Известия вузов. Математика
2009, № 6, с. 65–70

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

В.П. КАДУШИН, А.И. ШАКИРОВ

ОБ ОДНОМ ПРЯМОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА

Аннотация. В работе рассматривается сингулярное интегральное уравнение второго рода с ядром Гильберта на единичной окружности в пространстве Лебега. Дано теоретическое обоснование метода решения, основанного на операторе интерполяционного типа.

Ключевые слова: пространство Лебега, интегральное уравнение, сингулярный интеграл с ядром Гильберта, сходимость, оценка погрешности.

УДК: 517.51 : 517.96 : 519.64

Abstract. In this paper we consider a class of singular integral second-kind equations with Hilbert kernel on the unit circumference. We theoretically justify a method based on an interpolation-type operator.

Keywords: Lebesgue space, integral equation, singular integral with the Hilbert kernel, convergence, error estimate.

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение (СИУ) вида

$$Ax \equiv a(s)x(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s), \tag{1}$$

где $a(s)$, $b(s)$, $y(s)$ и $h(s,\sigma)$ — известные 2π-периодические функции, а $x = x(s)$ — искомая функция, причем $a(s)$ и $b(s)$ — непрерывные функции, а $h(s,\sigma)$ и $y(s)$ квадратично суммируемы в областях соответственно $[0, 2\pi]^2$ и $[0, 2\pi]$.

Приближенное решение СИУ (1) ищем в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{iks}, \tag{2}$$

коэффициенты которого будем определять из условий метода подобластей [1]

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} (Ax_n)(s)ds = \int_{s_j}^{s_{j+1}} y(s)ds, \quad j = \overline{0, 2n}, \tag{3}$$

где

$$s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{0, 2n}. \tag{4}$$

Поступили: полный текст 14.09.2007, краткое сообщение 31.03.2008.

Ясно, что условия (3) эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов полинома (2)

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_{jk} c_k = y_j, \qquad j = \overline{0, 2n}, \tag{5}$$

где

$$\alpha_{jk} = \int_{s_j}^{s_{j+1}} \Big\{ [a(s) + ib(s) \operatorname{sgn} k] e^{iks} + (Te^{ik\sigma})(s) \Big\} ds,$$

$$(Tx)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma, \quad y_j = \int_{s_j}^{s_{j+1}} y(s) ds.$$

Обоснование метода (2)–(5), понимаемое в смысле работ [2], [3], дает

Теорема. *Пусть выполнены условия*:

а) $\operatorname{ind} A = 0$, $a^2(s) + b^2(s) \neq 0$ *при всех* $s \in [0, 2\pi]$;
б) $a(s)$ *и* $b(s) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $y(s) \in L_2[0, 2\pi]$, $h(s, \sigma) \in L_2([0, 2\pi]^2)$;
в) *СИУ* (1) *однозначно разрешимо в* $L_2 = L_2[0, 2\pi]$.

Тогда при всех n, *хотя бы начиная с некоторого, СЛАУ* (5) *имеет единственное решение* c_k^*, $k = \overline{-n, n}$, *и приближенные решения*

$$x_n^*(s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k^* e^{iks}$$

сходятся к точному решению $x^* = A^{-1} y$ *в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\{E_n^T(x^*)_2\},$$

где $E_n^T(\varphi)_2$ — *наилучшее среднеквадратичное приближение функции* $\varphi \in L_2[0, 2\pi]$ *полиномами вида* (2).

Схема доказательства. Каждой функции $x(s) \in L_2[0, 2\pi]$ поставим в соответствие интеграл типа Коши ([4], [5]) вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma) d\sigma}{1 - ze^{-i\sigma}}, \quad z \notin \gamma,$$

где γ — единичная окружность с центром в начале координат комплексной z-плоскости. Полагая

$$x^\pm = x^\pm(s) = \Phi^\pm(t), \quad t = e^{is} \in \gamma,$$

и

$$Jx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma, \quad J_0 x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) d\sigma,$$

с помощью формул Племеля–Сохоцкого ([4], [5]) находим

$$x^+(s) - x^-(s) = x(s), \quad x^+(s) + x^-(s) = J_0 x - iJx.$$

Тогда СИУ (1) можно записать в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv fBx = y \quad (x, y \in L_2(\gamma), \quad A, B : L_2(\gamma) \to L_2(\gamma)), \tag{6}$$

где

$$Bx \equiv \psi^- x^+ - \psi^+ x^- + J_0^\sigma(\overline{h}x), \quad \overline{h} = \overline{h}(s,\sigma),$$
$$\psi(s) \equiv \psi^+(s) - \psi^-(s), \quad \psi^\pm = \exp\theta^\pm, \quad 2\theta^\pm = \pm g - iJg + J_0 g,$$
$$\theta(z) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\sigma)d\sigma}{1 - ze^{-i\sigma}}, \quad g(s) = \ln\frac{a(s) - ib(s)}{a(s) + ib(s)},$$
$$\overline{h}(s,\sigma) = \psi^-(s)\frac{h(s,\sigma) - ib(s)}{a(s) + ib(s)}, \quad f(s) = \frac{a(s) + ib(s)}{\psi^-(s)},$$

$L_2(\gamma)$ — пространство функций, квадратично-суммируемых на единичной окружности γ с нормой $\|\varphi\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2 ds$, где $t = e^{is}$.

Известно ([4], [5]), что функция $f(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера и нигде не обращается в нуль, и потому операторы A и B одновременно обратимы в $L_2(\gamma)$.

Пусть $f(s)$ — вещественная 2π-периодическая функция из L_2, H_n^T — подпространство тригонометрических полиномов порядка n с нормой в L_2. Определим оператор усредненного интерполирования $Q_n : L_2 \to H_n^T$, положив

$$Q_n(f,s) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{1}{h}\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(s)ds\right)\frac{\sin(2n+1)\frac{s-t_k}{2}}{\sin\frac{s-t_k}{2}}, \tag{7}$$
$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad t_k = \frac{2k+1}{2n+1}\pi, \quad k = \overline{0,2n}, \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}.$$

Пусть $f(t) \in L_2(\gamma)$, а H_n — подпространство многочленов вида (2). Определим оператор $Q_n : L_2(\gamma) \to H_n$, применяя Q_n (7) к вещественной и мнимой частям $f(t)$, $t = e^{is}$, соответственно.

Очевидно, система (5) эквивалентна заданному в $X_n = H_n \subset L_2(\gamma)$ линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv Q_n A x_n = Q_n(fBx_n) = Q_n y \quad (x_n, Q_n y \in X_n).$$

Покажем однозначную разрешимость этого уравнения (тем самым и системы (5)) при любой правой части. С этой целью введем вспомогательные операторы

$$B_n x_n \equiv P_n B x_n = P_n\{\psi^- x_n^+ - \psi^+ x_n^- + J_0(\overline{h}x_n)\}, \quad x_n \in X_n, \tag{8}$$

где $2x_n^\pm(t) = \pm x_n(t) - iJ(x_n,t) + J_0 x_n$, а $P_n : L_2(\gamma) \to X_n$ — произвольный линейный ограниченный проекционный ($P_n^2 = P_n$) оператор. Возьмем для определенности $P_n = S_n$, где S_n — оператор Фурье по системе $\{e^{iks}\}_{k=-n}^n$. Покажем, что B_n линейно обратимы (хотя бы при достаточно больших n) и обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|B_n^{-1}\| = O(1), \quad n \geqslant n_0, \quad B_n^{-1} : X_n \to X_n. \tag{9}$$

Введем вспомогательные операторы $G : X_n \to L_2(\gamma)$ и $G_n : X_n \to X_n$,

$$Gx_n \equiv \psi^- x_n^+ - \psi^+ x_n^-, \tag{10}$$
$$G_n x_n \equiv \psi_n^- x_n^+ - \psi_n^+ x_n^-, \tag{11}$$

где $\psi_n^\pm(t) \in H_n$, определяемые ниже. В силу (6), (8), (10), (11) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|Bx_n - B_n x_n\| = \|(E - P_n)(Gx_n - G_n x_n) + J_0(\overline{h}x_n) - P_n J_0(\overline{h}x_n)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|E - P_n\|\{\|\psi^+ - \psi_n^+\|_\infty + \|\psi^- - \psi_n^-\|_\infty + E_n^s(\overline{h})_2\}\|x_n\|,$$

где $E_n^s(\overline{h})_2$ — норма по σ наилучшего среднеквадратичного приближения $\overline{h}(s,\sigma)$ по переменной s тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $\|g\|_\infty = \sup_s |g(s)|$, $\|E-P_n\| = \|E-P_n\|_{X\to X}$, $X = L_2(\gamma)$.

Отсюда

$$\|B - B_n\|_{X_n\to X} \leqslant \|E-P_n\|_2\{\|\psi^+ - \psi_n^+\|_\infty + \|\psi^- - \psi_n^-\|_\infty + E_n^s(\overline{h})_2\}. \tag{12}$$

В силу известной теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега имеем $E_n^s(\overline{h})_2 \to 0$ при $n\to\infty$. Из проекционности и ограниченности P_n вытекает

$$\|E-P_n\|_2 \leqslant 2\|P_n\|_2 = O(1), \quad n\to\infty.$$

Для функций правых частей (10) и (11) по формулам Племеля–Сохоцкого имеем

$$\|\psi^+ - \psi_n^+\|_\infty + \|\psi^- - \psi_n^-\|_\infty \leqslant 2\|\psi - \psi_n\|_\infty + 2\|J(\psi-\psi_n)\|_\infty \equiv \alpha_n. \tag{13}$$

Из результатов [2] (см. гл. III) следует существование такого полинома $\psi_n \in X_n$, что $\alpha_n \to 0$ при $n\to\infty$. Тогда из (12) с учетом (13) находим

$$\beta_n \equiv \|B - B_n\| \to 0, \quad n\to\infty, \quad B - B_n : X_n \to X.$$

Отсюда ([2]) следует двусторонняя обратимость операторов B_n при всех n таких, что $q_n = \beta_n\|B^{-1}\| < 1$, и справедливость соотношения (9).

Теперь введем вспомогательные операторы $A_n', A_n'', F_n : X_n \to X_n$ такие, что

$$\begin{aligned} A_n' x_n &\equiv Q_n(fB_nx_n),\\ A_n'' x_n &\equiv Q_n(f_nB_nx_n) = F_nB_nx_n,\\ F_nx_n &\equiv Q_n(f_nx_n), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$f_n = f_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} f(s_k)\varphi_k(t), \quad t = e^{is},$$

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } s_k \leqslant s < s_{k+1};\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad f(t) \in L_2(\gamma).$$

Пусть $f_n(t) = u_n(s) + iv_n(s)$, $x_n = x_n(t) = x_n^u(s) + ix_n^v(s)$. Покажем, что если $|f| > m > 0$, то оператор $F_n : X_n \to X_n$, определенный в (14), обратим и

$$\|F_n^{-1}\| \leqslant \frac{\pi}{2m}, \quad F_n^{-1} : X_n \to X_n. \tag{15}$$

Для этого рассмотрим

$$\begin{aligned} \|F_nx_n\|^2_{L_2(\gamma)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Q_n(f_nx_n)|^2 ds =\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\, [Q_n(u_nx_n^u - v_nx_n^v)]^2 + [Q_n(u_nx_n^v + v_nx_n^u)]^2\, \} ds =\\ &= \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} \{\, [\delta_j(u_nx_n^u - v_nx_n^v)]^2 + [\delta_j(u_nx_n^v + v_nx_n^u)]^2\, \}, \end{aligned}$$

где

$$\delta_j(g) = \frac{1}{h}\int_{s_j}^{s_{j+1}} g(s)ds, \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}.$$

Учитывая линейность операций $\delta_j(\cdot)$ и то, что для $s_j \leqslant s < s_{j+1}$ функции $u_n(s)$ и $v_n(s)$ равны $u_n(s_j)$ и $v_n(s_j)$ соответственно, проведя несложные выкладки, получим

$$\|F_n x_n\|^2_{L_2(\gamma)} \geqslant m^2 \frac{4}{\pi^2}\|x_n\|^2_{L_2(\gamma)}.$$

Отсюда ([6], с. 209) следует существование F_n^{-1} и справедливость оценки (15).

Тогда с учетом (9) и (15) утверждаем, что операторы $A''_n : X_n \to X_n$ линейно обратимы при любом $n \geqslant n_0$, и обратные операторы $A''^{-1}_n = B_n^{-1}F_n^{-1}$ ограничены по норме в совокупности:

$$\|A''^{-1}_n\|_2 = O(1), \quad n \geqslant n_0,$$

где n_0 определена в (9).

Далее для любого $x_n \in X_n$ последовательно находим

$$\|A'_n x_n - A''_n x_n\|_2 = \|Q_n[(f - f_n)B_n x_n]\|_2 \leqslant \|Q_n\|_2\|f - f_n\|_\infty \|B_n\|_2\|x_n\|_2. \tag{16}$$

Поскольку $f(t)$ — непрерывная функция при $t \in \gamma$, то $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$, и (как нетрудно показать) $\|Q_n\|_2 = 1$. Поэтому из (16) следует

$$\|A'_n - A''_n\|_2 \to 0 \ (n \to \infty), \quad A'_n, A''_n : X_n \to X_n. \tag{17}$$

Учитывая обратимость A''_n, из (17) выводим, что операторы A'_n линейно обратимы и

$$\|A'^{-1}_n\|_2 = O(1), \quad n \geqslant n_1 \geqslant n_0, \quad A'^{-1}_n : X_n \to X_n. \tag{18}$$

Аналогичную оценку проведем для следующей пары операторов:

$$\|A'_n x_n - A_n x_n\|_2 = \|Q_n[f(B_n x_n - Bx_n)]\|_2 \leqslant \|Q_n\|_2\|f\|_\infty\|B_n - B\|_{X_n \to X}\|x_n\|_2. \tag{19}$$

Из (19), подобно (18), получаем обратимость оператора A_n и ограниченность A_n^{-1} по норме в совокупности

$$\|A_n^{-1}\|_2 = O(1), \quad n \geqslant n_2 \geqslant n_1, \quad A_n^{-1} : X_n \to X_n.$$

Таким образом, начиная с некоторого n_2, система (5) однозначно разрешима.

Оценку погрешности приближенного решения получим, используя результаты [2]:

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant \|E - A_n^{-1}Q_n A\| E_n^T(x^*)_2 = O\{E_n^T(x^*)_2\},$$

причем $E_n^T(x^*)_2 \to 0$, $n \to \infty$. □

Литература

[1] Ермолаева Л.Б. *Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений методом подобластей*: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987.

[2] Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

[3] Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.

[4] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

[5] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 512 с.

[6] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 742 с.

В.П. Кадушин

доцент, кафедра теории функций и приближений,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

e-mail: Wasili.Kaduchin@ksu.ru

А.И. Шакиров

специалист по обработке данных ООО "ТГТ",

e-mail: aydarshakirov@pochta.ru

V.P. Kadushin

Associate Professor, Chair of Theory of Functions and Approximations,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Wasili.Kaduchin@ksu.ru

A.I. Shakirov

Data operator, TGT Oil & Gas Services, Ltd.,

e-mail: aydarshakirov@pochta.ru