rho)^{n_1}(-B+i\rho)^{-1}\exp((-B+i\rho)t_r)dt_r.$$

Повторив проделанную процедуру соответствующее число раз и обозначив

$$g_1 = f_1(\rho)(\exp(-Bb_1))\exp((-B+i\rho)t_r), \quad g_2 = f_2(\rho)(\exp(i\rho b_1))\exp((-B+i\rho)t_r),$$

легко получим равенства (11). Из них и из лемм следуют равенства $g_1(\rho) = g_2(\rho)$ в R. Так как число $b_1 \geq 0$ можно выбрать произвольно, то $f_1(\rho) = f_2(\rho) = 0$. Таким образом доказано, что $c_j(z) = c_r(z) = 0$ и $(Fv)(\tau_j, z) = 0$ при $\tau_j \geq \tau_{j,0}$. Поэтому $v(\tau) = 0$ при названных τ_j. Отсюда и из (2) следует утверждение теоремы 2. □

Через $(b_3, b_4]$ обозначим диаметр по x_j области Ω, т.е. $b_3 = \inf\{x_j : (x_j, t) \in \Omega\}$, $b_4 = \sup\{x_j : (x_j, t) \in \Omega\}$. Подчеркнем, что не исключается случай $b_3 = -\infty$.

Определение 2. Функция $h(x) \in L^1_{\rm loc}(R^n)$ называется *плоско слоистой по* x_j, если на диаметре по x_j области Ω выполняются равенства

$$h(x) = n_r(x_j) \quad \text{при} \quad x_j \in (a_r, a_{r+1}],$$

причем объединение последних интервалов совпадает с диаметром по x_j области Ω.

Теорема 4. *Предположим, что* Ω *имеет простую структуру,* u *— решение задачи* (1), *хотя бы при одном повороте* A *и для одного* j *выполняются равенства* (5), *в которых* $v(\tau) = u(A^{-1}\tau)$, *функция* $g(A^{-1}\tau)$ *является плоско слоистой по* τ_j *и принадлежит* $L^1_{\rm loc}(R^n)$,

$$Q((D_j, iz), A)w = w^{(M_j)} + \sum_{q=0}^{M_j-1}\sum_{k=1}^{N} c_{q,k,j}(z)w^{(q)}(\tau_j + h_{q,k,j}), \tag{13}$$

множество $\Omega(r) = \{\eta : (\tau_i, \eta) \in \Omega$ *для всех* $\tau_j \in (a_r, a_{r+1}]\}$ *конечно.*

Тогда набор $(P(iz), \Omega, g)$ *удовлетворяет* (M2).

Доказательство. Итак, $u = 0$ вне Ω. Обозначим через $(b_0, a_0]$ диаметр Ω по τ_j. Так как функция $v(\tau_j, \eta) = 0$ вне $A^{-1}\Omega$, то она равна нулю при $\tau_j \geq a_0$. В этом случае $(Fv)(\tau_j, z) = 0$ при $\tau_j \geq a_0$. Переходя в (4) к преобразованию Фурье по всем переменным, кроме τ_j, получим

$$Q((D_j, iz), A)w = \mu w + (F(g(A^{-1}\tau)v))(\tau_j, z), \quad w(\xi) = 0 \ \text{ при } \ \xi \geq a_0, \tag{14}$$

где $w = (Fv)(\tau_j, z)$.

Пусть τ_j принадлежит первому слою $(a_{-1}, a_0]$. Тогда Ω_{-1} ограничено, $g(A^{-1}\tau) = n_{-1}(\tau_j)$. В этом случае

$$(F(g(A^{-1}\tau)v))(\tau_j, z) = n_{-1}(\tau_j) \int_{\Omega_{-1}} v(\tau_j, \eta) \exp(-i\eta z) d\eta = n_{-1}(\tau_j) w.$$

Следовательно, задача (14) в силу (13) оказывается начальной задачей для дифференциального уравнения с опережением аргумента. Как следует из ([3], с. 18–28), она имеет только нулевое решение. Таким образом, доказано, что $(Fv)(\tau_j, z) = 0$ при $\tau_j \geq a_{-1}$. Аналогично докажем, что $(Fv)(\tau_j, z) = 0$ на всем диаметре. В этом случае $u(x) = 0$ на всем диаметре по x_j области Ω. $\square$

Как и в [1], рассмотрим приложение к задаче из теории волноводов [4]. Она гласит: *существуют ли собственные значения задачи*

$$-\Delta u = (\phi + c(x))u, \quad x \in R^n, \quad u \in L^2(R^n), \tag{15}$$

в которой $c(x) = c_j$ при $x \in \Omega_j$ и $c(x) = c_0$ вне $\Omega = \bigcup \Omega_j$, Ω имеет простую структуру, $\phi + c_0 \neq 0$ при $n = 2$.

Как уже отмечалось, задача (15) имеет хотя бы одно собственное значение $\mu < 0$, если Ω ограничена и $n \leq 3$, и никаких дополнительных ограничений на решение не накладывается. Из формул, полученных в [1], легко построить алгоритм для вычисления собственного значения с любой наперед заданной степенью точности. Если от решения потребовать, чтобы при $j = 1, 2$

$$D_j^2((Fu)(\tau_j, z)) \in L^2(R^n), \tag{16}$$

то в случае плоско слоистой по τ_j $c(x)$ задача (15) не будет иметь ненулевых решений (даже при ограниченной Ω). Убедимся в этом.

Напомним, что $(Fu)(\tau_j, z)$ — преобразование Фурье обобщенной функции медленного роста u по переменным, кроме τ_j. При выполнении (16) имеет место $D_j((Fu)(\tau_j, z)) \in L^2(R^n)$. Так как при повороте A осей координат задача (15) преобразуется в задачу

$$-\Delta v + \sum_{r=1}^{n} h_r D_r v = (\mu + g(A^{-1}\tau))v, \quad \tau \in A\Omega, \quad v \in L^2(R^n),$$

то (16) гарантируют выполнение равенств (5), т. к.

$$Q((D_j, iz), A)w = -D_j^2 w + (|z|^2 - \mu)w + \sum_{r \neq j} h_r(iz)w + D_j w.$$

Полагая $\mu = \phi + c_0$, получим

$$-\Delta u = (\mu + g(x))u, \quad x \in R^n, \quad u \in L^2(R^n),$$

где $g(x) = 0$ вне Ω и $g(x)$ плоско слоистая по τ_j, ибо такова $c(x)$.

Из доказанных теорем следует: у задачи (15) отсутствуют ненулевые решения.

Литература

1. Мокейчев В.С. *Проблема собственных значений во всем пространстве для уравнений с разрывными коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 6. – С. 45–49.
2. Иосида К. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1967. – 624 с.
3. Мокейчев В.С. *Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 222 с.
4. Карчевский Е.М. *Исследования численного метода решения спектральной задачи теории диэлектрических волноводов* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 1. – С. 10–17.

Казанский государственный университет

Поступила 18.10.2002