ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 10 (545)

УДК 514.764

С.Е. СТЕПАНОВ, Е.С. СТЕПАНОВА, И.Г. ШАНДРА

СОПРЯЖЕННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА СТАТИСТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

1. Введение

1.1. Теория сопряженных связностей, построенная А.П. Норденом и развитая его учениками (напр., [1]–[3]), переживает сегодня второе рождение в связи с возросшим в последние десятилетия интересом у зарубежных геометров к аффинной дифференциальной геометрии (напр., [4] и [5]) и бурным развитием теории, которую ее основатель Н.Н. Ченцов называл "*геометростатистикой*" ([6], с. 5). Именно этому последнему аспекту применения сопряженных связностей и посвящена данная статья.

1.2. Отправным пунктом для "геометростатистики" послужила работа [7]. В ней на основе фишеровской информационной матрицы был определен риманов тензор на многообразии распределений вероятностей, который превратил последнее в риманово многообразие, одновременно были выведены уравнения геодезических линий.

Н.Н. Ченцов в фундаментальной монографии [6] построил геометрию статистических решений с категорией марковских морфизмов на многообразии распределений вероятностей, показав при этом, что фишеровский информационный тензор порождает единственную с точностью до постоянного множителя инвариантную риманову метрику в этой категории ([6], с. 176–179). Им же было построено 1-параметрическое семейство инвариантных линейных связностей ${}^{\gamma}\nabla$ на многообразии распределений вероятностей и показано, что экспоненциальные семейства являются геодезическими относительно этих связностей ${}^{\gamma}\nabla$ ([6], сс. 189–201, 284–300).

В развитие теории С. Лауритцен ([8], с. 163–216) обобщил понятие риманова многообразия распределений вероятностей с 1-параметрическим семейством связностей Ченцова ${}^{\gamma}\nabla$, дав определение *абстрактного статистического многообразия* как триплета (M, g, D). Здесь, по замыслу автора, гладкое n-мерное ($n \geq 2$) многообразие M должно было символизировать многообразие распределений вероятностей, метрический тензор g олицетворять фишеровский информационный тензор, а семейство линейных связностей ${}^{\gamma}\nabla = \nabla + \gamma D$, где ∇ — связность Леви-Чивита и γ — произвольный вещественный параметр, интерпретироваться как однопараметрическое семейство линейных связностей Ченцова. Ключевыми моментами в его теории стали выделение сопряженных пар связностей ${}^{\gamma}\nabla$ и ${}^{-\gamma}\nabla$, а также введение понятия *сопряженного симметрического статистического многообразия*, для которого, по определению, при всех γ совпадают тензоры кривизны ${}^{\gamma}R$ и ${}^{-\gamma}R$ сопряженных связностей ${}^{\gamma}\nabla$ и ${}^{-\gamma}\nabla$ соответственно.

Теория статистических многообразий нашла свое отражение в десятках статей и серии монографий [6], [8]–[12].

1.3. Первый раздел данной статьи вводит читателя в круг понятий "геометростатистики". Эти сведения будут необходимы для исследования инвариантных связностей Ченцова ${}^{\gamma}\nabla$, они почерпнуты из монографии [6] и другой работы того же автора [13]. В последнем абзаце параграфа выведем простейшие следствия введенных определений.

Второй раздел посвящен применению теории сопряженных связностей А.П. Нордена для исследования инвариантных связностей Ченцова ${}^{\gamma}\nabla$ на многообразии распределений вероятностей, а третий — для описания геометрии сопряженного Риччи-симметрического статистического многообразия. Последнее определяется как непосредственное обобщение сопряженного симметрического статистического многообразия С. Лауритцена.

2. Многообразие распределений вероятностей

2.1. Пусть Ω — пространство элементарных исходов и $\mathbf{S}$ — алгебра его подмножеств, называемых событиями. Под распределением вероятностей $P\{\cdot\}$ на алгебре $\mathbf{S}$ понимается вероятностная мера — неотрицательная аддитивная конечная функция подмножества, определенная на $\mathbf{S}$, которая удовлетворяет условию нормированности $P\{\Omega\} = 1$. Совокупность всех распределений вероятностей на измеримом пространстве $(\Omega, \mathbf{S})$ обозначается как $\mathrm{Cap}(\Omega, \mathbf{S})$ ([6], с. 19–20).

Пусть $\mathbf{Z}$ — идеал вероятностных мер алгебры $\mathbf{S}$. Рассматриваются две совокупности: $\mathrm{Capd}(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{Z})$ всех вероятностных мер, аннулирующихся на $\mathbf{Z}$, и $\mathrm{Caph}(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{Z})$ всех вероятностных мер, аннулирующихся на $\mathbf{Z}$ и только на $\mathbf{Z}$.

Пусть $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{n+1}$ — конечная алгебра подмножеств пространства исходов Ω, порожденная *атомами* $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Если каждое распределение вероятностей $P\{\cdot\}$ задавать вектором $\mathbf{p} = (P\{A_1\}, \ldots, P\{A_{n+1}\})$ для $P\{A_a\} \geq 0$ и $P\{A_1\} + \cdots + P\{A_{n+1}\} = 1$, где $a = 1, \ldots, n+1$, то эти векторы заполнят в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ симплекс $\sum\limits_{a=1}^{n+1} p_a \mathbf{e}_a$, где $p_a \geq 0$ и $\sum\limits_{a=1}^{n+1} p_a = 1$, с вершинами $E_1, \ldots, E_{n+1}$ в концах единичных векторов $\mathbf{e}_1(1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_{n+1}(0, \ldots, 0, 1)$, которые отвечают соответствующим распределениям вероятностей ([6], с. 143). При этом вероятности $P\{A_j\} = p_j(P)$ являются одновременно координатами точки P с радиус-вектором $\mathbf{p}$ в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ и барицентрическими аффинными координатами относительно вершин симплекса.

Совокупность распределений $\mathrm{Cap}(\Omega, \mathbf{S}_{n+1})$ обладает естественной топологией и естественной дифференциальной структурой симплекса пространства $\mathbf{R}^{n+1}$.

Внутренние точки $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cap}(\Omega, \mathbf{S}_{n+1})$ симплекса $\mathrm{Cap}(\Omega, \mathbf{S}_{n+1})$ отвечают распределениям вероятностей P со строго положительными вероятностями $P\{A_a\} > 0$ атомов A_a. Для каждого такого распределения вероятностей P идеал $\mathbf{Z}_P$ состоит из одного пустого множества и, следовательно, $\mathbf{Z}_P = \mathbf{O}$ — тривиальный идеал алгебры $\mathbf{S}_{n+1}$. В этом случае имеем $\mathrm{Cap}(\Omega, \mathbf{S}_{n+1}) = \mathrm{Capd}(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{O})$ ([6], с. 27). Сами же строго положительные распределения вероятностей образуют совокупность $\mathrm{Caph}(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{O})$ — открытый симплекс внутренних точек $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cap}(\Omega \mathbf{S}_{n+1})$, который является n-мерным многообразием ([6], с. 27), называемым *многообразием распределений вероятностей.*

Если же $\mathbf{Z}$ — нетривиальный идеал алгебры $\mathbf{S}_{n+1}$, то совокупность $\mathrm{Caph}(\Omega, \mathbf{S}_{n+1}, \mathbf{Z})$ будет внутренностью какой-либо грани симплекса $\mathrm{Cap}(\Omega, \mathbf{S}_{n+1})$, т. е. также многообразием — открытым симплексом меньшей размерности ([6], с. 27).

Если алгебра $\mathbf{S}$ не является конечной, то рассматривается случай, когда в алгебре $\mathbf{S}$ существует такой идеал $\mathbf{Z}$, для которого фактор-алгебра $\mathbf{S}/\mathbf{Z}$ является конечной. При этом совокупности $\mathrm{Caph}(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{Z})$ с конечными фактор-алгебрами $\mathbf{S}/\mathbf{Z}$ образуют (относительно марковских морфизмов) *категорию CAPHF* ([6], с. 175).

Установлено ([6], лемма 9.2), что совокупность $\mathrm{Caph}(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{Z})$ с конечной фактор-алгеброй $\mathbf{S}/\mathbf{Z}$ эквивалентна совокупности $\mathrm{Caph}(\Omega, \mathbf{S}_{n+1}, \mathbf{O})$ с тем же числом атомов, что и у фактор-алгебры $\mathbf{S}/\mathbf{Z}$.

2.2. По-прежнему через $A_1, \ldots, A_{n+1}$ обозначаем атомы алгебры $\mathbf{S}$, определенные с точностью до $\mathbf{Z}$-эквивалентности, и через $\mathbf{p}$ — набор вероятностей атомов для закона $P \in \mathrm{Caph}(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{Z})$. Тогда на открытом симплексе Caph с $(n+1)$-атомной фактор-алгеброй $\mathbf{S}/\mathbf{Z}$, рассматриваемом как многообразие, задается ([6], сс. 164–165, 190; [13], сс. 88–91, 99) переопределенная система $n+1$ векторных полей $X_a = p_a(1 - p_a)\frac{d}{dp_a}$ для $a = 1, \ldots, n+1$, обладающих следующими свойствами:

1) любые n из них образуют базис касательного пространства в каждой точке P многообразия Caph и при этом $X_1 + \dots + X_{n+1} = 0$;
2) скобка любых двух векторных полей $[X_a, X_b] = X_a X_b - X_b X_a = 0$;
3) любое векторное поле Z многообразия Caph однозначно разлагается по векторным полям $X_1, \dots, X_{n+1}$: $Z = \zeta^a X_a$ при условии, что $\sum\limits_{a=1}^{n+1} \zeta^a = 0$;
4) действие произвольного поля X_a на любую базисную функцию p_b задается формулой $X_a p_b = \delta_{ab} p_a - p_a p_b$, где δ_{ab} — символ Кронекера.

Доказано ([6], с. 193; [13], с. 96), что в категории CAPHF существует 1-параметрическое семейство *эквивариантных линейных связностей* ${}^\gamma\nabla$, которые определяются с помощью векторных полей из совокупности $\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$ формулами ковариантного дифференцирования

$$ {}^\gamma\nabla_{X_a} X_b = \gamma(\delta_{ab} X_b - p_a X_b - p_b X_a) \tag{2.1} $$

для каждого действительного параметра γ. Установлено ([13], с. 99), что каждая эквивариантная связность ${}^\gamma\nabla$ не имеет кручения, а ее тензор кривизны ${}^\gamma R$ определяется значениями на векторных полях $X_1, \dots, X_{n+1}$ формулой

$$ {}^\gamma R(X_a, X_b) X_c = \gamma(\gamma - 1) p_c [(p_b - \delta_{ba}) X_a - (p_a - \delta_{ab}) X_b]. \tag{2.2} $$

Для $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$ имеем ${}^\gamma R = 0$, а потому связности ${}^0\nabla$ и ${}^1\nabla$ *плоские*, а многообразие Caph по отношению к каждой из данных связностей *локально аффинное* ([14], с. 198–199). Связности ${}^\gamma\nabla$ условимся называть *связностями Ченцова* [15].

Доказано также ([6], с. 176), что в категории CAPHF существует единственный инвариантный тензор g типа $(2, 0)$, который определяется значениями $g(Y, Z) = \eta^a \xi^a p_a - (\eta^a p_a)(\xi^b p_b)$ на произвольных векторных полях $Y = \eta^a X_a$ и $Z = \xi^b X_b$. При этом связность ${}^{1/2}\nabla$ является ([13], с. 92) римановой по отношению к g и ${}^\gamma R = 4\gamma(1-\gamma)^{1/2} R$ для тензоров кривизны ${}^\gamma R$ и ${}^{1/2}R$ связности ${}^\gamma\nabla$ и римановой связности ${}^{1/2}\nabla$. Тензор g в дальнейшем условимся называть *фишеровским* метрическим тензором.

2.3. Свойства 1 и 2 из приведенных выше позволяют выбрать n векторных полей $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ из совокупности $\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$ в качестве локального голономного базиса векторных полей многообразия Caph.

Согласно свойствам 1 и 3 векторных полей совокупности $\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$ имеем ${}^\gamma\nabla_{\overline{X}_j} \overline{X}_i = {}^\gamma\Gamma^k_{ij} X_k + {}^\gamma\Gamma^{n+1}_{ij} X_{n+1} = {}^\gamma\overline{\Gamma}^k_{ij} \overline{X}_k$, где $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ будут символами Кристоффеля связности ${}^\gamma\nabla$ в локальном голономном базисе $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$. В частности, ${}^\gamma\overline{\Gamma}^k_{ij} = {}^\gamma\Gamma^k_{ij} - {}^\gamma\Gamma^{n+1}_{ij}$ для $\overline{X}_k = X_k$ и $k = 1, 2, \dots, n$. С учетом равенств (2.1), а также в силу линейной независимости векторных полей $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$, находим выражение для символов Кристоффеля

$$ {}^\gamma\overline{\Gamma}^k_{ij} = \gamma[(\delta_{ij} - \overline{p}_i)\delta^k_j - \overline{p}_j \delta^k_i]. \tag{2.3} $$

Компоненты тензора кривизны ${}^\gamma R$ связности ${}^\gamma\nabla$, найденные в базисе $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$, имеют вид

$$ {}^\gamma\overline{R}^i_{jkl} = \gamma(\gamma - 1)\overline{p}_j[(\overline{p}_l - \delta_{lj})\delta^i_k - (\overline{p}_k - \delta_{kj})\delta^i_l], \tag{2.4} $$

где $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$. Действительно, согласно свойствам 1 и 3 векторных полей совокупности $\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$ и равенствам (2.2) находим

$$ {}^\gamma R(\overline{X}_k, \overline{X}_l)\overline{X}_j = {}^\gamma R^i_{jkl} X_i + {}^\gamma R^{n+1}_{jkl} X_{n+1} = {}^\gamma\overline{R}^i_{jkl} \overline{X}_i = \gamma(\gamma - 1)\overline{p}_j[(\overline{p}_l - \delta_{lj})\delta^i_k - (\overline{p}_k - \delta_{kj})\delta^i_l]\overline{X}_i. $$

Отсюда в силу линейной независимости векторных полей $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ выводим равенства (2.4), где, в частности, ${}^\gamma\overline{R}^i_{jkl} = {}^\gamma R^i_{jkl} - {}^\gamma R^{n+1}_{jkl}$ для $\overline{X}_k = X_k$.

Инвариантный в категории CAPHF фишеровский тензор g в локальном голономном базисе $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ векторных полей многообразия Caph имеет компоненты $\overline{g}_{ij} := g(\overline{X}_i, \overline{X}_j) =$

$\overline{p}_i(\delta_{ij} - \overline{p}_j)$. На основании критерия Сильвестра непосредственно проверяется поточечно положительная определенность тензора g. В результате каждое Caph становится римановым многообразием. Дискриминантный тензор фишеровского тензора имеет вид

$$\det g = p_1 p_2 \dots p_n (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_n) = p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1} > 0. \tag{2.5}$$

3. Сопряженные связности на многообразии распределений вероятностей

3.1. Пара линейных связностей ∇ и ∇^* на гладком многообразии M называется ([2], с. 173; [4]; [5], с. 53; [16], с. 157) *сопряженной* относительно невырожденного тензора h типа $(2,0)$, если $Zh(X,Y) = h(\nabla_Z X, Y) + h(X, \nabla^*_Z Y)$ для любых векторных полей X, Y и Z многообразия. Для такой пары сопряженных связностей принято ([5], с. 53) обозначение (∇, h, ∇^*). Пара сопряженных связностей (∇, h, ∇^*) называется *кодацциевой* ([2], с. 182), если тензор h является кодацциевым относительной связности ∇. И далее, пара (∇, h, ∇^*) называется *эквиаффинной* ([2], с. 182), если обе составляющие ее связности эквиаффинные. Если при этом эквиаффинные связности ∇ и ∇^* являются еще и проективно плоскими, назовем пару (∇, h, ∇^*) *эквипроективной.* Основной результат данного параграфа представляет

Теорема 3.1. *Из* 1*-параметрического семейства эквивариантных связностей Ченцова на многообразии* Caph *сопряженными относительно фишеровского тензора g будут только пары $({}^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$, каждая из которых является одновременно кодацциевой и эквипроективной с основными плотностями вида ${}^{\gamma}\omega = (p_1 \dots p_n p_{n+1})^{\gamma}$ и ${}^{(1-\gamma)}\omega = (p_1 \dots p_n p_{n+1})^{1-\gamma}$.*

Доказательство. Проведем его в четыре этапа. На первом этапе найдем условия на числа γ_1 и γ_2, при которых связности ${}^{\gamma_1}\nabla$ и ${}^{\gamma_2}\nabla$ будут сопряженными относительно тензора g. В локальном голономном базисе $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ условие сопряженности связностей ${}^{\gamma_1}\nabla$ и ${}^{\gamma_2}\nabla$ принимает вид уравнений $\overline{X}_k g(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = g({}^{\gamma_1}\nabla_{\overline{X}_k}\overline{X}_i, \overline{X}_j) + g(\overline{X}_i, {}^{\gamma_2}\nabla_{\overline{X}_k}\overline{X}_j)$. Правая их часть на основании свойства 4 и равенств (2.1) представима в виде

$$\overline{X}_k g(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = \overline{X}_k \overline{g}_{ij} = (\overline{X}_k \overline{p}_i)(\delta_{ij} - p_j) - \overline{p}_i(\overline{X}_k \overline{p}_j) = \\ = \delta_{ik}\delta_{ij}\overline{p}_k - \delta_{ij}\overline{p}_i\overline{p}_k - \delta_{ki}\overline{p}_j\overline{p}_k + 2\overline{p}_i\overline{p}_j\overline{p}_k - \delta_{kj}\overline{p}_i\overline{p}_k.$$

В свою очередь, левая часть уравнений преобразуется следующим образом:

$$g({}^{\gamma_1}\nabla_{\overline{X}_k}\overline{X}_i, \overline{X}_j) + g(\overline{X}_i, {}^{\gamma_2}\nabla_{\overline{X}_k}\overline{X}_j) = \\ = \gamma_1 g(\delta_{ik}\overline{X}_i - \overline{p}_i\overline{X}_k - \overline{p}_k\overline{X}_i, \overline{X}_j) + \gamma_2 g(\overline{X}_i, \delta_{jk}\overline{X}_j - \overline{p}_j\overline{X}_k - \overline{p}_k\overline{X}_j) = \\ = \gamma_1(\delta_{ik}\delta_{ij}\overline{p}_k - \delta_{ij}\overline{p}_i\overline{p}_k - \delta_{ki}\overline{p}_j\overline{p}_k + 2\overline{p}_i\overline{p}_j\overline{p}_k - \delta_{kj}\overline{p}_i\overline{p}_k) + \\ + \gamma_2(\delta_{ik}\delta_{ij}\overline{p}_k - \delta_{ij}\overline{p}_i\overline{p}_k - \delta_{ki}\overline{p}_j\overline{p}_k + 2\overline{p}_i\overline{p}_j\overline{p}_k - \delta_{kj}\overline{p}_i\overline{p}_k),$$

где использованы соотношения $\delta_{ik}\overline{p}_i = \delta_{ik}\overline{p}_k$ и $\delta_{ij}\delta_{ik}\overline{p}_k = \delta_{ij}\delta_{jk}\overline{p}_k$. В итоге заключаем, что связности ${}^{\gamma_1}\nabla$ и ${}^{\gamma_2}\nabla$ будут сопряженными относительно тензора g тогда и только тогда, когда $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$.

На втором этапе докажем, что пара сопряженных связностей кодацциева. Для этого воспользуемся стандартным правилом ковариантного дифференцирования ([14], с. 122) и на основании приведенных выше формул получим

$$({}^{\gamma}\nabla_{\overline{X}_k} g)(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = (\overline{X}_k g)(\overline{X}_i, \overline{X}_j) - g({}^{\gamma}\nabla_{\overline{X}_k}\overline{X}_i, \overline{X}_j) - g(\overline{X}_i, {}^{\gamma}\nabla_{\overline{X}_k}\overline{X}_j) = \\ + (1 - 2\gamma)(\delta_{ik}\delta_{ij}\overline{p}_k - \delta_{ij}\overline{p}_i\overline{p}_k - \delta_{ki}\overline{p}_j\overline{p}_k + 2\overline{p}_i\overline{p}_j\overline{p}_k - \delta_{kj}\overline{p}_i\overline{p}_k).$$

В итоге $({}^{\gamma}\nabla_{\overline{X}_k} g)(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = ({}^{\gamma}\nabla_{\overline{X}_i} g)(\overline{X}_k, \overline{X}_j)$. Эти равенства носят название *уравнений Кодацци* ([2], с. 169) и характеризуют пару $({}^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ как *кодацциеву* ([2], с. 182).

На третьем этапе докажем, что любая связность Ченцова ${}^{\gamma}\nabla$ является эквипроективной. Сверткой обеих частей равенства (2.4) по индексам i и k находим в базисе $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$ компоненты

$$ {}^{\gamma}\overline{R}_{jl} = {}^{\gamma}\overline{R}^{k}_{jkl} = (n-1)\gamma(\gamma-1)\overline{p}_j(\overline{p}_l - \delta_{lj}) \tag{3.1} $$

тензора Риччи ${}^{\gamma}\operatorname{Ric}$ эквивариантной связности ${}^{\gamma}\nabla$. Тензор ${}^{\gamma}\operatorname{Ric}$ симметричен, что равносильно выполнению первого условия из определения эквипроективной связности ([16], с. 125; [2], с. 151). На основе выражений для компонент тензора Риччи находим инвариантную форму

$$ {}^{\gamma}\overline{R}^{i}_{jkl} = (n-1)^{-1}(\delta^i_k\, {}^{\gamma}\overline{R}_{jl} - \delta^i_l\, {}^{\gamma}\overline{R}_{jk}) \tag{3.2} $$

для компонент тензора кривизны ${}^{\gamma}R$. Далее, учитывая, что действие векторного поля X_i на базисную функцию p_i определяется свойством 4 векторных полей совокупности $\{X_1, \ldots, X_{n+1}\}$, вычисляем

$$ \begin{aligned} {}^{\gamma}\nabla_{\overline{X}_i}\overline{R}_{jk} &= (n-1)\gamma(\gamma-1)[(\overline{X}_i\overline{p}_j)(\overline{p}_k - \delta_{kj}) + \overline{p}_j(\overline{X}_i\overline{p}_k)] = \\ &= (n-1)\gamma(\gamma-1)[(\delta_{ij}\overline{p}_i - \overline{p}_i\overline{p}_j)(\overline{p}_k - \delta_{kj}) + \overline{p}_j(\delta_{ik}\overline{p}_i - \overline{p}_i\overline{p}_k)]. \end{aligned} $$

Отсюда при $i \neq j$ следует

$$ {}^{\gamma}\nabla_i\overline{R}_{jk} - {}^{\gamma}\nabla_j\overline{R}_{ik} = 0 \tag{3.3} $$

для ${}^{\gamma}\nabla_i := {}^{\gamma}\nabla_{\overline{X}_i}$. Вместе с симметричностью тензора Риччи равенства (3.2) и (3.3) являются ([2], с. 168–169; [16], с. 125) критерием эквипроективности связности ${}^{\gamma}\nabla$.

Сделаем важное заключение. Поскольку $\frac{1}{2}({}^{\gamma}\nabla_{\overline{X}_i}\overline{X}_j + {}^{(1-\gamma)}\nabla_{\overline{X}_j}\overline{X}_i) = {}^{1/2}\nabla_{\overline{X}_i}\overline{X}_j$, то ${}^{1/2}\nabla$ будет *средней связностью* ([2], с. 129; [16], с. 160) эквиаффинной кодацциевой пары $({}^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$. В этом случае ([2], с. 182) связность ${}^{1/2}\nabla$ становится связностью Леви-Чивита, отвечающей фишеровскому тензору g.

На заключительном четвертом этапе найдем основную плотность ${}^{\gamma}\omega$, участвующую в определяющем эквиаффинную связность уравнении ${}^{\gamma}\nabla{}^{\gamma}\omega = 0$ ([2], с. 150). Согласно общей теории ([2], с. 184), плотности ${}^{\gamma}\omega$ и ${}^{(1-\gamma)}\omega$ связностей эквиаффинной пары $({}^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ должны быть связаны с элементом объема ${}^{1/2}\omega = (\det g)^{1/2}$ тензора g средней связности Леви-Чивита ${}^{1/2}\nabla$ равенством ${}^{1/2}\omega = \sqrt{{}^{\gamma}\omega\, {}^{(1-\gamma)}\omega}$. Зная выражение (2.5) дискриминантного тензора $\det g$, полагаем ${}^{\gamma}\omega = (p_1 \ldots p_n p_{n+1})^{\gamma}$.

Проверим этот факт. Для того чтобы связность ${}^{\gamma}\nabla$ была эквиаффинной ([2], с. 151; [16], с. 124–125), необходимо и достаточно выполнения уравнений

$$ {}^{\gamma}\overline{\Gamma}^{k}_{jk} = \overline{X}_j \ln {}^{\gamma}\omega \tag{3.4} $$

для плотности ${}^{\gamma}\omega$ и символов Кристоффеля ${}^{\gamma}\overline{\Gamma}^{k}_{ij}$ связности ${}^{\gamma}\nabla$, определяемых формулами (2.3) в локальном голономном базисе $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$.

Положим теперь ${}^{\gamma}\omega = (p_1 \ldots p_n p_{n+1})^{\gamma}$ и проверим выполнимость равенств (3.4), где в левой части согласно (2.3) имеем

$$ {}^{\gamma}\overline{\Gamma}^{k}_{jk} = \sum_{k \neq j} {}^{\gamma}\overline{\Gamma}^{k}_{jk} + {}^{\gamma}\overline{\Gamma}^{j}_{jj} = \gamma[1 - (n+1)\overline{p}_j]. $$

В правой части равенств (3.4) на основании свойства 4 векторных полей совокупности $\{X_1, ..., X_{n+1}\}$ приходим к тому же выражению:

$$ \begin{aligned} \overline{X}_j \ln {}^{\gamma}\omega &= \overline{X}_j[\gamma(\ln p_1 + \cdots + \ln p_{n+1})] = \\ &= \gamma\left(\frac{1}{p_1}\overline{X}_j p_1 + \cdots + \frac{1}{p_j}\overline{X}_j p_j + \cdots + \frac{1}{p_{n+1}}\overline{X}_j p_{n+1}\right) = \gamma[1 - (n+1)\overline{p}_j]. \qquad \square \end{aligned} $$

3.2. Выведем два простейших следствия основной теоремы. Первым будет очевидное вытекающее из равенств (3.1) и (3.2)

Следствие 3.1. Для всех пар $({}^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ сопряженных связностей ${}^{\gamma}\nabla$ и ${}^{(1-\gamma)}\nabla$ справедливы равенства ${}^{\gamma}R = {}^{(1-\gamma)}R$ и ${}^{\gamma}\operatorname{Ric} = {}^{(1-\gamma)}\operatorname{Ric}$.

Далее обратимся к фишеровскому тензору g. Как было установлено, связность ${}^{1/2}\nabla$ является связностью Леви-Чивита, отвечающей фишеровскому тензору g. Поскольку при этом ${}^{1/2}\nabla$ является эквипроективной связностью, то согласно общей теории ([2], с. 171; [16], с. 126) тензор g должен задавать риманову геометрию постоянной кривизны [17].

С помощью компонент $\overline{g}_{ij} = \overline{p}_i(\delta_{ij} - \overline{p}_j)$ фишеровского тензора g из равенств (3.1) найдем выражение ${}^{1/2}\overline{R}^i_{jkl} = 1/4(\delta^i_k\overline{g}_{jl} - \delta^i_l\overline{g}_{jk})$ для компонент тензора кривизны ${}^{1/2}\overline{R}$ связности Леви-Чивита ${}^{1/2}\nabla$, что уточняет сделанный выше вывод, а именно, фишеровский тензор g задает риманову геометрию постоянной кривизны $K = 1/4$ ([15], с. 193). Сформулируем

Следствие 3.2. Средней связностью ${}^{1/2}\nabla$ сопряженных пар $({}^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ является отвечающая фишеровскому тензору g связность Леви-Чивита, которая задает риманову геометрию постоянной кривизны $K = 1/4$ на многообразии Caph.

Замечание. В ([13], с. 92) утверждается, что "при $\gamma = 1/2$ линейная связность отвечает римановой метрике" и при этом дается ссылка на ([6], § 12), где этот факт доказан для римановой метрики $(ds)^2 = \frac{(dp_1)^2}{p_1} + \cdots + \frac{(dp_{n+1})^2}{p_{n+1}}$ в случае $\gamma = 3/2$ ([6], с. 195–196).

4. Сопряженные связности на абстрактном статистическом многообразии

4.1. Абстрактным *статистическим многообразием* называется ([9], с. 179) триплет (M, g, D), где M — гладкое многообразие размерности $n \geq 2$, g — риманова метрика и D — ковариантное симметрическое тензорное поле типа $(3, 0)$ с компонентами g_{ij} и D_{ijk} в локальных координатах $x^1, x^2, \ldots, x^n$ произвольной карты (U, φ) многообразия M.

На многообразии (M, g, D) зададим 1-параметрическое семейство линейных связностей ${}^{\gamma}\nabla$, каждую из которых определим в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ произвольной карты (U, φ) символами Кристоффеля

$$ {}^{\gamma}\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + (\tfrac{1}{2} - \gamma)D^i_{jk} \tag{4.1} $$

для действительного параметра γ, символов Кристоффеля Γ^i_{jk} связности Леви-Чивита ∇ и $D^i_{jk} = g^{il}D_{ljk}$. Очевидно, что связности ${}^{\gamma}\nabla$ не имеют кручения, кроме того, $\Gamma^i_{jk} = {}^{1/2}\Gamma^i_{jk}$ и, следовательно, $\nabla = {}^{1/2}\nabla$.

Символы Кристоффеля ${}^{\gamma}\Gamma^i_{jk}$ и ${}^{(1-\gamma)}\Gamma^i_{jk}$ линейных связностей ${}^{\gamma}\nabla$ и ${}^{(1-\gamma)}\nabla$ удовлетворяют уравнениям $\partial_i g_{jk} = g_{lk}{}^{\gamma}\Gamma^l_{ij} + g_{jl}{}^{(1-\gamma)}\Gamma^l_{ki}$, которые характеризуют связности ${}^{\gamma}\nabla$ и ${}^{(1-\gamma)}\nabla$ как сопряженную относительно g пару $({}^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$.

Из (4.1) при этом находим, что ${}^{\gamma}\nabla_i g_{jk} = (1 - 2\gamma)D_{ijk}$ и, следовательно, ${}^{\gamma}\nabla_i g_{jk} = {}^{\gamma}\nabla_j g_{ik}$, а потому пара связностей $({}^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ кодацциева. Поскольку $\Gamma^i_{jk} = 2^{-1}({}^{\gamma}\Gamma^i_{jk} + {}^{(1-\gamma)}\Gamma^i_{jk})$, то связность Леви-Чивита $\nabla = {}^{1/2}\nabla$ является *средней связностью* ([2], с. 129) сопряженной кодацциевой пары $({}^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$.

Назовем статистическое многообразие (M, g, D) *сопряженным Риччи-симметрическим* [18], если у каждой пары $({}^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ совпадают тензоры Риччи ${}^{\gamma}\operatorname{Ric}$ и ${}^{(1-\gamma)}\operatorname{Ric}$ составляющих ее сопряженных связностей. Основной результат данного параграфа представляет

Теорема 4.1. *Статистическое многообразие (M, g, D) является сопряженным Риччи-симметрическим тогда и только тогда, когда связности ${}^{\gamma}\nabla$ из 1-параметрического семейства связностей на многообразии (M, g, D) будут эквиаффинными с основными плотностями вида ${}^{\gamma}\omega_{12\ldots n} = e^{\widetilde{\gamma}f + C}\sqrt{\det g}$, где $\widetilde{\gamma} = 2^{-1} - \gamma$.*

Доказательство. Известен закон изменения тензора кривизны ([2], с. 130) в результате преобразования связности вида $\overline{\nabla} = \nabla + T$. В случае преобразования (4.1) этот закон принимает вид равенств

$$^{\gamma}R^j_{ilk} = R^j_{ilk} + \widetilde{\gamma}(\nabla_l D^j_{ki} - \nabla_k D^j_{li}) + \widetilde{\gamma}^2(D^j_{lm}D^m_{ki} - D^j_{km}D^m_{li}), \tag{4.2}$$

где $\widetilde{\gamma} = 2^{-1} - \gamma$. Сверткой по индексам l и j в (4.2) приходим к равенствам

$$^{\gamma}R_{ik} = R_{ik} + \widetilde{\gamma}(\nabla_l D^l_{ki} - \nabla_k D_i) + \widetilde{\gamma}^2(D_m D^m_{ki} - D^l_{km}D^m_{li}), \tag{4.3}$$

которые связывают тензоры Риччи $^{\gamma}\operatorname{Ric}$ и Ric связностей $^{\gamma}\nabla$ и Леви-Чивита ∇. Согласно (4.3) требование $^{\gamma}\operatorname{Ric} = {}^{(1-\gamma)}\operatorname{Ric}$ при всех γ равносильно уравнениям $\nabla_l D^l_{ki} - \nabla_k D_i = 0$, а потому $\nabla_k D_i = \nabla_i D_k$. Следовательно, 1-форма $\operatorname{trace}_g D$ является точной, т. е. $\operatorname{trace}_g D = \operatorname{grad} f$ для некоторой гладкой функции $f : M \to R$.

Далее напомним, что для эквиаффинности пары $(^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ необходимо и достаточно ([2], с. 182–183), чтобы ее чебышевский вектор был градиентом. В свою очередь, чебышевским вектором ([5], с. 62) сопряженной пары связностей называется вектор, дуальный 1-форме $(n+2)^{-1}\operatorname{trace} T$ с локальными компонентами

$$T_k = (n+2)^{-1}T^l_{kl} = 2(n+2)^{-1}\gamma D^l_{kl} = (n+2)^{-1}(1-2\gamma)D_k. \tag{4.4}$$

Здесь $T^i_{jk} = (^{\gamma}\Gamma^l_{jk} - {}^{(1-\gamma)}\Gamma^l_{jk}) = (1-2\gamma)D^i_{jk}$ — компоненты тензора деформации $T = {}^{\gamma}\nabla - {}^{(1-\gamma)}\nabla$ пары сопряженных связностей $(^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ карты (U, φ). Из (4.4) следует, что $\operatorname{trace} T = (1-2\gamma)\operatorname{grad} f$.

Известно ([2], сс. 151, 159; [16], сс. 121, 124), что найденная в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ произвольной карты (U, φ) сумма символов Кристоффеля связности Леви-Чивита $\Gamma^j_{jk} = \partial_k \ln\sqrt{\det g}$, и условием эквиаффинности связности $^{\gamma}\nabla$, как уже отмечалось выше, служат равенства $^{\gamma}\Gamma^j_{jk} = \partial_k \ln {}^{\gamma}\omega_{12\ldots n}$. Тогда из равенств (4.1) с учетом того, что $D^j_{jk} = \partial_k f$, для $\widetilde{\gamma} = 1/2 - \gamma$, последует $d\ln {}^{\gamma}\omega_{12\ldots n} = d\ln\sqrt{\det g} + \widetilde{\gamma}df = d\ln(e^{\widetilde{\gamma}f}\sqrt{\det g})$. В итоге $^{\gamma}\omega_{12\ldots n} = e^{\widetilde{\gamma}f + C_1}\sqrt{\det g}$ для произвольной постоянной C_1. Следовательно, $^{(1-\gamma)}\omega_{12\ldots n} = e^{-\widetilde{\gamma}f + C_2}\sqrt{\det g}$ для произвольной постоянной C_2. Верно и обратное. □

4.2. Выведем следствия основной теоремы. Очевидно

Следствие 4.1. Каждая пара $(^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ на n-мерном статистическом многообразии (M, g, D) будет чебышевской и одновременно эквиаффинной с основными плотностями вида $^{\gamma}\omega_{12\ldots n} = e^{C_1}\sqrt{\det g}$ и $^{\gamma}\omega_{12\ldots n} = e^{C_2}\sqrt{\det g}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{trace}_g D = 0$.

Для доказательства достаточно напомнить, что пара сопряженных связностей называется *чебышевской* ([2], с. 181), если обращается в нуль ее чебышевский вектор.

Следствие 4.2. Для любой пары $(^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ сопряженных связностей $^{\gamma}\nabla$ и $^{(1-\gamma)}\nabla$ их тензоры Риччи $^{\gamma}\operatorname{Ric}$ и $^{(1-\gamma)}\operatorname{Ric}$ удовлетворяют равенству $\operatorname{trace}_g {}^{\gamma}\operatorname{Ric} = \operatorname{trace}_g {}^{(1-\gamma)}\operatorname{Ric}$, а в случае, когда пары чебышевские, в дополнение к этому — неравенствам вида $\operatorname{trace}_g {}^{\gamma}\operatorname{Ric} \le \operatorname{Scal}$ и $\operatorname{trace}_g {}^{(1-\gamma)}\operatorname{Ric} \le \operatorname{Scal}$.

Доказательство. Из равенств (4.3) выводим

$$\operatorname{trace}_g {}^{\gamma}\operatorname{Ric} = \operatorname{Scal} + \widetilde{\gamma}^2(\|\operatorname{trace}_g D\|^2 - \|D\|^2), \tag{4.5}$$

где $\operatorname{Scal} = \operatorname{trace}_g \operatorname{Ric}$ — скалярная кривизна связности Леви-Чивита ∇. Из (4.5) следует, что для любой пары $(^{\gamma}\nabla, g, {}^{(1-\gamma)}\nabla)$ выполняется равенство $\operatorname{trace}_g {}^{\gamma}\operatorname{Ric} = \operatorname{trace}_g {}^{(1-\gamma)}\operatorname{Ric}$. Для чебышевской пары равенство (4.5) предстает в виде

$$\operatorname{trace}_g {}^{\gamma}\operatorname{Ric} = \operatorname{Scal} - \widetilde{\gamma}^2\|D\|^2.$$

Из последнего равенства выводятся непосредственно доказываемые неравенства. □

Замечание. В дополнение к сказанному отметим, что геометрия статистического многообразия в случае, когда связности ${}^{\gamma}\nabla$ эквипроективные, была изучена в более ранних публикациях одного из авторов данной статьи [19]–[21].

Литература

1. Норден А.П. *О парах сопряжённых параллельных перенесений в многомерных пространствах* // ДАН СССР. – 1945. – Т. 49. – № 9. – С. 1345–1347.
2. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – 2-е изд., исправленное. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
3. Ведерников В.И. *Симметрические пространства и сопряженные связности* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1965. – Т. 125. – № 1. – С. 7–59.
4. Dillen F., Nomizu K., Vracken L. *Conjugate connections and Radon's theorem in affine differential geometry* // Monatsh. Math. – 1990. – V. 109. – № 3. – P. 221–235.
5. Simon U., Schwenk-Schellshmidt A., Viesel H. *Introduction to the affine differential geometry of hypersurfaces.* – Tokyo: Science Univ. Tokyo Press, 1991. – 161 p.
6. Ченцов Н.Н. *Статистические решающие правила и оптимальные выводы.* – М.: Наука, 1972. – 520 с.
7. Rao C.R. *Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters* // Bull. Calcutta Math. Soc. – 1945. – V. 37. – P. 81–89.
8. Amari S.-I. *Differential-geometrical methods in statistics.* – Lecture Notes in Statistics. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – V. 28. – 290 p.
9. McCullagh P. *Tensor methods in statistics.* – Monographs on Statistics and Applied Probability. – London: Chapman and Hall, 1987. – № 29. – 258 p.
10. Amari S.-I., Barndorff-Nielsen O.E., Kass R.E. Lauritzen S.L. Rao C. *Differential geometry in statistical inference.* – Institute of Mathematical Statistics: Hayward, 1987. – 240 p.
11. Murray M.K., Rice J.W. *Differential geometry and statistics.* – Monographs on Statistics and Applied Probability. – London: Chapman and Hall, 1993. – № 48. – 272 p.
12. Marriot P., Salmon M. *Applications of differential geometry to econometrics.* – Cambridge University Press: Cambridge, 2000. – 324 p.
13. Ченцов Н.Н., Морозова Е.А. *Марковская инвариантная геометрия на многообразиях состояния* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. математики. Новейшие достижения. – М., 1989. – Т. 36. – С. 69–102.
14. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
15. Арнольд В.И. и др. *Николай Николаевич Ченцов* // УМН. – 1993. – Т. 48. – Вып. 2. – С. 165–168.
16. Широков П.А., Широков А.П. *Аффинная дифференциальная геометрия.* – М.: ГИФМЛ, 1959. – 319 с.
17. Friedrich Th. *Die Fisher-information und symplektische Strukturen* // Math. Nachr. – 1991. – Bd. 153. – S. 273–296.
18. Степанова Е.С., Цыганок И.И. *Сопряженное Риччи-симметрическое статистическое многообразие* // Тез. докл. Международной конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. – Владимирск. гос. ун-т: Владимир, 2006. – С. 207–208.
19. Степанова Е.С., Цыганок И.И. *Статистические многообразия с эквиаффинными связностями* // Математика в образовании: 200 лет высшему математическому образованию России. Сб. статей / Под ред. И.С. Емельяновой. – Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 2005. – С. 246–250.
20. Степанова Е.С. *Статистические многообразия* // Тез. докл. Международн. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. – Владимирск. гос. ун-т: Владимир, 2004. – С. 199–200.

21. Степанова Е.С. *Статистические многообразия постоянной кривизны* // Лаптевские чтения: Сборник трудов Международного геометрического семинара им. Г.Ф. Лаптева (26–31 января 2004 г.) / Отв. ред. В.И. Паньженский. – Пенза, 2004. – С. 124–127.

Владимирский государственный педагогический университет

Финансовая академия при правительстве Российской Федерации

Поступила 26.03.2007