ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 4 (491)

УДК 517.929

В.В. ВЛАСОВ, В.Ж. САКБАЕВ

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ В ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

В предлагаемой работе приведен результат о корректной разрешимости в шкале весовых пространств Соболева на полуоси начальных задач для одного класса дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, являющихся возмущением абстрактного параболического уравнения, порожденного ограниченной голоморфной полугруппой.

Отметим, что при доказательстве основного результата работы существенно используется оператор внутренней суперпозиции (подробнее см. в [1]) в пространствах Соболева вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве.

Значительное число работ посвящено изучению разрешимости и асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) как в конечномерных (см. [1], [2] и указанную там библиографию), так и в банаховых, а также в гильбертовых пространствах [3]–[15]. Однако при этом работ, в которых проводились исследования разрешимости начальных задач в пространствах Соболева, сравнительно немного.

Результаты данной статьи являются естественным развитием результатов работ [5]–[7], [12], [13] для пространства Соболева $W^1_{2,\gamma}(R_+, A)$ и работ [14], [15], в которых исследуются дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа в пространствах Соболева $W^l_{2,\gamma}(R_+, A)$, $l \geq 2$, с самосопряженным оператором A.

1. Обозначения, определения и формулировки результатов

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, оператор $-A$ с плотной в пространстве $\mathcal{H}$ областью определения $D(A)$ является генератором ограниченной голоморфной полугруппы $T(t) = e^{-tA}$ в пространстве $\mathcal{H}$ с углом $|\arg t| < \theta < \frac{\pi}{2}$ ([3], [4], [16]), I — единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}$.

Обозначим через $L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ пространство функций со значениями в $\mathcal{H}$, снабженное нормой $\|f\|_{L_{2,\gamma}(a,b)} \equiv (\int\limits_a^b e^{-2\gamma t}\|f(t)\|^2 dt)^{1/2}$, $\gamma \geq 0$, через $W^l_{2,\gamma}((a,b), A^l)$ — пространство функций со значениями в $\mathcal{H}$ таких, что $A^{jl}u^{(1-j)l}(t) \in L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})$, $j = 0, 1$, $l = 1, 2, \ldots$, с нормой

$$\|u\|_{W^l_{2,\gamma}((a,b),A^l)} \equiv (\|u^{(l)}\|^2_{L_{2,\gamma}(a,b)} + \|A^l u\|^2_{L_{2,\gamma}(a,b)})^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

Здесь и в дальнейшем полагаем $v^{(j)}(t) \equiv d^j v(t)/dt^j$, $j = 1, 2, \ldots$, $W^l_{2,0} \equiv W^l_2$, $L_{2,0} \equiv L_2$; $W^0_{2,\gamma} \equiv L_{2,\gamma}$. Подробнее о пространстве $W^l_2((a,b), A^l)$ см. ([16], гл. I, а также [3]).

Введем гильбертовы пространства

$$\mathcal{F}_j = \left\{x \in \mathcal{H} : \ \|x\|^2_{\mathcal{H}} + \int_0^{+\infty} \|A^j e^{-tA}x\|^2_{\mathcal{H}} dt \leq +\infty\right\}, \quad j = 1, \ldots, l,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00790, № 01-01-00407.

с соответствующими нормами

$$\|x\|_{\mathcal{F}_j} = \left\{ \|x\|^2_{\mathcal{H}} + \int_0^{+\infty} \|A^j e^{-tA} x\|^2_{\mathcal{H}} dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно [3], [16] справедливы вложения

$$D(A^l) \subset \mathcal{F}_l \subset \cdots \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{H},$$

причем каждое из подпространств плотно в последующем и для любого вектора $v \in D(A^l)$ справедливы неравенства $\|v\|_{\mathcal{H}} \le \|v\|_{\mathcal{F}_1} \le \cdots \le \|v\|_{\mathcal{F}_l}$.

На полуоси $R_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим начальную задачу

$$\mathcal{A}u \equiv u^{(1)}(t) + Au(t) + \sum_{j=1}^{n} (B_j Au(t-h_j) + D_j u^{(1)}(t-h_j)) = f(t), \quad t \in R_+, \tag{1}$$

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in (-h, 0]. \tag{2}$$

Здесь B_j, D_j — ограниченные операторы, действующие в пространстве $\mathcal{H}$; числа h_j таковы, что $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_n = h$; начальная функция $\varphi_0(t) \in W_2^l((-h, 0), A^l)$ при некотором $l = 2, 3, \ldots$

Предположим, что функция $f(t)$ принадлежит пространству $W^{l-1}_{2,\gamma}(R_+, A^{l-1})$ при некотором $\gamma \ge 0$, для (1) выполняется

Условие I). Для операторов B_j, D_j справедливы представления

$$B_j x = A^{-(m-1)} B_{m,j} A^{(m-1)} x, \quad D_j x = A^{-(m-1)} D_{m,j} A^{(m-1)} x, \quad j = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l},$$

где $x \in \mathrm{Dom}(A^{l-1})$, $B_{m,j}$, $D_{m,j}$ — ограниченные операторы в $\mathcal{H}$.

Введем обозначения $\|B_j\| = b_j$, $\|B_{l,j}\| = b_j^l$, $\|D_j\| = d_j$, $\|D_{l,j}\| = d_j^l$.

Определение. Функцию $u(t)$ назовем решением задачи (1), (2), если она принадлежит пространству $W^l_{2,\gamma}((-h, +\infty), A^l)$ при некотором $\gamma \ge 0$ и тождественно удовлетворяет уравнению (1) и условию (2).

Обозначим через $C(R_+, \mathcal{F}_j)$ пространство функций, заданных на полуоси R_+, со значениями в пространстве $\mathcal{F}_j$, $j = \overline{1, l}$, непрерывных по норме данного пространства.

Известна

Теорема вложения ([3], [16]). *Если функция $v(t) \in W_2^1(R_+, A)$, то $v(t) \in C(R_+, \mathcal{F}_1)$ и существует такая постоянная $\varkappa$, что для любого $t \ge 0$ и любой функции $v(t) \in W_2^1(R_+, A)$ справедливо неравенство*

$$\|v(t)\|_{\mathcal{F}_1} \le \varkappa \|v(\cdot)\|_{W_2^1(R_+, A)}.$$

Следствие. Если $v(t) \in W_2^l(R_+, A^l)$, то $v^{(j)}(t) \in C(R_+, \mathcal{F}_{l-j})$, $j = 0, \ldots, l-1$, и существует такая постоянная $\varkappa$, что для любого $t \ge 0$ справедливы неравенства

$$\|v^{(j)}(t)\|_{\mathcal{F}_{l-j}} \le \varkappa \|v(\cdot)\|_{W_2^l(R_+, A^l)}.$$

Действительно, для любого $j = 0, \ldots, l-1$ справедливо включение $A^{l-j-1} v^{(j)}(t) \in W_2^1(R_+, A)$. Далее достаточно применить теорему к функции $A^{l-j-1} v^{(j)}(t)$ и воспользоваться равенством $Ae^{-tA}u = e^{-tA}Au$, $t > 0$, справедливым для любого $u \in D(A)$ ([3], [4]).

Согласно теореме вложения и ее следствию решение задачи (1), (2) и его производные $u^{(k)}(t)$ порядков $k = \overline{0, l-1}$ имеют следы при $t \to +0$ и $t \to -h+0$ из пространств $\mathcal{F}_{l-k}$ соответственно и являются непрерывными функциями со значениями в пространствах $\mathcal{F}_{l-k}$, поэтому для существования решения задачи (1), (2) необходимо выполнение следующих условий согласования:

$$\Big\|[\varphi_0^{(k+1)}(-0)+A\varphi_0^{(k)}(-0)]+\sum_{j=1}^{n}(B_jA\varphi_0^{(k)}(-h_j+0)+D_j\varphi_0^{(k+1)}(-h_j+0))-$$

$$-f^{(k)}(+0)\Big\|_{\mathcal{F}_{l-k-1}}=0,\quad k=\overline{0,l-2}.\quad (3)$$

Подробнее об условиях согласования для классических решений уравнений вида (1) в конечномерном пространстве см. в [2].

Известно ([4], [16]), что если $-A$ есть генератор ограниченной голоморфной полугруппы $T(t)=e^{-At}$, $t>0$, в пространстве $\mathcal{H}$, то существует такая постоянная $K>0$, что при любом $\gamma>0$ справедливы неравенства

$$\|\lambda R(\lambda,-A_\gamma)\|<K,\quad \|A_\gamma R(\lambda,-A_\gamma)\|<K,\quad \operatorname{Re}\lambda\geq 0,\quad (4)$$

где $R(\lambda,-A_\gamma)=-(A+\gamma I+\lambda I)^{-1}$ — резольвента оператора $-A_\gamma=-A-\gamma I$.

Введем функцию $\nu(\gamma)=K\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}e^{-\gamma h_j}[\overline{b}_j+\overline{d}_j]\Big)$, где $\overline{b}_j=\max\{b_j,b_j^l\}$, $\overline{d}_j=\max\{d_j,d_j^l\}$. Обозначим $\Delta=\{\gamma\in R_+:\nu(\gamma)<1\}$. Множество Δ представляет собой полуось $(\gamma^*,+\infty)$, причем величина γ^* допускает оценку

$$\gamma^*\leq\max\Big\{\frac{1}{h_1}\ln\Big(\sum_{j=1}^{n}(\overline{b}_j+\overline{d}_j)\Big),\ 0\Big\}.$$

Основным результатом предлагаемой работы является

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* I). *Тогда для любого $\gamma\in\Delta$ и любых функций $\varphi_0(t)\in W_2^l((-h,0),A^l)$ и $f(t)\in W_{2,\gamma}^{l-1}(R_+,A^{l-1})$, удовлетворяющих условиям согласования* (3), *задача* (1), (2) *имеет единственное решение $u(t)\in W_{2,\gamma}^l((-h,+\infty),A^l)$, допускающее оценку*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^l((-h,+\infty),A^l)}\leq d[\|f\|^2_{W_{2,\gamma}^{l-1}(R_+,A^{l-1})}+\|\varphi_0\|^2_{W_2^l((-h,0),A^l)}]^{1/2}$$

с постоянной d, не зависящей от функций $f(t)$ и $\varphi_0(t)$.

Заметим, что в случае $l=1$, исследованном в [13], условие согласования (3) и условие I) на коэффициенты уравнения не накладывались.

2. Доказательство основных результатов

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, напомним основные свойства генератора ограниченной голоморфной полугруппы. Затем приведем две вспомогательные леммы и укажем, каким образом задача (1), (2) может быть сведена к эквивалентной ей в смысле разрешимости задаче (5), (6), указанной ниже. При этом для доказательства разрешимости важную роль будет играть оператор внутренней суперпозиции в пространствах гладких функций (подробнее об операторе внутренней суперпозиции см. [1], гл. 1).

Напомним, что $A_\gamma=A+\gamma I$ и $R(\lambda,-A_\gamma)=-(A_\gamma+\lambda I)^{-1}$.

Известно ([4], [16]), что если $-A$ есть генератор ограниченной голоморфной полугруппы $T(t)=e^{-At}$ с углом $|\arg t|<\theta<\frac{\pi}{2}$ в пространстве $\mathcal{H}$, то оператор A имеет в пространстве $\mathcal{H}$ плотную область определения и выполнено

Условие II). Для любого $\varepsilon\in(0,\theta)$ существует такая постоянная $c>0$, что при всех λ, $|\arg\lambda|\leq\theta+\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, справедливо неравенство

$$\|R(\lambda,-A)\|\leq\frac{c}{1+|\lambda|}.$$

Лемма 1. *Функция* $x(t)$ *принадлежит пространству* $W_2^l((a,b),A^l)$, $l=1,2,\ldots$, *тогда и только тогда, когда существует такая функция* $z(t)\in W_2^{l-1}((a,b),A^{l-1})$, *что справедливо представление*

$$x(t)=e^{-A(t-a)}x(a)+\int_a^t e^{-A(t-s)}z(s)ds,\quad t\in[a,b],$$

при этом выполнено неравенство

$$\|x\|_{W_2^l((a,b),A^l)}\le\|x(a)\|_{\mathcal{F}_l}+\|z\|_{W_2^{l-1}((a,b),A^{l-1})}.$$

Доказательство леммы 1 может быть получено на основании результатов работы ([16], гл. I). Далее, используя лемму 1 (см. также [3]), можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть функции* $g_1(t)$ *и* $g_2(t)$ *удовлетворяют условиям* $g_1(t)\in W_2^n((a,b),A^n)$, $g_2(t)\in W_2^n((b,c),A^n)$, $a<b<c$; $g_1^{(j)}(b-0)=g_2^{(j)}(b+0)$ *в смысле сходимости в пространстве* $\mathcal{F}_{n-j}$ *при* $j=\overline{0,n-1}$. *Тогда функция* $G(t)$, $t\in(a,c)$, *такая, что* $G(t)=g_1(t)$, $t\in(a,b)$, $G(t)=g_2(t)$, $t\in(b,c)$, *принадлежит пространству* $W_2^n((a,c),A^n)$, *причем*

$$\|G\|_{W_2^n((a,c),A^n)}=[\|g_1\|^2_{W_2^n((a,b),A^n)}+\|g_2\|^2_{W_2^n((b,c),A^n)}]^{1/2}.$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде $u(t)=g(t)+v(t)$, где функция $g(t)=\varphi_0(t)$, $t\in[-h,0)$, а $v(t)=0$, $t\in[-h,0]$.

Покажем, что существует функция $\varphi_1(t)\in W_2^l((0,h),A^l)$, для которой выполнены соотношения $\varphi_1^{(j)}(+0)=\varphi_0^{(j)}(-0)$, $\varphi_1^{(j)}(h-0)=0$ в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{F}_{l-j}$, $j=\overline{0,l-1}$, и справедлива оценка $\|\varphi_1\|_{W_2^l((0,h),A^l)}\le c_1\|\varphi_0\|_{W_2^l((-h,0),A^l)}$ с постоянной c_1, не зависящей от функции $\varphi_0(t)$. Будем искать функцию $\varphi_1(t)$ в виде $P_{l-1}(t)q(t)$, где $q(t)\in C^\infty(R)$ и $q(t)\equiv1$ в некоторой окрестности точки $t=0$ с носителем, лежащим на отрезке $[-h,h]$, а $P_{l-1}(t)$ — многочлен вида $\sum\limits_{k=0}^{l-1}\varphi_0^{(k)}(-0)t^k/k!$.

Определим функцию $g(t)$ следующим образом: $g(t)=\varphi_0(t)$, $t\in(-h,0]$, $g(t)=\varphi_1(t)$, $t\in(0,h)$, $g(t)=0$, $t\ge h$. Согласно лемме 2 $g(t)$ принадлежит $W_{2,\gamma}^l((-h,+\infty),A^l)$ при любом $\gamma\in R$ и удовлетворяет неравенству $\|g\|_{W_{2,\gamma}^l((-h,+\infty),A^l)}\le c_2\|\varphi_0\|_{W_2^l((-h,0),A^l)}$ с постоянной $c_2(\gamma)$, не зависящей от функции $\varphi_0(t)$. По определению решения $u(t)$ и построению функции $g(t)$ функция $v(t)=u(t)-g(t)$ такова, что $v(t)\in W_{2,\gamma}^l((-h,+\infty),A^l)$, $v(t)=0$ при $t\in(-h,0]$ и удовлетворяет соотношению $\mathcal{A}v(t)=f(t)-\mathcal{A}g(t)=F(t)$, $t\in R_+$, где

$$F(t)=f(t)-g^{(1)}(t)-Ag(t)-\sum_{j=1}^n(B_jAg(t-h_j)+D_jg^{(1)}(t-h_j)).$$

Обозначим через $y(t)$ сужение функции $v(t)$ на полуось R_+. Тогда полученное соотношение для функции $v(t)$ равносильно следующей задаче для новой неизвестной функции $y(t)$:

$$y^{(1)}(t)+Ay(t)+\sum_{j=1}^n(B_jS_{h_j}Ay(t)+D_jS_{h_j}y^{(1)}(t))=F(t),\quad t\in R_+,\tag{5}$$

$$y(t)\in\overset{\circ}{W}{}^l_{2,\gamma}(R_+,A^l).\tag{6}$$

Здесь $\overset{\circ}{W}{}^l_{2,\gamma}(R_+,A^l)$ — подпространство функций из $W_{2,\gamma}^l(R_+,A^l)$, удовлетворяющих условиям $\lim\limits_{t\to+0}\|y^{(j)}(t)\|_{\mathcal{F}_{l-j}}=0$, $j=\overline{0,l-1}$. Операторы внутренней суперпозиции S_{h_j} действуют в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^l_{2,\gamma}(R_+,A^l)$ по правилу $(S_{h_j}v)(t)=v(t-h_j)$ при $t\ge h_j$ и $(S_{h_j}v)(t)=0$ при $t<h_j$, $j=\overline{0,n}$. Подробнее об операторах S_{h_j} и целесообразности их введения см. в [1].

При сделанных предположениях из представления функции $F(t)$, построения функции $g(t)$ и условий согласования (3) следует, что функция $F(t) \in \overset{\circ}{W}{}^{l-1}_{2,\gamma}(R_+, A^{l-1})$, причем справедлива оценка

$$\|F(t)\|_{W^{l-1}_{2,\gamma}(R_+,A^{l-1})} \leq \|f(t)\|_{W^{l-1}_{2,\gamma}(R_+,A^{l-1})} + c_3\|\varphi_0(t)\|_{W^l_2((-h,0),A^l)} \tag{7}$$

с постоянной c_3, не зависящей от функции $\varphi_0(t)$. Из включения $y(t) \in \overset{\circ}{W}{}^{l}_{2,\gamma}(R_+, A^l)$ и лемм 1, 2 вытекает, что $(S_{h_j}Ay)(t) \in \overset{\circ}{W}{}^{l-1}_{2,\gamma}(R_+, A^{l-1})$ и $(S_{h_j}y^{(1)})(t) \in \overset{\circ}{W}{}^{l-1}_{2,\gamma}(R_+, A^{l-1})$. Тем самым левая часть уравнения (5) принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^{l-1}_{2,\gamma}(R_+, A^{l-1})$. Поэтому уравнение (5) будем изучать в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{l-1}_{2,\gamma}((-h,+\infty), A^{l-1})$.

Замечание 1. Задачи (1), (2) и (5), (6) эквивалентны в том смысле, что у задачи (5), (6) существует единственное решение $y(t)$ тогда и только тогда, когда задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u(t) = g(t) + v(t)$. При этом в силу построения функции $g(t)$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{W^l_{2,\gamma}((-h,+\infty),A^l)} \leq \|y\|_{W^l_{2,\gamma}(R_+,A^l)} + c_2\|\varphi_0\|_{W^l_2((-h,0),A^l)}.$$

Доказательство теоремы 1 во многом сходно с доказательством теоремы 1 из [14], поэтому лишь кратко наметим его основные этапы.

Будем искать решение задачи (5), (6) в виде $y(t) = e^{\gamma t}w(t)$. Легко видеть, что функция $y(t) \in W^l_{2,\gamma}(R_+, A^l)$ тогда и только тогда, когда $w(t) \in W^l_2(R_+, A^l)$. При этом согласно (5) функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению

$$w^{(1)}(t) + (A + \gamma I)w(t) + \sum_{j=1}^{n} e^{-\gamma h_j}[B_j S_{h_j}(Aw)(t) + D_j S_{h_j}(w^{(1)} + \gamma w)(t)] = e^{-\gamma t}F(t), \quad t \in R_+, \tag{8}$$

а также условию

$$w(t) \in \overset{\circ}{W}{}^{l}_{2}(R_+, A^l). \tag{9}$$

Будем искать решение задачи (8), (9) в виде

$$w(t) = \int_0^t e^{-(A+\gamma I)(t-s)}z(s)ds \tag{10}$$

с новой неизвестной функцией $z(s) \in \overset{\circ}{W}{}^{l-1}_{2}(R_+, A^{l-1})$. Согласно лемме 1 соотношение (10) ставит в соответствие функции $z(s) \in \overset{\circ}{W}{}^{l-1}_{2}(R_+, A^{l-1})$ функцию $w(t) \in \overset{\circ}{W}{}^{l}_{2}(R_+, A^l)$, удовлетворяющую неравенству

$$\|w(t)\|_{W^l_2(R_+,A^l)} \leq c_4\|z\|_{W^{l-1}_2(R_+,A^{l-1})} \tag{11}$$

с постоянной c_4, не зависящей от $z(t)$. Подставляя (10) в (8), получаем, что функция $z(t)$ удовлетворяет уравнению

$$z(t) + (H_\gamma z)(t) + (G_\gamma z)(t) = \Phi_\gamma(t), \quad t \in R_+, \tag{12}$$

где

$$(L_\gamma z)(t) = \int_0^t Ae^{-(A+\gamma I)(t-s)}z(s)ds, \quad (H_\gamma z)(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{-\gamma h_j}B_j S_{h_j}(L_\gamma z)(t),$$

$$(G_\gamma z)(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{-\gamma h_j}D_j S_{h_j}(z(t) - (L_\gamma z)(t)), \quad \Phi_\gamma(t) = e^{-\gamma t}F(t).$$

Замечание 2. В силу соотношений (8)–(11) и леммы 1 уравнение (12) имеет решение $z(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{l-1}(R_+, A^{l-1})$ тогда и только тогда, когда задача (5), (6) имеет решение $y(t) \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\gamma}^{l}(R_+, A^l)$.

Перейдем к изучению разрешимости уравнения (12).

Обозначим нормы операторов, действующих в пространствах $L_2(R_+, \mathcal{H})$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{l-1}(R_+, A^{l-1})$, через $|||\cdot|||$ и $|||\cdot|||_1$ соответственно.

Доказательство разрешимости уравнения (12) опирается на леммы 3–6.

Рассмотрим оператор L_γ, определенный на линейном многообразии

$$M = \{v : v(t) \in D(A),\ t \in R_+,\ v(t) \in L_2(R_+, D(A))\}$$

пространства $L_2(R_+, \mathcal{H})$ соотношением

$$(L_\gamma v)(t) = A\int_0^t e^{-A_\gamma(t-s)}v(s)ds.$$

Лемма 3. *Для любого $\gamma > 0$ определенный на линейном многообразии M оператор L_γ удовлетворяет оценке*

$$\|(L_\gamma v)(t)\|_{L_2(R_+,\mathcal{H})} \le K\|v(t)\|_{L_2(R_+,\mathcal{H})}, \quad v(t) \in M, \tag{13}$$

с постоянной K из неравенств (4). При этом оператор L_γ допускает продолжение по непрерывности на все пространство $L_2(R_+, \mathcal{H})$ с сохранением оценки (13).

Доказательство. Пусть $v(t) \in M$. Тогда согласно [4], [16]

$$A\int_0^t e^{-A_\gamma(t-s)}v(s)ds = \int_0^t Ae^{-A_\gamma(t-s)}v(s)ds \tag{14}$$

и, кроме того, $A_\gamma e^{-A_\gamma t}x = e^{-A_\gamma t}A_\gamma x$ для любого вектора $x \in D(A)$.

Поскольку $v(t) \in M$, то $A_\gamma v(t) \in \mathcal{H}$ при $t > 0$, и функция $A_\gamma v(t) \in L_2(R_+, \mathcal{H})$.

Обозначим через $V(t)$ функцию, равную $v(t)$ при $t \ge 0$ и равную нулю при $t < 0$, а через $\widehat{V}(\mu)$ — преобразование Фурье функции $V(t)$. Тогда получим, что $A_\gamma V(t) \in L_2(R, \mathcal{H})$, причем $\|V(t)\|_{L_2(R,\mathcal{H})} = \|v(t)\|_{L_2(R_+,\mathcal{H})}$.

Положим $K_0(t) = \theta(t)e^{-A_\gamma t}$, где $\theta(t)$ — функция Хевисайда. Принимая во внимание предположения относительно оператора A, согласно [16] получаем

$$\Phi(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(t)e^{-i\mu t}dt = (A_\gamma + i\mu I)^{-1}.$$

Поскольку преобразование Фурье является унитарным оператором в пространстве $L_2(R, \mathcal{H})$, то при $\gamma \ge 0$ справедливы соотношения

$$\|A\int_{-\infty}^t e^{-A_\gamma(t-s)}V(s)ds\|_{L_2(R,\mathcal{H})} = \left\|\int_{-\infty}^t e^{-A_\gamma(t-s)}(AV(s))ds\right\|_{L_2(R,\mathcal{H})} = \|\Phi(\mu)(A\widehat{V}(\mu))\|_{L_2(R,\mathcal{H})}.$$

Из условия (4) заключаем, что при всех $\gamma \ge 0$ и для всех $x \in H$ имеют место неравенства

$$\|A(A_\gamma + i\mu I)^{-1}x\| \le \|A_\gamma(A_\gamma + i\mu I)^{-1}x\|, \quad \mu \in R,$$

откуда получаем цепочку неравенств

$$\left\|A\int_{-\infty}^t e^{-A_\gamma(t-s)}v(s)ds\right\|_{L_2(R_+,\mathcal{H})} \le \|(A_\gamma + i\mu I)^{-1}A_\gamma\widehat{V}(\mu)\|_{L_2(R,\mathcal{H})} \le$$
$$\le K\|\widehat{V}(\mu)\|_{L_2(R,\mathcal{H})} \le K\|V(t)\|_{L_2(R,\mathcal{H})} = K\|v(t)\|_{L_2(R_+,\mathcal{H})}.$$

Неравенство (13) следует из определения пространства $W_{2,\gamma}^1(R_+, A)$ и полученных оценок. Первое утверждение леммы 3 доказано. Второе утверждение вытекает из первого и следующей теоремы.

Теорема 2. *Линейное многообразие M плотно в пространстве $L_2(R_+, \mathcal{H})$.*

Доказательство. Согласно [16] произвольную функцию $v(t) \in L_2(R_+, \mathcal{H})$ можно приблизить последовательностью финитных кусочно-постоянных функций $v_i(t)$, принимающих конечное число значений в $\mathcal{H}$. Так как $D(A)$ плотно в $\mathcal{H}$, то каждую функцию $v_i(t)$ можно приблизить последовательностью финитных кусочно-постоянных функций $v_{i,k}(t)$, принимающих конечное число значений в $D(A)$. $\square$

Далее продолжение по непрерывности оператора L_γ на пространство $L_2(R_+, \mathcal{H})$ будем обозначать через L_γ.

Лемма 4. *Нормы операторов L_γ и $I - L_\gamma$ допускают оценки*

$$|||L_\gamma|||_1 \leq K, \quad |||I - L_\gamma|||_1 \leq K.$$

Доказательство леммы 4 проводится по аналогии с доказательством леммы 4 из [14] с помощью результата леммы 3 и соотношения (14).

Лемма 5. *Пусть операторы B_j и D_j, $j = \overline{1,n}$, удовлетворяют условию* I). *Тогда при $\gamma > 0$ имеют место следующие оценки*:

$$|||H_\gamma|||_1 \leq \sum_{j=1}^{n} e^{-\gamma h_j} \overline{b}_j \rho(\gamma), \quad |||G_\gamma|||_1 \leq \sum_{j=1}^{n} e^{-\gamma h_j} \overline{d}_j \rho(\gamma).$$

Доказательство леммы 5 без каких-либо изменений повторяет рассуждения, приведенные в работе [14].

Лемма 6. *Пусть $\gamma \in \Delta$. Тогда для любого $\Phi(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{l-1}(R_+, A^{l-1})$ существует единственная функция $z(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{l-1}(R_+, A^{l-1})$, удовлетворяющая уравнению* (12), *причем для указанной функции $z(t)$ справедлива оценка*

$$\|z(t)\|_{W_2^{l-1}(R_+, A^{l-1})} \leq c \|\Phi(t)\|_{W_2^{l-1}(R_+, A^{l-1})}$$

с постоянной c, не зависящей от выбора функции $\Phi(t)$.

Доказательство леммы 6 проведено в [14] для случая самосопряженного оператора A. В рассматриваемом случае доказательство проводится аналогично.

Следовательно, в силу замечаний 1 и 2 получаем корректную разрешимость задачи (5), (6) и задачи (1), (2). Согласно замечанию 1, неравенству (11) и лемме 6 для решения $u(t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка теоремы 1. Теорема 1 доказана.

3. Замечания и комментарии

Замечание 3. Пример 2 из [7] содержит уравнение вида (1) нейтрального типа, для которого ограничение на параметр γ_1^* является неулучшаемым (при $l = 1$).

Замечание 4. Пример, показывающий существенность условия I), приведен в [14].

Замечание 5. В [5]–[7], [13] задача (1), (2) и ее обобщения на случай переменных коэффициентов и переменного запаздывания изучались в пространстве $W_{2,\gamma}^1(R_+, A)$. Уместно заметить, что при этом нет необходимости требовать выполнения условия I) и условий согласования (3). Тем самым случай $l = 1$ реализуется при наименьших ограничениях на коэффициенты уравнения (1), функцию $f(t)$ и начальную функцию $\varphi_0(t)$.

В [14], [15] рассматривалась задача, аналогичная (1), (2), с самосопряженным оператором A, для которой установлена ее корректная разрешимость в пространстве $W_{2,\gamma}^l([-h, +\infty), A^l)$.

Замечание 6. Некоторые примеры начально-краевых задач для уравнений в частных производных с запаздыванием по временной переменной, которые могут быть сведены к задаче вида (1), (2), указаны в [3], [10], [17].

Близкие результаты о разрешимости функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева получены в [3], [8]–[11]. Одним из существенных отличий от указанных работ является то, что нами рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения нейтрального типа $D_j \neq 0$ в случае неограниченных коэффициентов $B_j A$ при членах с запаздыванием. В [8]–[10] рассмотрены уравнения при несколько более жестких ограничениях на коэффициенты при запаздывающих членах.

В [3] установлены достаточные условия существования и единственности решения задачи (1), (2) в пространстве $W_2^2([0,T], A^2)$ в случае, когда оператор A является генератором ограниченной голоморфной полугруппы. Однако в [3] рассматривается уравнение только запаздывающего типа ($D_j = 0$) с одним запаздыванием на отрезке $[0,T]$, $T > 0$.

Отметим, что в [14] приведена теорема 2, аналогичная теореме 1, для случая конечномерного пространства. При этом нет необходимости накладывать условие I) и ограничения на оператор A. Для уравнений более общего вида в конечномерном пространстве, но на конечном промежутке $[0,T]$, в [11] установлен близкий результат.

Наконец, в работах [3], [8]–[11], [17] разрешимость изучается на произвольном отрезке $[0,T]$, $T > 0$, и отсутствуют оценки роста решений при $t \to +\infty$, а в данной работе указана экспоненциальная оценка сверху скорости роста решения и его производных.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.
3. Di Blasio G., Kunish K., Sinestrary E. *L^2-regularity for parabolic integrodifferential equations with delay in the highest order derivatives* // J. Math. Anal. Appl.– 1984. – V. 102. – P. 38–57.
4. Sinestrari E. *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous function* // J.Math. Anal. and Appl. – 1985. – V. 107. – P. 16–66.
5. Власов В.В. *Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в гильбертовом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 22–35.
6. Власов В.В. *О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 8. – С. 67–92.
7. Власов В.В. *Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в гильбертовом пространстве* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – № 5. – С. 782–786.
8. Staffans O. *Some well-posed functional equations which generate semigroups* // J. Diff. Equations. – 1985. – V. 58. – № 2. – P. 157-191.
9. Datko R. *Representation of solutions and stability of linear differential-difference equations in a Banach space* // J. Diff. Equations. – 1978. – V. 29. – № 1. – P. 105–166.
10. Wu J. *Semigroup and integral form of class of partial differential equations with infinite delay* // Diff. and Integral Equations. – 1991. – V. 4. – № 6. – P. 1325–1351.
11. Kunish K., Kappel F. *Invariance result for delay and Volterra equations in fractional order Sobolev spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – V. 304. – № 1. – P. 1–51.
12. Власов В.В. *О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева* // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 109–121.
13. Власов В.В., Сакбаев В.Ж. *О корректной разрешимости одного класса некоторых функционально-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в гильбертовом пространстве* // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики: Междувед. сб. – М., 1998. – С. 38–51.

14. Власов В.В., Сакбаев В.Ж. *О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 9. – С. 1194–1202.
15. Власов В.В., Сакбаев В.Ж. *О корректной разрешимости некоторых дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68. – № 6. – С. 939–942.
16. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 371 с.
17. Wu J. *Theory and applications of partial functional differential equations.* – Springer-Verlag. Appl. Mathem. Sci. – V. 119. – 429 p.

Московский государственный университет
Московский физико-технический институт

Поступила
09.04.2002