ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 9 (508)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.983

В.М. ДЕУНДЯК

ПРИМЕНЕНИЕ ИДЕАЛОВ НИКОЛЬСКОГО К ИССЛЕДОВАНИЮ РАЗРЕШИМОСТИ БИСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Операторные идеалы типа идеалов Н.К. Никольского из [1] введены и исследованы в [2], где также рассмотрено их применение к изучению разрешимости сингулярных интегральных операторов в L_p-пространствах на окружности с коэффициентами, имеющими разрывы общего вида. Данная работа посвящена применению этих идеалов к исследованию бисингулярных интегральных операторов при $p = 2$. Именно, для бисингулярных операторов с разрывными коэффициентами доказана теорема о канонических представлениях и построен набор предсимволов — аналог символического исчисления [3], [4], позволяющий для исследуемых операторов сформулировать необходимые и достаточные условия обобщенной фредгольмовости и необходимые условия классической фредгольмовости.

1. Идеалы Никольского и сингулярные интегральные операторы. Введем необходимые обозначения. Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — C^*-алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ — идеал компактных операторов. Если $\mathcal{U}$ — произвольная C^*-алгебра, то группу обратимых элементов из $\mathcal{U}$ обозначим через $G\mathcal{U}$, а коммутаторский идеал — через $\mathcal{C}(\mathcal{U})$. Оператор $A \in \mathcal{U}$ называется фредгольмовым по модулю идеала $\mathcal{J}$, если образ A в фактор-алгебре $\mathcal{U}/\mathcal{J}$ обратим; пространство фредгольмовых по модулю $\mathcal{J}$ операторов из $\mathcal{U}$ обозначим $\mathrm{Fr}_{\mathcal{J}}(\mathcal{W})$. Ясно, что $\mathrm{Fr}(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \mathrm{Fr}_{\mathcal{K}(\mathcal{H})}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ — пространство классических фредгольмовых операторов. Если $\mathcal{U}$ — банахова алгебра (C^*-алгебра) и $M \subset \mathcal{U}$, то через $\mathrm{alg}(M)$ ($\mathrm{alg}_*(M)$) обозначим замкнутую подалгебру (C^*-подалгебру) алгебры $\mathcal{U}$, порожденную множеством M. Пусть $\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbf{T}$ ($\subset \mathbf{C}$) — единичная окружность, $L_2(\mathbf{T})$ — пространство суммируемых с квадратом функций на $\mathbf{T}$, $L_\infty(\mathbf{T})$ — банахова алгебра всех существенно ограниченных функций, $H_\infty(\mathbf{T})$ ($\subset L_\infty(\mathbf{T})$) — банахова алгебра Харди. В $L_2(\mathbf{T})$ рассмотрим сингулярный оператор Коши S и проекторы Рисса $P^\pm = (1/2)(I \pm S)$. Для множества Y через id_Y обозначим тождественное преобразование Y.

Пусть $\mathcal{B} = \{b \in H_\infty : |b(t)| = 1$ для почти всех $t \in \mathbf{T}\}$. Для произвольного множества M из $\mathcal{B}$ ($\subset L_\infty$) алгеброй Дугласа называется алгебра $\mathbf{A} = \mathrm{alg}(H_\infty \cup \overline{M})$. Согласно известной теореме Чанг–Маршалла любая замкнутая подалгебра банаховой алгебры L_∞, содержащая H_∞, является алгеброй Дугласа, и, более того, $\mathbf{A} = \mathrm{alg}(H_\infty \cup \overline{\mathcal{B}_\mathbf{A} \cap \mathcal{B}_{\mathrm{int}}})$, где $\mathcal{B}_\mathbf{A} = \{b \in \mathcal{B} : \overline{b} \in \mathbf{A}\}$, а B_{int} — полугруппа, порожденная интерполяционными произведениями Бляшке (см. [5], с. 332). Алгебры $Q_\mathbf{A} = \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{A}}$ и $C_\mathbf{A} = \mathrm{alg}_*(\mathcal{B}_\mathbf{A})$ называют, следуя [1], алгебрами Сарасона. Известно, например, что $C_{L_\infty(\mathbf{T})} = Q_{L_\infty(\mathbf{T})} = L_\infty(\mathbf{T})$, $C_{H_\infty(\mathbf{T})} = Q_{H_\infty(\mathbf{T})} = \mathbf{C}$, $C_{H_\infty(\mathbf{T})+C(\mathbf{T})} = C(\mathbf{T})$ и $Q_{H_\infty(\mathbf{T})+C(\mathbf{T})} = QC(\mathbf{T})$ — алгебра всех квазинепрерывных функций (см. [5], с. 374). Для произвольной подалгебры Ω алгебры L_∞ через $\mathbf{D}(\Omega)$ обозначим пересечение всех таких алгебр Дугласа $\mathbf{A}$, для которых $\Omega \subset Q_\mathbf{A}$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{D}(\Omega)$ — алгебра Дугласа и $\mathbf{D}(Q_\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ для любой алгебры Дугласа $\mathbf{A}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00917.

В случае $p=2$ приведем определение идеалов Никольского, введенных и исследованных в [2] для произвольных p. Именно, в [2] доказано, что для алгебры Дугласа $\mathbf{A}$ множества

$$\mathcal{I}^-(\mathbf{A})=\{F\in\mathcal{L}(L_2(\mathbf{T})):\inf_{b\in\mathcal{B}_\mathbf{A}}\|(P^-M_b)F\|=0\},$$
$$\mathcal{I}^+(\mathbf{A})=\{F\in\mathcal{L}(L_2(\mathbf{T})):\inf_{b\in\mathcal{B}_\mathbf{A}}\|(P^+M_{\overline{b}})F\|=0\},\quad \mathcal{I}(\mathbf{A})=\mathcal{I}^-(\mathbf{A})\cap\mathcal{I}^+(\mathbf{A})$$

являются замкнутыми правыми идеалами банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_2(\mathbf{T}))$, которые и названы идеалами Никольского. Ясно, что в этом определении $\mathcal{B}_\mathbf{A}$ можно заменить на $\mathcal{B}_\mathbf{A}\cap\mathcal{B}_{\mathrm{int}}$.

Пусть Ω — замкнутая подалгебра банаховой алгебры $L_\infty(\mathbf{T})$, $\mathcal{B}_{(\Omega)}=\mathcal{B}_{\mathbf{D}(\Omega)}\cap\mathcal{B}_{\mathrm{int}}$, $\Omega^2=\Omega\oplus\Omega$, $\mathcal{A}(S,\Omega)=\mathrm{alg}_*(\{S\},\Omega)$ — C^*-алгебра сингулярных интегральных операторов с коэффициентами из Ω. В [2] идеалы Никольского использованы для получения канонического представления операторов из $\mathcal{A}(S,\Omega)$, построения предсимвола $\mu_\Omega:\mathcal{A}(S,\Omega)\to\Omega^2$ и описания коммутаторного идеала $\mathcal{C}(\mathcal{A}(S_p,\Omega))$.

Теорема 1 ([2]). 1) *Любой оператор* $F\in\mathcal{A}(S,\Omega)$ *однозначно представим в виде* $F=\varphi_+P^++\varphi_-P^-+K$, *где* $\varphi_\pm\in\Omega$, $K\in\mathcal{C}(\mathcal{A}(S,\Omega))$. 2) *Сопоставление* $F\mapsto\mu_\Omega(F)=(\varphi_+,\varphi_-)$ *определяет предсимвол — эпиморфизм банаховых алгебр* $\mu_\Omega:\mathcal{A}(S,\Omega)\to\Omega^2$, *при этом* $\ker(\mu_\Omega)=\mathcal{C}(\mathcal{A}(S,\Omega))=\mathcal{I}(\mathbf{D}(\Omega))\cap\mathcal{A}(S,\Omega)$. 3) *Если* $F\in\mathcal{A}(S,\Omega)$, *то*

$$F\in\mathcal{C}(\mathcal{A}(S,\Omega))\Leftrightarrow\inf_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega)}}\|(P^-M_b)F\|=\inf_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega)}}\|(P^+M_{\overline{b}})F\|=0.$$

Для $\Omega=C(\mathbf{T})$ каноническое представление содержится в [6], при этом $\mathcal{C}(\mathcal{A}(S,C(\mathbf{T})))=\mathcal{K}(L_2(\mathbf{T}))$. В случае, когда Ω — алгебра Сарасона, аналоги приведенных выше результатов используются при исследовании сингулярных операторов с разрывными коэффициентами в L_p-пространствах с весами Макенхаупта ([7], [8]).

2. Бисингулярные интегральные операторы. Рассмотрим замкнутые подалгебры Ω_1, Ω_2 банаховой алгебры $L_\infty(\mathbf{T})$. Пусть $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}(S,\Omega_i)$. Далее будем использовать введенные обозначения для алгебр $\mathcal{A}(S,\Omega_i)$, добавляя в случае необходимости справа внизу i. Рассмотрим C^*-алгебру бисингулярных интегральных операторов — топологическое тензорное произведение $\mathcal{A}_{1,2}=\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$. Пусть $\mathcal{S}_1=\Omega_1^2\otimes\mathcal{A}_2$, $\mathcal{S}_2=\mathcal{A}_1\otimes\Omega_2^2$, $\mathcal{S}_0=\Omega_1^2\otimes\Omega_2^2$. Определим два частичных предсимвола — эпиморфизмы $\mu_{(1)}=\mu_{\Omega_1}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{A}_2}:\mathcal{A}_{1,2}\to\mathcal{S}_1$, $\mu_{(2)}=\mathrm{id}_{\mathcal{A}_1}\otimes\mu_{\Omega_2}:\mathcal{A}_{1,2}\to\mathcal{S}_2$ и слабый предсимвол — эпиморфизм $\mu_{(0)}=\mu_{\Omega_1}\otimes\mu_{\Omega_2}:\mathcal{A}_{1,2}\to\mathcal{S}_0$. Пара эпиморфизмов $\mu=(\mathrm{id}_{\Omega_1^2}\otimes\mu_{\Omega_2}$, $\mu_{\Omega_1}\otimes\mathrm{id}_{\Omega_2^2})$ определяет расслоенную сумму C^*-алгебр:

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\oplus_\mu\mathcal{S}_2=\{(b_1,b_2):b_j\in\mathcal{S}_j,\ (\mathrm{id}_{\Omega_1^2}\otimes\mu_{\Omega_2})(b_1)=(\mu_{\Omega_1}\otimes\mathrm{id}_{\Omega_2^2})(b_2)\}$$

([7], с. 96). Формулой $\mu_{(1,2)}(F)=(\mu_{(1)}(F),\mu_{(2)}(f))$, где $F\in\mathcal{A}_{n_1,n_2}$, определим полный предсимвол $\mu_{(1,2)}:\mathcal{A}_{1,2}\to\mathcal{S}$. Пусть $\mathcal{J}_{(1,2)}=\mathcal{C}(\mathcal{A}_1)\otimes\mathcal{C}(\mathcal{A}_2)$, $\mathcal{J}_{(1)}=\mathcal{C}(\mathcal{A}_1)\otimes\mathcal{A}_2$, $\mathcal{J}_{(2)}=\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{C}(\mathcal{A}_2)$, $\mathcal{J}_{(0)}=\mathcal{C}(\mathcal{A}_1)\otimes\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{C}(\mathcal{A}_2)$. Непосредственно проверяется, что

$$\ker(\mu_{(1,2)})=\mathcal{J}_{(1,2)},\ \ \ker(\mu_{(0)})=\mathcal{C}(\mathcal{A}_{1,2})=\mathcal{J}_{(0)},\ \ \ker(\mu_{(j)})=\mathcal{J}_{(j)}\ \ (j\in\{1;2\}).$$

Канонические представления операторов из $\mathcal{A}_{1,2}$ и их связь с предсимволами содержит

Теорема 2. *Пусть* $F\in\mathcal{A}_{1,2}$. *Тогда*

1) *оператор* F *однозначно представим в виде суммы*

$$F=V_{1,+}(P^+\otimes I)+V_{1,-}(P^-\otimes I)+K_1,$$

где $V_{1,\pm}\in\Omega_1\otimes\mathcal{A}_2$, $K_1\in\mathcal{J}_{(1)}$, *при этом* $\mu_{(1)}(F)=(V_{1,+},V_{1,-})$;

2) *оператор* F *однозначно представим в виде суммы*

$$F=V_{2,+}(I\otimes P^+)+V_{2,-}(I\otimes P^+)+K_2,$$

где $V_{2,\pm}\in\mathcal{A}_1\otimes\Omega_2$, $K_2\in\mathcal{J}_{(2)}$, *при этом* $\mu_{(2)}(F)=(V_{2,+},V_{2,-})$;

3) *оператор F однозначно представим в виде суммы*

$$F = w_{+,+}(P^+ \otimes P^+) + w_{+,-}(P^+ \otimes P^-) + w_{-,+}(P^- \otimes P^+) + w_{-,-}(P^- \otimes P^-) + K_0,$$

где $w_{\pm,\pm} \in \Omega_1 \otimes \Omega_2$, $K_0 \in \mathcal{J}_{(0)}$, *при этом* $(\mathrm{id}_{\Omega_1^2} \otimes \mu_{\Omega_2})V_{1,\pm} = (w_{\pm,+}, w_{\pm,-})$, $(\mu_{\Omega_1} \otimes \mathrm{id}_{\Omega_2^2})V_{2,\pm} = (w_{+,\pm}, w_{-,\pm})$ *и* $\mu_{(0)}(F) = ((w_{+,+}, w_{+,-}), (w_{-,+}, w_{-,-}))$.

Сформулируем результаты о фредгольмовости операторов из $\mathcal{A}_{1,2}$.

Теорема 3. *Пусть* $F \in \mathcal{A}_{1,2}$. *Тогда* 1) $F \in \mathrm{Fr}_{\mathcal{J}_{(1,2)}}(\mathcal{A}_{1,2}) \Leftrightarrow \mu_{(1,2)}(F) \in G\mathcal{S}$; 2) $F \in \mathrm{Fr}_{\mathcal{J}_{(j)}}(\mathcal{A}_{1,2}) \Leftrightarrow \mu_{(j)}(F) \in G\mathcal{S}_j$ $(j \in \{0;1;2\})$; 3) $F \in \mathrm{Fr}(\mathcal{A}_{1,2}) \Rightarrow \mu_{(1,2)}(F) \in G\mathcal{S}$, $\mu_{(j)}(F) \in G\mathcal{S}_j$ $(j \in \{0;1;2\})$.

Для бисингулярных интегральных операторов с квазинепрерывными коэффициентами, т. е. при $\Omega_j = QC(\mathbf{T})$, имеет место равенство

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}_1) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{A}_2) = \mathcal{K}(L_2(\mathbf{T})) \otimes \mathcal{K}(L_2(\mathbf{T})) = \mathcal{K}(L_2(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}))$$

и, следовательно, полный предсимвол $\mu_{(1,2)}$ является фактически символом, в терминах которого в теореме 3 сформулированы условия классической фредгольмовости. Отметим также, что аналоги теорем 2 и 3 для $\Omega_j = C(\mathbf{T})$ содержатся в [3], [4].

Применим идеалы Никольского для описания ядер предсимволов. Введем операторы $Q^{(+1)}_{b;1} = P^+ M_{\overline{b}} \otimes I$, $Q^{(-1)}_{b;1} = P^- M_b \otimes I$, $Q^{(+1)}_{b;2} = I \otimes P^+ M_{\overline{b}}$, $Q^{(-1)}_{b;2} = I \otimes P^- M_b$, где $b \in \mathcal{B}$, и определим для F из $\mathcal{A}_{1,2}$ числа

$$q_j(F) = \max_{k \in \{\pm 1\}} \inf_{b \in \mathcal{B}_{(\Omega_j)}} \|Q^{(k)}_{b;j} F\| \quad (j \in \{1;2\}), \qquad q_{1,2}(F) = \max\{q_1(F); q_2(F)\},$$

$$q_0(F) = \max_{(k,l) \in \{(\pm 1, \pm 1)\}} \inf_{b \in \mathcal{B}_{(\Omega_1)}} \inf_{c \in \mathcal{B}_{(\Omega_2)}} \|Q^{(k)}_{b;1} Q^{(l)}_{c;2} F\|.$$

Теорема 4. *Пусть* $F \in \mathcal{A}_{1,2}$. *Тогда* 1) $F \in \mathcal{J}_{(1,2)} \Leftrightarrow q_{1,2}(F) = 0$, 2) $F \in \mathcal{J}_{(j)} \Leftrightarrow q_j(F) = 0$, *где* $j \in \{0;1;2\}$.

Литература

1. Никольский Н.К. *Операторы Ганкеля и Тёплица. Алгебраический подход* // Препринт Р-2-82. – ЛОМИ АН СССР. – 1982.
2. Георгиев К.А., Деундяк В.М. *Идеалы Никольского и их применение к исследованию алгебр сингулярных интегральных операторов* // Алгебра и анализ. – 1999. – Т. 11. – Вып. 2. – С. 88–108.
3. Пилиди В.С. *О бисингулярном уравнении в пространстве L_p* // Матем. исследования. – Кишинев: Штиинца, 1972. – Т. 7. – Вып. 3. – С. 167–175.
4. Douglas R.G., Howe R. *On the C^*-algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 158. – № 1. – P. 203–218.
5. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* – М: Мир, 1984. – 470 с.
6. Михлин С.Г. *Сингулярные интегральные уравнения* // УМН. – 1948. – Т. 3. – Вып. 3. – С. 29–112.
7. Георгиев К.А., Деундяк В.М. *Критерий принадлежности взвешенного сингулярного оператора Коши алгебре сингулярных интегральных операторов с коэффициентами из алгебр Сарасона* // Функц. анализ и его прилож. – 1994. – Т. 28. – № 3. – С. 80–82.
8. Deundyak V.M., Georgiev K.A. *An outer derivation construction on the algebra of singular integral operators with general coefficients in weighted spaces and its applications* // Operator Theory: Advances and Appl. – Basel: Birkhauser, 2000. – V. 118. – P. 91–103.

Донской государственный технический университет

Поступила 27.08.2003