ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 5 (444)

УДК 517.958 : 537.525.72

*В.С. ЖЕЛТУХИН*

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ РАЗРЯДОВ ПОНИЖЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

## Введение

Математическое моделирование используется в физике газовых разрядов наравне с экспериментальными методами как для исследования процессов, протекающих в них, так и для проведения расчетов в технологических целях [1]–[3]. Модели, адекватно описывающие поведение плазмы, как правило, являются нелинейными, при этом обоснование корректности постановки краевых задач практически отсутствует. Редким исключением из общего правила является работа [4], в которой исследуются существование и единственность решения диффузионно-дрейфового приближения для положительного столба тлеющего разряда.

Целью работы является исследование разрешимости задачи на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра в коэффициент и весовую функцию уравнения, возникающей при моделировании плазмы высокочастотного (ВЧ) разряда пониженного давления.

Задачи такого рода исследованы крайне слабо. Так, в работе [5] рассматривается одномерная задача на собственные значения

$$[a(x,\lambda)u'(x)]' - q(x,\lambda)u(x) + \lambda\varrho(x)u(x) = 0, \quad x \in (0,1),$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

с невозрастающими по $\lambda$ коэффициентами $a(x,\lambda)$, $q(x,\lambda)$, где $\lambda$ — спектральный параметр. В [6]–[8] исследуются нелинейные разностные задачи на собственные значения. Вопрос разрешимости соответствующей дифференциальной задачи в [5]–[8] решается достаточно просто, т. к. спектральный параметр нелинейно входит только в коэффициент при старшем члене уравнения, причем последний убывает с ростом параметра.

Задача, исследуемая в данной работе, характеризуется, во-первых, нелинейным вхождением спектрального параметра как в коэффициент $a(x,\lambda)$ при главном члене уравнения, так и в весовую функцию $\varrho(x,\lambda)$, во-вторых, одновременным возрастанием по $\lambda$ функций $a(x,\lambda)$ и $\varrho(x,\lambda)$, и, в-третьих, пространственной неодномерностью.

## 1. Постановка задачи

Одним из основных уравнений математической модели установившегося ВЧ разряда пониженного давления с продувом газа [9] является уравнение неразрывности электронного газа, которое имеет вид

$$-\nabla\cdot\left(D_a\nabla n_e - \left(\mathbf{v}_a - D_a^T\frac{\nabla T_e}{T_e}\right)n_e\right) = \nu_i n_e, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Здесь $n_e$, $T_e$ — концентрация и температура электронов, $D_a$, $D_a^T$ — коэффициенты амбиполярной диффузии и термодиффузии, $\nu_i$ — частота ионизации, $\mathbf{v}_a$ — скорость плазменного потока,

$x$ — точка в пространстве (одно-, двух- или трехмерном), $\Omega$ — ограниченная область, занимаемая разрядом.

Уравнение (1) описывает баланс процессов рождения и гибели заряженных частиц в разряде: частицы появляются в результате ударной ионизации (правая часть (1)) и уходят из разряда за счет конвективного переноса, диффузии и термодиффузии (левая часть (1)) на стенки разрядной камеры, где и рекомбинируют.

Коэффициенты переноса являются функциями электронной температуры $T_e$ и давления $p$

$$D_a = D_a(p, T_e), \quad D_a^T = D_a^T(p, T_e), \quad \nu_i = \nu_i(p, T_e). \tag{2}$$

Поля температур электронного газа и давлений будем считать известными функциями пространственных координат

$$p = p(x), \quad T_e = T_e(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Уравнение (1) обычно решается с однородными граничными условиями

$$n_e\big|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

где $\Gamma = \partial\Omega$ — граница разрядной области.

Нетрудно видеть, что одним из решений краевой задачи (1), (3) является тождественный нуль, в то время как физическому смыслу удовлетворяет решение $n_e \geq 0$, $n_e \not\equiv 0$. Таким образом, уравнение (1) с граничными условиями (3) определяет задачу на собственные значения. При этом решение (1), (3) определяется с точностью до произвольного множителя

$$n_e(x) = n_{e0} \cdot \overline{n}_e(x),$$

где $n_{e0}$ — нормирующий множитель, который может быть выбран произвольно, $\overline{n}_e$ — безразмерное значение.

## 2. Физический смысл спектрального параметра

Поскольку в физической формулировке задачи (1), (3) спектральный параметр отсутствует, то возникает вопрос о его “происхождении” и физическом смысле. Так, например, в одномерной модели разряда, горящего в бесконечной цилиндрической разрядной камере радиуса $R$, при $D_a(x) = \text{const}$, $\nu_i(x) = \text{const}$ нетривиальному неотрицательному решению задачи (1), (3) отвечает наименьшее собственное значение

$$\lambda_0 = \nu_i (pR)^2 / D_a,$$

которому придается смысл характерной диффузионной длины [10]. Необходимо отметить, что данное значение является условной характеристикой разряда и не имеет отношения к другим величинам, действительно характеризующим какие-либо процессы, таким, как средняя длина свободного пробега и т. п.

Покажем, что в случае, когда коэффициенты переноса определяются соотношениями (2), спектральным параметром является значение электронной температуры

$$T_e^* = T_e(x^*)$$

в некоторой характерной точке разряда $x^*$, в качестве которой удобно выбрать, например, центр плазменного сгустка.

Пусть $x^*$ — координаты центра плазменного сгустка. Обозначим

$$\beta = T_e(x^*), \quad g(x) = T_e(x)/\beta \tag{4}$$

и произведем в уравнении (1) и граничных условиях (3) замену переменных

$$u = n_e, \quad a = D_a, \quad \varrho = \nu_i, \quad \mathbf{q} = \mathbf{v}_a - D_a^T \, \frac{\nabla T_e}{T_e}.$$

При этом задача принимает вид

$$-\nabla\cdot\{a[\beta g(x)]\nabla u(x)-\mathbf{q}(x)u(x)\}=\varrho[\beta g(x)]u(x),\quad x\in\Omega, \tag{5}$$

$$u(x)\big|_{\Gamma}=0. \tag{6}$$

Исследуем разрешимость задачи (5), (6) в функциональном пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$. Обобщенным решением задачи (5), (6) из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ назовем функцию $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega\{a[\beta g(x)]\nabla u(x)-\mathbf{q}(x)u(x)\}\cdot\nabla\eta(x)\,dx=\int_\Omega\varrho[\beta g(x)]u(x)\eta(x)\,dx\ \text{ при }\ \forall\eta(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega). \tag{7}$$

Из определения функции $g(x)$ следует, что $g(x^*)=1$. Обозначим

$$a(\beta)=a[\beta g(x^*)],\quad \varrho(\beta)=\varrho[\beta g(x^*)],\quad \widetilde{a}(x,\beta)=\frac{a[\beta g(x)]}{a(\beta)},$$

$$\widetilde{\varrho}(x,\beta)=\frac{\varrho[\beta g(x)]}{\varrho(\beta)},\quad \widetilde{\mathbf{q}}(x,\beta)=\frac{\mathbf{q}(x)}{a(\beta)},\quad \widetilde{\lambda}(\beta)=\frac{\varrho(\beta)}{a(\beta)}.$$

Задача (7) при этом принимает вид

$$\int_\Omega\{\widetilde{a}(x,\beta)\nabla u(x)-\widetilde{\mathbf{q}}(x,\beta)u(x)\}\cdot\nabla\eta(x)\,dx=\widetilde{\lambda}(\beta)\int_\Omega\widetilde{\varrho}(x,\beta)u(x)\eta(x)\,dx\ \text{ при }\ \forall\eta(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega). \tag{8}$$

Из теории краевых задач [11] известно, что обобщенная краевая задача (8) имеет нетривиальные решения при определенных значениях параметра

$$\widetilde{\lambda}(\beta)\in\{\widetilde{\lambda}_0(\beta),\widetilde{\lambda}_1(\beta),\ldots\mid 0<\widetilde{\lambda}_0<|\widetilde{\lambda}_1|\le|\widetilde{\lambda}_1|\le\cdots\},$$

являющихся его собственными числами, в общем случае (при $\widetilde{\mathbf{q}}\neq 0$) комплексными [13]. При этом существует единственная положительная в $\Omega$ собственная функция; ей отвечает вещественное наименьшее собственное значение $\widetilde{\lambda}_0(\beta)$ [13].

Таким образом, нетривиальное неотрицательное решение обобщенной задачи существует только в том случае, если найдется значение параметра $\beta=\beta_0$, при котором выполняется соотношение

$$\widetilde{\lambda}_0(\beta_0)=\frac{\varrho(\beta_0)}{a(\beta_0)}. \tag{9}$$

Следовательно, задача заключается в отыскании параметра $\beta_0$, удовлетворяющего соотношению (9). Производя обратный переход к задаче (7), нетрудно видеть, что для нее при $\beta=\beta_0$ должно иметь место равенство

$$\lambda_0(\beta_0)=1, \tag{10}$$

где $\lambda_0(\beta_0)$ — наименьшее собственное значение обобщенной задачи

$$\int_\Omega\{a[\beta g(x)]\nabla u(x)-\mathbf{q}(x)u(x)\}\cdot\nabla\eta(x)\,dx=\lambda(\beta)\int_\Omega\varrho[\beta g(x)]u(x)\eta(x)\,dx\ \text{ при }\ \forall\eta(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega). \tag{11}$$

В соответствии с введенными обозначениями (4), значение $\beta_0$ определяет электронную температуру в центре плазменного сгустка. Таким образом, физический смысл спектрального параметра задачи (1)–(3) заключается в том, что он определяет среднюю энергию, которую должны иметь электроны в центре плазменного сгустка,чтобы ионизация компенсировала потери частиц из разряда за счет диффузии. Следовательно, решение уравнения баланса числа частиц в разряде определяет не только их пространственное распределение, но и предписывает, какую они должны иметь среднюю энергию для поддержания стационарного состояния ВЧ разряда пониженного давления. Выявленная взаимосвязь внутренних характеристик плазмы в модели ВЧ разряда пониженного давления является математическим выражением известного экспериментально установленного факта, что положительный столб газовых разрядов является самонастраивающейся, саморегулирующейся системой [12].

## 3. Условия разрешимости нелинейной задачи на собственные значения

Аналитические аппроксимации коэффициентов переноса, используемые в теории ВЧ разряда пониженного давления, удовлетворяют условиям, которые для задачи (5), (6) формулируются следующим образом:

1. $a(s)$, $\varrho(s)$ — монотонно возрастающие, ограниченные функции аргумента $s = \beta g(x)$;
2. $0 < c_0 \le a(\beta g(x)) \le c_1(\beta)$, $0 < d_0 \le \varrho(\beta g(x)) \le d_1(\beta)$.

Условия разрешимости обобщенной нелинейной спектральной задачи (11), (10) можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема.** *Пусть отношение $a(s)/\varrho(s)$ является убывающей функцией аргумента $s$, причем $\lim\limits_{s\to\infty} a(s)/b(s) = 0$, функция $s\varrho'(s)/\varrho(s)$ не возрастает при увеличении $s$, $d_0/c_0 \le \lambda_0^*$, где $\lambda_0^*$ — наименьшее собственное значение обобщенной задачи*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\eta(x)\,dx = \lambda^*\int_\Omega u(x)\eta(x)\,dx \quad \forall\,\eta(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega),$$

*и $\mathbf{q} = 0$, либо $\nabla\times(\mathbf{q}(x)/a(\beta g(x))) = 0\ \ \forall x\in\Omega$.*

*Тогда существует по крайней мере одно значение $\beta_0$, удовлетворяющее соотношению* (10).

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай $\mathbf{q} = 0$. Интегральное тождество (11) при этом определяет задачу с самосопряженным оператором. Согласно минимаксимальному принципу [14]

$$\lambda_0(\beta) = \inf_{\substack{u\in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)\\ \|\varrho^{1/2}u\|=1}} R(u,\beta) = \int_\Omega a[\beta g(x)]|\nabla u(x)|^2\,dx, \tag{12}$$

где

$$\|\varrho^{1/2}u\| = \left(\int_\Omega \varrho[\beta g(x)]u^2(x)\,dx\right)^{1/2} \quad \forall\,u(x)\in L_2(\Omega).$$

Произведем в соотношении (12) замену переменных $v = \varrho^{1/2}u$, в результате чего оно принимает вид

$$\lambda_0(\beta) = \inf_{\substack{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)\\ \|v\|=1}} \widetilde{R}(v,\beta) = \int_\Omega a[\beta g(x)]|\nabla\varrho^{-1/2}[\beta g(x)]v(x)|^2\,dx. \tag{13}$$

Преобразуем подинтегральное выражение в (13) с учетом того, что

$$\begin{gathered}\nabla(\varrho^{-1/2}v) = \varrho^{-1/2}\left(\nabla v - \frac{1}{2}v\frac{\nabla\varrho}{\varrho}\right),\\ \nabla\varrho[\beta g(x)] = \beta\varrho_s'(s)\nabla g(x) = s\varrho_s'(s)\nabla\ln g(x).\end{gathered} \tag{14}$$

Заметим при этом, что т. к. $\lim\limits_{g(x)\to 0}[s(x)\nabla\ln g(x)] = \lim\limits_{g(x)\to 0}\beta\nabla g(x) = 0$, то последнее выражение в (14) определено при всех $g(x)\ge 0$.

Подставляя соотношения (14) в (13), получим оценку

$$\widetilde{R}(v,\beta) \le \int_\Omega\left(\frac{a}{\varrho}\right)\left[|\nabla v|^2 + \frac{1}{4}\left(s\frac{\varrho_s'(s)}{\varrho}\right)^2|\nabla\ln g|^2v^2\right]dx + \int_\Omega\left(\frac{a}{\varrho}\right)\left(s\frac{\varrho_s'(s)}{\varrho}\right)|\nabla\ln g\cdot\nabla v^2|\,dx.$$

В силу предположений теоремы, правая часть неравенства убывает до нуля при $\beta \to \infty$. Поэтому для произвольной функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ найдется значение $\beta = \beta_1$, при котором $\widetilde{R}(v, \beta_1) < 1$. Так как $\lambda_0(\beta) \leq \widetilde{R}(v, \beta)$, то $\lambda_0(\beta_1) < 1$. При $\beta = 0$ в силу предположений теоремы имеет место неравенство

$$\lambda_0(0) = \frac{c_0}{d_0} \frac{1}{\lambda_0^*} > 1.$$

Так как собственные значения краевой задачи непрерывно зависят от коэффициентов уравнения [14], то на интервале $[0, \beta_1]$ найдется по крайней мере одно значение $\beta = \beta_0$, при котором выполняется соотношение (10).

Рассмотрим теперь случай $\mathbf{q} \neq 0$, $\nabla \times (\mathbf{q}(x)/a[\beta g(x)]) = 0 \ \ \forall x \in \Omega$. Оператор обобщенной краевой задачи при этом является несамосопряженным. Однако интегральное тождество ( 11) можно преобразовать к виду, порождающему самосопряженный оператор

$$\int_\Omega \{\overline{a}(x,\beta) \nabla \overline{u}(x) \cdot \nabla \eta(x)\} dx = \lambda(\beta) \int_\Omega \overline{\varrho}(x,\beta) \overline{u}(x) \eta(x)\, dx \quad \forall \eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$$

с помощью замены переменных

$$\begin{aligned} \overline{a}(x,\beta) &= a[\beta g(x)] \exp[w(x,\beta)], \\ \overline{\varrho}(x,\beta) &= \varrho[\beta g(x)] \exp[w(x,\beta)], \\ \overline{u}(x,\beta) &= u(x) \exp[-w(x,\beta)], \end{aligned} \tag{15}$$

где функция $w(x,\beta)$ определяется соотношением

$$\nabla w(x,\beta) = \mathbf{q}/a[\beta g(x)]. \tag{16}$$

Функция $w(x,\beta)$ может быть найдена как решение обобщенной краевой задачи

$$\int_\Omega a[\beta g(x)] \nabla w(x,\beta) \cdot \nabla \eta(x)\, dx - \int_\Gamma (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\, \eta(x)\, dx = \int_\Omega \mathbf{q} \cdot \nabla \eta(x)\, dx \quad \forall\, \eta(x) \in W_2^{(1)},$$

и определена с точностью до аддитивной постоянной [11].

Обозначим $\widetilde{R}_1(u,\beta) = \int\limits_\Omega \overline{a}(x,\beta) |\nabla \overline{\varrho}^{(-1/2)} \overline{u}(x)|^2\, dx$. С учетом соотношений (15), (16) нетрудно получить оценку

$$\widetilde{R}_1(u,\beta) \leq \widetilde{R}(u,\beta) + \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{|\mathbf{q}|^2}{a\varrho} \overline{u}^2\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{|\mathbf{q} \cdot \nabla \overline{u}^2|}{\varrho}\, dx.$$

Существование значения $\beta_0$, удовлетворяющего соотношению (10) устанавливается аналогично случаю $\mathbf{q}(x) = 0$. $\square$

Таким образом, в работе установлен физический смысл спектрального параметра нелинейной задачи на собственные значения, возникающей в теории ВЧ разрядов пониженного давления. Найдены достаточные условия существования нетривиального неотрицательного решения этой задачи, что позволяет корректно проводить численное моделирование плазмы ВЧ разрядов пониженного давления.

## Литература


1. Дресвин С.В., Донской А.В., Гольдфарб В.М., Клубникин В.С. *Физика и техника низкотемпературной плазмы.* / Под. ред. С.В. Дресвина. – М.: Атомиздат, 1972. – 352 с.
2. Дресвин С.В. *Основы теории и расчета высокочастотных плазмотронов.* – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 312 с.
3. Райзер Ю.П., Шнейдер М.Н., Яценко Н.А. *Высокочастотный емкостный разряд: Физика. Техника эксперимента. Приложения.* – М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та; Наука. Физматлит. – 1995. – 320 с.

4. Исламов Р.Ш. *О разрешимости диффузионно-дрейфового приближения в теории газового разряда* // Препринт № 91-81. НИЦТЛАН. – Троицк, 1991. – 32 с.
5. Гулин А.В., Крегжде А.В. *Разностные схемы для некоторых нелинейных спектральных задач* // Препринт № 153. Ин-т прикл. матем. АН СССР. – М., 1981. – 28 с.
6. Гулин А.В., Крегжде А.В. *О применимости метода бисекции к решению нелинейных разностных задач на собственные значения* // Препринт № 8. Ин-т прикл. матем. АН СССР. – М., 1982. – 22 с.
7. Гулин А.В., Дроздова О.Ш., Яковлева С.А. *О численном решении одной нелинейной спектральной задачи* // Препринт №117. Ин-т прикл. матем. АН СССР. – М., 1985. – 21 с.
8. Гулин А.В., Крегжде А.В., Яковлева С.А. *Численное решение квадратичной разностной задачи на собственные значения* // Препринт № 81. Ин-т прикл. матем. АН СССР. – М., 1986. – 25 с.
9. Abdullin I.S., Abdullina E.I., Zheltoukhin V.S. *Simulation of the treatment of solid surfaces using low pressure RF plasma stream* // Proc. 5-th Europ. Conf. Thermal Plasma Processes. – St. Petersburg, 1998. – P. 243.
10. Schottky W. *Diffusion theory der Positiven Säule* // Phys. Zheitshr. – 1924. – Bd. XXV. – S. 635–640.
11. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1973. – 426 с.
12. Елецкий А.В. *Газовый разряд.* – М.: Знание, 1981. – 63 с.
13. Асланян А.Г., Лидский В.Б. *О спектре эллиптического уравнения* // Матем. заметки. – 1970. – Т. 7. – № 7. – С. 495–502.
14. Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики.* – Т. 2. – 3-е изд. – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. – 544 с.



*Казанский государственный университет*



*Поступила* 29.01.1999