Известия вузов. Математика
2015, №4, с. 3–16

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Ю.М. ДЮКАРЕВ

КРИТЕРИЙ ВПОЛНЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ СТИЛТЬЕСОВСКОГО ТИПА В ТЕРМИНАХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Аннотация. Основной целью данной статьи является изучение упорядоченных последовательностей обобщенных интерполяционных задач и предельной интерполяционной задачи в классе Стилтьеса с использованием ортонормированных матриц-функций. Получены явные формулы для ортонормированных матриц-функций. Основным результатом статьи является критерий вполне неопределенности предельной интерполяционной задачи в классе Стилтьеса. Общие построения проиллюстрированы на примерах проблемы моментов Стилтьеса и задачи Неванлинны–Пика в классе Стилтьеса.

Ключевые слова: интерполяционные задачи, стилтьесовские функции, критерий неопределенности, ортонормированные матрицы-функции.

УДК: 517.518

1. Введение

Критерии неопределенности интерполяционных задач с бесконечным числом узлов интерполяции в терминах параметров Стилтьеса, ортонормированных многочленов, параметров Шура, вложенных кругов Вейля и других характеристик усеченных задач были получены в статьях [1]–[7]. Эти исследования были продолжены и обобщены в разных направлениях в работах многих авторов. Отметим важный для нас цикл статей [8]–[11], выполненных в рамках подхода В.П. Потапова к решению интерполяционных задач для неванлинновских матриц-функций (МФ). Для стилтьесовских МФ аналогичные результаты были получены в [12]–[15].

В этой статье проведено дальнейшее исследование упорядоченных последовательностей обобщенных интерполяционных задач и предельных интерполяционных задач для стилтьесовских МФ [14], [15]. Показано, что с упорядоченной последовательностью обобщенных интерполяционных задач для стилтьесовских МФ связаны две последовательности МФ, ортонормированных относительно неотрицательных матричных мер на положительной полуоси. В зависимости от структуры усеченных задач ортонормированные МФ могут быть целыми или мероморфными МФ и являются обобщениями ортонормированных многочленов и рациональных функций. В терминах сходимости двух рядов из ортонормированных МФ получен критерий вполне неопределенности предельной интерполяционной задачи. Этот результат является аналогом критерия Гамбургера неопределенности проблемы моментов. В качестве примеров получены критерии вполне неопределенности задачи Неванлинны–Пика

Поступила 09.11.2013

для стилтьесовских МФ и матричной проблемы моментов Стилтьеса. Отметим, что приведенный в примере 2 критерий вполне неопределенности матричной проблемы моментов Стилтьеса является новым даже для классической проблемы моментов Стилтьеса.

2. Основные определения и обозначения

Введем основные определения и сформулируем без доказательства необходимые для дальнейшего сведения о предельной интерполяционной задаче (подробное изложение и доказательства — в [14]). Будем ставить и решать задачи на языке аналитических оператор-функций (ОФ). Пусть $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathbb{C}_\pm = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$. Через $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ обозначены сепарабельные и через $\mathcal{H}$ — конечномерное гильбертовы пространства, $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2\}$ обозначает множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathcal{G}_1$ в $\mathcal{G}_2$, $\{\mathcal{G}_1\}$ — множество $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1\}$, а $\{\mathcal{G}_1\}_H$ обозначает множество ограниченных эрмитовых операторов в $\mathcal{G}_1$. Оператор $A \in \{\mathcal{G}_1\}_H$ называется неотрицательным, если $(f, Af) \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{G}_1$. Множество неотрицательных операторов в $\mathcal{G}_1$ обозначим через $\{\mathcal{G}_1\}_\geq$. Неотрицательный оператор $A \in \{\mathcal{G}_1\}_\geq$ называется положительным, если он обратим и $A^{-1} \in \{\mathcal{G}_1\}$. Множество положительных операторов в $\mathcal{G}_1$ обозначим через $\{\mathcal{G}_1\}_>$. Пусть операторы $A, B \in \{\mathcal{G}_1\}_H$. Неравенство $A \geq B$ (соответственно $A > B$) означает, что $A - B \in \{\mathcal{G}_1\}_\geq$ (соответственно $A - B \in \{\mathcal{G}_1\}_>$). Тождественный и нулевой операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{G}_1$, обозначим через $I_{\mathcal{G}_1}$ и $O_{\mathcal{G}_1}$. Нулевой оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathcal{G}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{G}_2$, обозначим через $O_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}$. Часто будем опускать нижние индексы у нулевого и тождественного операторов, если из контекста ясно, о каких пространствах идет речь. Если $f(z)$ обозначает некоторую ОФ, то запись $f^*(z)$ будет сокращением для записи $(f(z))^*$.

Пусть заданы операторы $K_1 \in \{\mathcal{G}_1\}_\geq$, $K_2 \in \{\mathcal{G}_2\}_\geq$, $L_1, L_2 \in \{\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1\}$, $v_1 \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_1\}$, $u_2 \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_2\}$, и пусть эти операторы удовлетворяют *основному тождеству* (ОТ)

$$K_1 L_1 - L_2 K_2 = -v_1 u_2^*. \tag{1}$$

Рассмотрим операторы

$$T_1 = L_2 L_1^*, \quad T_2 = L_1^* L_2, \quad u_1 = L_2 u_2, \quad v_2 = L_1^* v_1. \tag{2}$$

Пусть операторы T_r таковы, что ОФ $R_{T_r}(z) = (I_{\mathcal{G}_r} - zT_r)^{-1}$, $r = 1, 2$, мероморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Множество особых точек ОФ R_{T_1} и R_{T_2} в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ обозначим символом $\mathcal{Z}$ и пусть $\overline{\mathcal{Z}} = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \mathcal{Z}\}$.

Определение 1. Голоморфная ОФ $s : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \to \{\mathcal{H}\}$ называется *стилтьесовской*, если $\{s(z) - s^*(z)\}/\{z - \overline{z}\} \geq O_\mathcal{H} \quad \forall z \in \mathbb{C}_\pm$ и $s(x) \geq O_\mathcal{H} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-$.

Класс всех стилтьесовских ОФ обозначим через $\mathcal{S}$.

Определение 2. Упорядоченный набор операторов

$$\mathcal{P} = \big\{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\big\}, \tag{3}$$

удовлетворяющих ОТ (1) и всем сформулированным выше условиям, называется обобщенной интерполяционной задачей стилтьесовского типа, а пространства $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}$ называются масштабными пространствами. При этом ОФ $s \in \mathcal{S}$ называется решением обобщенной интерполяционной задачи (3), если она удовлетворяет следующей системе основных матричных неравенств (ОМН) В.П. Потапова ($r = 1, 2$, $z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \mathcal{Z}$):

$$\begin{pmatrix} K_r & R_{T_r}(z)\,\{\, v_r z^{r-1} s(z) - u_r \,\} \\ \{\, v_r z^{r-1} s(z) - u_r \,\}^* R_{T_r}^*(z) & \{z^{r-1} s(z) - \overline{z}^{r-1} s^*(z)\}/\{z - \overline{z}\} \end{pmatrix} \geq \; O_{\mathcal{G}_r \oplus \mathcal{H}}. \tag{4}$$

Множество всех решений обобщенной интерполяционной задачи (3) обозначим через $\mathcal{F}$.

Определение 3. Обобщенная интерполяционная задача (3) называется вполне неопределенной, если

$$\begin{gathered} K_1 \in \{\mathcal{G}_1\}_>, \quad K_2 \in \{\mathcal{G}_2\}_>, \quad v_r h = 0 \in \mathcal{G}_r \quad \forall h \in \mathcal{H} \Leftrightarrow h = 0 \in \mathcal{H}, \\ u_r h = 0 \in \mathcal{G}_r \quad \forall h \in \mathcal{H} \Leftrightarrow h = 0 \in \mathcal{H}, \quad r = 1, 2. \end{gathered} \tag{5}$$

В этой статье будем рассматривать только вполне неопределенные обобщенные интерполяционные задачи. Во вполне неопределенном случае определены корректно ОФ

$$s_F(z) = u_2^*(K_2 - zL_1^* K_1 L_1)^{-1} u_2, \quad s_K(z) = \{v_1^*(L_2 K_2 L_2^* - z^{-1} K_1)^{-1} v_1\}^{-1},$$

которые являются решениями обобщенной интерполяционной задачи и называются решениями Фридрихса и Крейна задачи (3). Для всех $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}$ имеет место формула

$$\{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1} = -x v_1^* R_{T_1}^*(x) K_1^{-1} R_{T_1}(x) v_1 + x^2 v_2^* R_{T_2}^*(x) K_2^{-1} R_{T_2}(x) v_2. \tag{6}$$

Отсюда следуют неравенства $s_F(x) < s_K(x), \quad x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}$.

Пусть $A, B \in \{\mathcal{H}\}_>$ и выполнено условие $A \leq B$. Операторным интервалом называется $[A, B] = \{\varkappa \in \{\mathcal{H}\}_> : A \leq \varkappa \leq B\}$. Интервал $[A, B]$ называется невырожденным, если $A < B$.

Определение 4. Невырожденный операторный интервал

$$\mathcal{I}(x) = [s_F(x),\ s_K(x)], \quad x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z},$$

называется интервалом Вейля в точке x.

Можно доказать, что $\mathcal{I}(x) = \{s(x) : s \in \mathcal{F}\}$, $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}$.

Пусть даны две бесконечные последовательности гильбертовых пространств

$$(\mathfrak{h}_r^{(j)})_{j=1}^{\infty}, \quad r = 1, 2.$$

Рассмотрим ортогональные суммы этих пространств

$$\mathcal{G}_r^{(l)} = \mathfrak{h}_r^{(1)} \oplus \mathfrak{h}_r^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_r^{(l)}, \quad r = 1, 2.$$

При $l > k$ каждое из пространств $\mathcal{G}_r^{(k)}$ можно рассматривать и как подпространство в любом пространстве $\mathcal{G}_r^{(l)}$. Часто будем отождествлять векторы $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ из $\mathcal{G}_r^{(l)}$ с векторами $(x_1, \ldots, x_k)$ из $\mathcal{G}_r^{(k)}$. Пусть оператор $A \in \{\mathcal{G}_r^{(l)}\}$. Сужение оператора A на подпространство $\mathcal{G}_r^{(k)}$ обозначим через $A|_{\mathcal{G}_r^{(k)}}$. Пусть $P_r^{(l,k)}$ обозначает оператор ортогонального проектирования пространства $\mathcal{G}_r^{(l)}$ на подпространство $\mathcal{G}_r^{(k)}$. Оператор $P_r^{(l,k)} A|_{\mathcal{G}_r^{(k)}}$ в подпространстве $\mathcal{G}_r^{(k)} \subset \mathcal{G}_r^{(l)}$ часто будем рассматривать как оператор в пространстве $\mathcal{G}_r^{(k)}$.

Пусть теперь для всех $l \geq 1$ определены обобщенные вполне неопределенные интерполяционные задачи

$$\mathcal{P}^{(l)} = \big\{K_1^{(l)}, L_1^{(l)}, v_1^{(l)}, K_2^{(l)}, L_2^{(l)}, u_2^{(l)}\big\} \tag{7}$$

с масштабными пространствами $\mathcal{G}_1^{(l)}$, $\mathcal{G}_2^{(l)}$, $\mathcal{H}$.

Пусть $1 \leq k < l$. Рассмотрим ортогональное разложение масштабных пространств интерполяционной задачи (7)

$$\mathcal{G}_r^{(l)} = \mathcal{G}_r^{(k)} \oplus \big(\mathcal{G}_r^{(l)} \ominus \mathcal{G}_r^{(k)}\big). \tag{8}$$

Определение 5. Пусть дана последовательность интерполяционных задач (7) и для любых k, l $(1 \le k < l)$ матричные представления операторов интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ построены по разложению (8)

$$\begin{gathered} K_1^{(l)} = \begin{pmatrix} \widetilde{K}_1^{(k)} & B_1^{(l,k)} \\ B_1^{(l,k)*} & C_1^{(l,k)} \end{pmatrix}, \quad L_1^{(l)} = \begin{pmatrix} \widetilde{L}_1^{(k)} & D_1^{(l,k)} \\ O_{\mathcal{G}_2^{(k)}\mathcal{G}_1^{(l)}\ominus\mathcal{G}_1^{(k)}} & \widehat{L}_1^{(l,k)} \end{pmatrix}, \quad v_1^{(l)} = \begin{pmatrix} \widetilde{v}_1^{(k)} \\ \check{v}_1^{(l,k)} \end{pmatrix}, \\ K_2^{(l)} = \begin{pmatrix} \widetilde{K}_2^{(k)} & B_2^{(l,k)} \\ B_2^{(l,k)*} & C_2^{(l,k)} \end{pmatrix}, \quad L_2^{(l)} = \begin{pmatrix} \widetilde{L}_2^{(k)} & O_{\mathcal{G}_2^{(l)}\ominus\mathcal{G}_2^{(k)}\mathcal{G}_1^{(k)}} \\ E_2^{(l,k)} & \widehat{L}_2^{(l,k)} \end{pmatrix}, \quad u_2^{(l)} = \begin{pmatrix} \widetilde{u}_2^{(k)} \\ \check{u}_2^{(l,k)} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{9}$$

Последовательность интерполяционных задач (7) называется упорядоченной, если операторы $\widetilde{K}_1^{(k)}$, $\widetilde{L}_1^{(k)}$, $\widetilde{v}_1^{(k)}$, $\widetilde{K}_2^{(k)}$, $\widetilde{L}_2^{(k)}$, $\widetilde{u}_2^{(k)}$, рассматриваемые как операторы в пространствах $\mathcal{G}_1^{(k)}$, $\mathcal{G}_2^{(k)}$, $\mathcal{H}$, совпадают с операторами $K_1^{(k)}$, $L_1^{(k)}$, $v_1^{(k)}$, $K_2^{(k)}$, $L_2^{(k)}$, $u_2^{(k)}$ интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(k)}$.

Для упрощения записи в формулах (9) будем обозначать $\widetilde{K}_1^{(k)}$ через $K_1^{(k)}$ и т. д. Упорядоченную последовательность интерполяционных задач обозначим через $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$. В этом контексте обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ называются *усеченными интерполяционными задачами.* Введем верхний индекс (l) в обозначения объектов, связанных с усеченной задачей $\mathcal{P}^{(l)}$.

Пусть через $\mathcal{F}^{(l)}$ обозначено множество всех решений усеченной интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ и через $\mathcal{I}^{(l)}(x)$ обозначены соответствующие интервалы Вейля. Тогда для всех $k < l$ имеют место включения $\mathcal{F}^{(l)} \subset \mathcal{F}^{(k)}$ и $\mathcal{I}^{(l)}(x) \subset \mathcal{I}^{(k)}(x)$.

Определение 6. Пусть дана упорядоченная последовательность интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ и пусть $\mathcal{F}^{(l)}$ обозначает множество всех решений интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$. ОФ $s \in \mathcal{S}$ называется решением предельной интерполяционной задачи, если $s \in \mathcal{F}^{(l)} \ \ \forall l \in \mathbb{N}$.

В обозначения объектов, связанных с предельной интерполяционной задачей, будем вводить верхний индекс (∞). Множество решений предельной интерполяционной задачи обозначим через $\mathcal{F}^{(\infty)}$, а саму предельную интерполяционную задачу — через $\mathcal{P}^{(\infty)}$.

Пусть $l \in \mathbb{N}$. Напомним, что множество особых точек мероморфных ОФ $R_{T_1^{(l)}}$ и $R_{T_2^{(l)}}$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ обозначено символом $\mathcal{Z}^{(l)}$. Пусть $\mathcal{Z}^{(\infty)} = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}^{(l)}$. Будем интересоваться случаем, когда предельная интерполяционная задача имеет бесконечно много решений. Для этого необходимо, чтобы все предельные точки $\mathcal{Z}^{(\infty)}$ принадлежали множеству $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. В дальнейшем будем считать это условие выполненным.

Пусть задана упорядоченная последовательность обобщенных интерполяционных задач стилтьесовского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ и пусть $\mathcal{F}^{(l)}$ обозначает множество решений задачи $\mathcal{P}^{(l)}$, а $\mathcal{F}^{(\infty)}$ — множество решений предельной интерполяционной задачи, и пусть $s_F^{(l)}$ и $s_K^{(l)}$ являются решениями Фридрихса и Крейна задачи $\mathcal{P}^{(l)}$. Тогда существуют равномерные на компактах $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ пределы

$$s_K^{(\infty)}(z) = \lim_{l\to\infty} s_K^{(l)}(z) \in \mathcal{F}^{(\infty)}, \quad s_F^{(\infty)}(z) = \lim_{l\to\infty} s_F^{(l)}(z) \in \mathcal{F}^{(\infty)}.$$

Более того, для всех $s \in \mathcal{F}^{(\infty)}$ выполняются неравенства

$$O_{\mathcal{H}} < s_F^{(\infty)}(x) \le s(x) \le s_K^{(\infty)}(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}_-.$$

Отсюда следует, в частности, $\mathcal{F}^{(\infty)} \neq \emptyset$.

Определение 7. Операторный интервал

$$\mathcal{I}^{(\infty)}(x) = \left[s_F^{(\infty)}(x), s_K^{(\infty)}(x)\right], \quad x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)},$$

называется предельным интервалом Вейля в точке $x \in \mathbb{R}_-$.

Можно доказать, что $\mathcal{I}^{(\infty)}(x) = \{s(x) : s \in \mathcal{F}^{(\infty)}\}$, $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$.

Пусть дана упорядоченная последовательность обобщенных интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ и пусть $s_K^{(\infty)}$, $s_F^{(\infty)}$ обозначают решения Крейна и Фридрихса предельной интерполяционной задачи. Тогда для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$ имеет место равенство

$$\operatorname{rank}\{s_K^{(\infty)}(x_1) - s_F^{(\infty)}(x_1)\} = \operatorname{rank}\{s_K^{(\infty)}(x_2) - s_F^{(\infty)}(x_2)\}, \tag{10}$$

т. е. ранги предельных интервалов Вейля $\mathcal{I}^{(\infty)}(x)$ не зависят от выбора точки $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$.

Определение 8. Предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ называется вполне неопределенной, если все предельные интервалы Вейля

$$\mathcal{I}^{(\infty)}(x) = [s_F^{(\infty)}(x), s_K^{(\infty)}(x)] \ \ \forall x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$$

являются невырожденными операторными интервалами.

Другими словами, задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ называется вполне неопределенной, если

$$s_K^{(\infty)}(x) - s_F^{(\infty)}(x) > O \ \ \forall x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}.$$

3. Обобщенные ортонормированные оператор-функции

Рассмотрим упорядоченное семейство обобщенных интерполяционных задач стилтьесовского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$. Пусть в представлении масштабных пространств (см. (8)) $k = l - 1$

$$\mathcal{G}_r^{(l)} = \mathcal{G}_r^{(l-1)} \oplus \mathfrak{h}_r^{(l)}, \quad l \geq 2, \quad r = 1, 2.$$

Введем упрощенные обозначения

$$K_r^{(l)} = \begin{pmatrix} K_r^{(l-1)} & B_r^{(l)} \\ B_r^{(l)^*} & C_r^{(l)} \end{pmatrix}, \quad v_1^{(l)} = \begin{pmatrix} v_1^{(l-1)} \\ \check{v}_1^{(l)} \end{pmatrix},$$

$$S_r^{(l)} = \begin{cases} C_r^{(l)} - B_r^{(l)^*} K_r^{(l-1)^{-1}} B_r^{(l)}, & l > 1; \\ K_r^{(1)}, & l = 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что выполнены равенства

$$K_r^{(l)} = \begin{pmatrix} I & O \\ B_r^{(l)^*} K_r^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_r^{(l-1)} & O \\ O & S_r^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K_r^{(l-1)^{-1}} B_r^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$K_r^{(l)^{-1}} = \begin{pmatrix} K_r^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_r^{(l-1)^{-1}} B_r^{(l)} \\ I \end{pmatrix} S_r^{(l)^{-1}} (-B_r^{(l)^*} K_r^{(l-1)^{-1}} \ \ I). \tag{11}$$

Пусть операторы $V_r^{(l)} : \mathcal{G}_r^{(l)} = \mathcal{G}_r^{(l-1)} \oplus \mathfrak{h}_r^{(l)} \to \mathfrak{h}_r^{(l)}$ в естественных матричных представлениях задаются формулами

$$V_r^{(l)} = (O_{\mathcal{G}_r^{(l-1)}\ \mathfrak{h}_r^{(l)}} \ \ I_{\mathfrak{h}_r^{(l)}}), \quad r = 1, 2. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует

$$S_r^{(l)} V_r^{(l)} K_r^{(l)^{-1}} = (-B_r^{(l)^*} K_r^{(l-1)^{-1}} \ \ I). \tag{13}$$

С упорядоченной последовательностью $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ обобщенных интерполяционных задач свяжем две последовательности ОФ

$$P_r^{(l)}(z) = S_r^{(l)^{1/2}} V_r^{(l)} K_r^{(l)^{-1}} R_{T_r^{(l)}}(z) v_r^{(l)}, \quad l \geq 1, \quad r = 1,2. \tag{14}$$

Будем считать, что для всех усеченных задач $\mathcal{P}^{(l)}$ выполнены условия хотя бы одной из теорем 4.5, 4.6 или 4.7 из [16] (аналогичные результаты имеются в [17]). Тогда справедливы интегральные представления

$$K_r^{(l)} = \int_0^\infty R_{T_r^{(l)}}(t) v_r^{(l)} t^{r-1} \sigma^{(l)}(dt) v_r^{(l)^*} R^*_{T_r^{(l)}}(t) + W_r^{(l)} + (r-1) F^{(l)} F^{(l)^*}, \quad r = 1,2. \tag{15}$$

Здесь $W_r^{(l)} \in \{\mathcal{G}_r^{(l)}\}_{\geq}$, $F^{(l)} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_r^{(l)}\}$ и $\sigma^{(l)}$ — неотрицательная операторная мера на борелевских подмножествах $\mathbb{R}_+$.

Теорема 1. *Пусть дана упорядоченная последовательность обобщенных вполне неопределенных интерполяционных задач стилтьесовского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ и функция $s^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}$ допускает интегральное представление вида*

$$s^{(l)}(z) = \gamma^{(l)} + \int_0^\infty \frac{1}{t-z}\,\sigma^{(l)}(dt).$$

Здесь $\gamma^{(l)} \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$ и $\sigma^{(l)}$ — неотрицательная операторная мера на борелевских подмножествах $\mathbb{R}_+$ со значениями в $\{\mathcal{H}\}_{\geq}$ такая, что сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty (t+1)^{-1}\sigma^{(l)}(dt)$.

Тогда для любого $l \in \mathbb{N}$ существуют операторы $W_r^{(l)} \in \mathcal{G}_r^{(l)}$, $r = 1,2$, $F^{(l)} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_2^{(l)}\}$ такие, что имеют место соотношения обобщенной ортонормированности

$$\int_0^\infty P_r^{(l)}(t) t^{r-1} \sigma^{(l)}(dt) P_r^{(l)^*}(t) + \\ + S_r^{(l)^{1/2}} V_r^{(l)} K_r^{(l)^{-1}} \big(W_r^{(l)} + (r-1) F^{(l)} F^{(l)^*}\big) K_r^{(l)^{-1}} V_r^{(l)^*} S_r^{(l)^{1/2}} = I_{\mathcal{H}}, \tag{16}$$

$$\int_0^\infty P_r^{(k)}(t) t^{r-1} \sigma^{(l)}(dt) P_r^{(l)^*}(t) + \\ + S_r^{(k)^{1/2}} V_r^{(k)} K_r^{(k)^{-1}} X_r^{l,k} \big(W_r^{(l)} + (r-1) F^{(l)} F^{(l)^*}\big) K_r^{(l)^{-1}} V_r^{(l)^*} S_r^{(l)^{1/2}} = O_{\mathcal{H}}, \quad k < l, \tag{17}$$

$$\int_0^\infty P_r^{(k)}(t) t^{r-1} \sigma^{(k)}(dt) P_r^{(l)^*}(t) + \\ + S_r^{(k)^{1/2}} V_r^{(k)} K_r^{(k)^{-1}} \big(W_r^{(k)} + (r-1) F^{(k)} F^{(k)^*}\big) Y_r^{l,k} K_r^{(l)^{-1}} V_r^{(l)^*} S_r^{(l)^{1/2}} = O_{\mathcal{H}}, \quad k > l. \tag{18}$$

Здесь операторы $X_r^{l,k} \in \big\{\mathcal{G}_r^{(l)} = \mathcal{G}_r^{(k)} \oplus \big(\mathcal{G}_r^{(l)} \ominus \mathcal{G}_r^{(k)}\big),\, \mathcal{G}_r^{(k)}\big\}$ задаются с помощью матричных представлений

$$X_r^{l,k} = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{G}_r^{(k)}} & O_{\mathcal{G}_r^{(l)} \ominus \mathcal{G}_r^{(k)},\ \mathcal{G}_r^{(k)}} \end{pmatrix},$$

а операторы $Y_r^{l,k} \in \big\{\mathcal{G}_r^{(k)} = \mathcal{G}_r^{(l)} \oplus \big(\mathcal{G}_r^{(k)} \ominus \mathcal{G}_r^{(l)}\big),\, \mathcal{G}_r^{(l)}\big\}$ задаются с помощью матричных представлений

$$Y_r^{l,k} = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{G}_r^{(l)}} \\ O_{\mathcal{G}_r^{(k)} \ominus \mathcal{G}_r^{(l)},\ \mathcal{G}_r^{(l)}} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^\infty P_r^{(l)}(t)t^{r-1}\sigma(dt)P_r^{(l)^*}(t) + S_r^{(l)^{1/2}}V_r^{(l)}K_r^{(l)^{-1}}\big(W_r^{(l)} + (r-1)F^{(l)}F^{(l)^*}\big)K_r^{(l)^{-1}}V_r^{(l)^*}S_r^{(l)^{1/2}} =$$
$$= S_r^{(l)^{1/2}}V_r^{(l)}K_r^{(l)^{-1}}\left(\int_0^\infty R_{T_r^{(l)}}(t)v_r^{(l)}t^{r-1}\sigma(dt)v_r^{(l)^*}R^*_{T_r^{(l)}}(t) + W_r^{(l)} + (r-1)F^{(l)}F^{(l)^*}\right)\times$$
$$\times K_r^{(l)^{-1}}V_r^{(l)^*}S_r^{(l)^{1/2}} = S_r^{(l)^{1/2}}V_r^{(l)}K_r^{(l)^{-1}}K_r^{(l)}K_r^{(l)^{-1}}V_r^{(l)^*}S_r^{(l)^{1/2}} =$$
$$= S_r^{(l)^{1/2}}V_r^{(l)}K_r^{(l)^{-1}}V_r^{(l)^*}S_r^{(l)^{1/2}} = S_r^{(l)^{1/2}}S_r^{(l)^{-1}}S_r^{(l)^{1/2}} = I_{\mathcal{H}}.$$

Воспользуемся интегральными представлениями (15) и равенством $V_r^{(l)}K_r^{(l)^{-1}}V_r^{(l)^*} = S_r^{(l)^{-1}}$, которое очевидно при $l=1$. При $l>1$ имеем

$$V_r^{(l)}K_r^{(l)^{-1}}V_r^{(l)^*} = (O_{\mathcal{G}_r^{(l-1)}\,\mathfrak{h}_r^{(l)}}\ \ I_{\mathfrak{h}_r^{(l)}})\begin{pmatrix} K_r^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_{\mathfrak{h}_r^{(l)}\,\mathcal{G}_r^{(l-1)}} \\ I_{\mathfrak{h}_r^{(l)}}\end{pmatrix} +$$
$$+ \left(O_{\mathcal{G}_r^{(l-1)}\,\mathfrak{h}_r^{(l)}}\quad I_{\mathfrak{h}_r^{(l)}}\right)\begin{pmatrix} -K_r^{(l-1)^{-1}}B_r^{(l)} \\ I\end{pmatrix}S_r^{(l)^{-1}}\big(-B_r^{(l)^*}K_r^{(l-1)^{-1}}\ \ I\big)\begin{pmatrix} O_{\mathfrak{h}_r^{(l)}\,\mathcal{G}_r^{(l-1)}} \\ I_{\mathfrak{h}_r^{(l)}}\end{pmatrix} = S_r^{(l)^{-1}}.$$

Формулы (16) доказаны.

Докажем теперь соотношения (17) при $r=1$ и $k>1$. С учетом (9) имеем

$$T_1^{(l)} = L_2^{(l)}L_1^{(l)^*} = \begin{pmatrix} L_2^{(k)} & O_{\mathcal{G}_2^{(l)}\ominus\mathcal{G}_2^{(k)}\mathcal{G}_1^{(k)}} \\ E_2^{(l,k)} & \widehat{L}_2^{(l,k)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1^{(k)^*} & O_{\mathcal{G}_1^{(l)}\ominus\mathcal{G}_1^{(k)}\mathcal{G}_2^{(k)}} \\ D_1^{(l,k)^*} & \widehat{L}_1^{(l,k)^*}\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} L_2^{(k)}L_1^{(k)^*} & O_{\mathcal{G}_1^{(l)}\ominus\mathcal{G}_1^{(k)}\mathcal{G}_1^{(k)}} \\ E_2^{(l,k)}L_1^{(k)^*} + \widehat{L}_2^{(l,k)}D_1^{(l,k)^*} & \widehat{L}_2^{(l,k)}\widehat{L}_1^{(l,k)^*}\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что ОФ $R_{T_1}(z)$ имеет блочную структуру

$$R_{T_1^{(l)}}(z) = (I_{\mathcal{G}_1} - zT_1)^{-1} = \begin{pmatrix} R_{T_1^{(k)}}(z) & O_{\mathcal{G}_1^{(l)}\ominus\mathcal{G}_1^{(k)}\mathcal{G}_1^{(k)}} \\ R_{21}(z) & R_{22}(z)\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Здесь $R_{21}(z)$ и $R_{22}(z)$ — некоторые голоморфные вместе с $R_{T_1^{(l)}}(z)$ ОФ. Отсюда следует

$$X_1^{l,k}R_{T_1^{(l)}}(z)v_1^{(l)} = \big(I_{\mathcal{G}_1^{(k)}}\quad O_{\mathcal{G}_1^{(l)}\ominus\mathcal{G}_1^{(k)},\ \mathcal{G}_1^{(k)}}\big)\begin{pmatrix} R_{T_1^{(k)}}(z) & O_{\mathcal{G}_1^{(l)}\ominus\mathcal{G}_1^{(k)}\mathcal{G}_1^{(k)}} \\ R_{21}(z) & R_{22}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ \check{v}_1^{(l,k)}\end{pmatrix} =$$
$$= \left(R_{T_1^{(k)}}(z)\quad O_{\mathcal{G}_1^{(l)}\ominus\mathcal{G}_1^{(k)}\mathcal{G}_1^{(k)}}\right)\begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ \check{v}_1^{(l,k)}\end{pmatrix} = R_{T_1^{(k)}}(z)v_1^{(k)}.$$

Таким образом,

$$R_{T_1^{(k)}}(z)v_1^{(k)} = X_1^{l,k}R_{T_1^{(l)}}(z)v_1^{(l)}. \tag{20}$$

Далее имеем

$$\int_0^\infty P_1^{(k)}(t)\sigma^{(l)}(dt)P_1^{(l)^*}(t)+S_1^{(k)^{1/2}}V_1^{(k)}K_1^{(k)^{-1}}X_1^{l,k}\times$$
$$\times\bigl(W_1^{(l)}+(1-1)F^{(l)}F^{(l)^*}\bigr)K_1^{(l)^{-1}}V_1^{(l)^*}S_1^{(l)^{1/2}}=$$
$$=S_1^{(k)^{1/2}}V_1^{(k)}K_1^{(k)^{-1}}\int_0^\infty R_{T_1^{(k)}}(t)v_1^{(k)}\sigma^{(l)}(dt)v_1^{(l)^*}R^*_{T_1^{(l)}}(t)K_1^{(l)^{-1}}V_1^{(l)^*}S_1^{(l)^{1/2}}+$$
$$+S_1^{(k)^{1/2}}V_1^{(k)}K_1^{(k)^{-1}}X_1^{l,k}\bigl(W_1^{(l)}+(1-1)F^{(l)}F^{(l)^*}\bigr)K_1^{(l)^{-1}}V_1^{(l)^*}S_1^{(l)^{1/2}}=$$
$$=S_1^{(k)^{1/2}}V_1^{(k)}K_1^{(k)^{-1}}X_1^{l,k}\int_0^\infty R_{T_1^{(l)}}(t)v_1^{(l)}\sigma^{(l)}(dt)v_1^{(l)^*}R^*_{T_1^{(l)}}(t)K_1^{(l)^{-1}}V_1^{(l)^*}S_1^{(l)^{1/2}}+$$
$$+S_1^{(k)^{1/2}}V_1^{(k)}K_1^{(k)^{-1}}X_1^{l,k}\bigl(W_1^{(l)}+(1-1)F^{(l)}F^{(l)^*}\bigr)K_1^{(l)^{-1}}V_1^{(l)^*}S_1^{(l)^{1/2}}=$$
$$=S_1^{(k)^{1/2}}V_1^{(k)}K_1^{(k)^{-1}}X_1^{l,k}\left(\int_0^\infty R_{T_1^{(l)}}(t)v_1^{(l)}\sigma^{(l)}(dt)v_1^{(l)^*}R^*_{T_1^{(l)}}(t)+W_1^{(l)}+(1-1)F^{(l)}F^{(l)^*}\right)\times$$
$$\times K_1^{(l)^{-1}}V_1^{(l)^*}S_1^{(l)^{1/2}}=S_1^{(k)^{1/2}}V_1^{(k)}K_1^{(k)^{-1}}X_1^{l,k}K_1^{(l)}K_1^{(l)^{-1}}V_1^{(l)^*}S_1^{(l)^{1/2}}=$$
$$=S_1^{(k)^{1/2}}V_1^{(k)}K_1^{(k)^{-1}}X_1^{l,k}V_1^{(l)^*}S_1^{(l)^{1/2}}=O_{\mathcal{H}}.$$

Здесь второе равенство следует из (20), а последнее — из равенства $X_1^{l,k}V_1^{(l)^*}=O$, которое является следствием того, что образ оператора

$$V_1^{(l)^*}=\begin{pmatrix}O_{\mathfrak{h}_1^{(l)}\,\mathcal{G}_1^{(l-1)}}\\ I_{\mathfrak{h}_r^{(l)}}\end{pmatrix}$$

содержится в ядре оператора $X_1^{l,k}=\bigl[I_{\mathcal{G}_1^{(k)}}\quad O_{\mathcal{G}_1^{(l)}\ominus\mathcal{G}_1^{(k)}\ \mathcal{G}_1^{(k)}}\bigr]$. Равенства (17) доказаны при $r=1$ и $k>1$. При $k=1$ формулы (17) очевидны. Аналогичным образом доказываются равенства (17) при $r=2$ и равенства (18). □

4. Критерий вполне неопределенности предельной интерполяционной задачи. Примеры

Теорема 2. *Пусть дана упорядоченная последовательность обобщенных интерполяционных задач стилтьесовского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ и пусть все задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ являются вполне неопределенными. Для того чтобы предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ была вполне неопределенной, необходимо, чтобы при всех $x\in\mathbb{R}_-\setminus\mathcal{Z}^{(\infty)}$ сходились ряды*

$$\sum_{l=1}^\infty P_1^{(l)^*}(x)P_1^{(l)}(x),\quad \sum_{l=1}^\infty P_2^{(l)^*}(x)P_2^{(l)}(x),\tag{21}$$

и достаточно, чтобы ряды (21) сходились хотя бы при одном $x\in\mathbb{R}_-\setminus\mathcal{Z}^{(\infty)}$.

Доказательство. Для всех $l\in\mathbb{N}$ имеют место равенства

$$v_1^{(l)^*}R^*_{T_1^{(l)}}(x)K_1^{(l)^{-1}}R_{T_1^{(l)}}(x)v_1^{(l)}=\sum_{j=1}^l P_1^{(j)^*}(x)P_1^{(j)}(x),\tag{22}$$

$$v_2^{(l)^*}R^*_{T_2^{(l)}}(x)K_2^{(l)^{-1}}R_{T_2^{(l)}}(x)v_2^{(l)}=\sum_{j=1}^l P_2^{(j)^*}(x)P_2^{(j)}(x).\tag{23}$$

Индукцией по l докажем формулы (22). При $l=1$ формула (22) очевидна. Пусть теперь при некотором фиксированном $l>1$ формулы (22) выполнены для всех $k<l$. Тогда для $k=l$ имеем

$$
\begin{gathered}
v_1^{(l)^*}R^*_{T_1^{(l)}}(x)K_1^{(l)^{-1}}R_{T_1^{(l)}}(x)v_1^{(l)}=\begin{pmatrix} v_1^{(l-1)}\\ \check{v}_1^{(l)}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} R_{T_1^{(l-1)}}(z) & O_{\mathfrak{h}_1^{(l)}\mathcal{G}_1^{(l-1)}}\\ R_{21}(z) & R_{22}(z)\end{pmatrix}^*\times\\
\times\left\{\begin{pmatrix} K_r^{(l-1)^{-1}} & O\\ O & O\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -K_r^{(l-1)^{-1}}B_r^{(l)}\\ I\end{pmatrix}S_r^{(l)^{-1}}(-B_r^{(l)^*}K_r^{(l-1)^{-1}}\ I)\right\}\times\\
\times\begin{pmatrix} R_{T_1^{(l-1)}}(z) & O_{\mathfrak{h}_1^{(l)}\mathcal{G}_1^{(l-1)}}\\ R_{21}(z) & R_{22}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(l-1)}\\ \check{v}_1^{(l)}\end{pmatrix}=v^{(l-1)^*}R^*_{T_1^{(l-1)}}(x)K_1^{(l-1)^{-1}}R_{T_1^{(l-1)}}(x)v_1^{(l-1)}+\\
+v_1^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(x)\begin{pmatrix} -K_r^{(l-1)^{-1}}B_r^{(l)}\\ I\end{pmatrix}S_r^{(l)^{-1}}\big(-B_r^{(l)^*}K_r^{(l-1)^{-1}}\ I\big)R_{T^{(l)}}(x)v^{(l)}=\\
=v^{(l-1)^*}R^*_{T_1^{(l-1)}}(x)K_1^{(l-1)^{-1}}R_{T_1^{(l-1)}}(x)v_1^{(l-1)}+\\
+v_1^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(x)K_r^{(l)^{-1}}V_r^{(l)^*}S_r^{(l)}S_r^{(l)^{-1}}S_r^{(l)}V_r^{(l)}K_r^{(l)^{-1}}R_{T^{(l)}}(x)v^{(l)}=\\
=v^{(l-1)^*}R^*_{T_1^{(l-1)}}(x)K_1^{(l-1)^{-1}}R_{T_1^{(l-1)}}(x)v_1^{(l-1)}+\\
+\big(S_1^{(l)^{1/2}}V_1^{(l)}K_1^{(l)^{-1}}R_{T_1^{(l)}}(x)v_1^{(l)}\big)^*\big(S_1^{(l)^{1/2}}V_1^{(l)}K_1^{(l)^{-1}}R_{T_1^{(l)}}(x)v_1^{(l)}\big)=\\
=v^{(l-1)^*}R^*_{T_1^{(l)}}(x)K_1^{(l-1)^{-1}}R_{T_1^{(l)}}(x)v_1^{(l-1)}+P_1^{(l)^*}(x)P_1^{(l)}(x)=\sum_{j=1}^{l}P_1^{(j)^*}(x)P_1^{(j)}(x).
\end{gathered}
$$

В этой цепочке равенств первое равенство следует из (11) и (19), третье — из (13) и последнее — из предположения индукции. Доказаны равенства (22). Равенства (23) доказываются аналогичным образом.

Теперь из формул (22) и (23) следует, что равенство (6) можно записать в виде

$$
\big\{s_K^{(l)}(x)-s_F^{(l)}(x)\big\}^{-1}=-x\sum_{j=1}^{l}P_1^{(j)^*}(x)P_1^{(j)}(x)+x^2\sum_{j=1}^{l}P_2^{(j)^*}(x)P_2^{(j)}(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}_-\setminus\mathcal{Z}^{(\infty)}.\tag{24}
$$

Пусть предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ является вполне неопределенной и произвольная точка $x\in\mathbb{R}_-\setminus\mathcal{Z}^{(\infty)}$. Из определения 8 следует, что существует и является положительной матрицей предел убывающей последовательности матриц $\lim\limits_{l\to\infty}\big\{s_K^{(l)}(x)-s_F^{(l)}(x)\big\}$. Поэтому существует и является положительной матрицей предел возрастающей последовательности обратных матриц $\lim\limits_{l\to\infty}\big\{s_K^{(l)}(x)-s_F^{(l)}(x)\big\}^{-1}$. В силу (24) существует и является положительной матрицей предел возрастающей последовательности матриц

$$
\lim_{l\to\infty}\Big\{-x\sum_{j=1}^{l}P_1^{(j)^*}(x)P_1^{(j)}(x)+x^2\sum_{j=1}^{l}P_2^{(j)^*}(x)P_2^{(j)}(x)\Big\}.
$$

Отсюда и из неравенств $-x>0$, $P_1^{(j)^*}(x)P_1^{(j)}(x)\ge O_{\mathcal{H}}$ и $P_2^{(j)^*}(x)P_2^{(j)}\ge O_{\mathcal{H}}$ вытекает сходимость рядов (21).

Наоборот, пусть в некоторой точке $x\in\mathbb{R}_-\setminus\mathcal{Z}^{(\infty)}$ сходятся ряды (21). Из (24) следует, что существует и является положительной матрицей предел возрастающей последовательности матриц $\lim\limits_{l\to\infty}\left\{s_K^{(l)}(x)-s_F^{(l)}(x)\right\}^{-1}$. Поэтому существует и является положительной матрицей предел убывающей последовательности матриц:

$$\lim_{l\to\infty}\left\{s_K^{(l)}(x)-s_F^{(l)}(x)\right\}=s_K^{(\infty)}(x)-s_F^{(\infty)}(x)>O_{\mathcal{H}}.$$

Отсюда и из равенства (10) следует

$$s_K^{(\infty)}(x)-s_F^{(\infty)}(x)>O_{\mathcal{H}}\ \ \forall x\in\mathbb{R}_-\setminus\mathcal{Z}^{(\infty)}.$$

Итак, предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ является вполне неопределенной. □

Пример 1. Задача Неванлинны–Пика в классе Стилтьеса. В задаче Неванлинны–Пика задана последовательность попарно различных комплексных чисел $z_1,z_2,\dots,z_k,\dots$ $z_j\neq\overline{z}_k$, $j,k\in\mathbb{N}$, и последовательность операторов $s_1,s_2,\dots,s_k,\dots$, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Требуется описать множество стилтьесовских ОФ $s\in\mathcal{S}$ таких, что

$$s(z_j)=s_j\ \ \forall j\in\mathbb{N}. \tag{25}$$

Исследуем случай, когда задача (25) имеет бесконечно много решений. Поэтому считаем, что выполнено необходимое условие неопределенности — предельные точки последовательности $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ принадлежат множеству $\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$.

Вместе с задачей (25) с бесконечным числом узлов интерполяции будем рассматривать и усеченные задачи Неванлинны–Пика. В таких задачах фиксируется число $l\in\mathbb{N}$ и требуется описать множество ОФ $s\in\mathcal{S}$ таких, что

$$s(z_j)=s_j,\quad 1\le j\le l. \tag{26}$$

Покажем, что усеченную интерполяционную задачу (26) можно рассматривать как обобщенную интерполяционную задачу стилтьесовского типа. Масштабные пространства зададим формулами

$$\mathcal{G}_1^{(l)}=\mathcal{G}_2^{(l)}=\underbrace{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}}_{l\ \text{слагаемых}},\quad \mathcal{H}.$$

Операторы $K_1^{(l)}$, $L_1^{(l)}$, $v_1^{(l)}$, $K_2^{(l)}$, $L_2^{(l)}$, $u_2^{(l)}$ зададим их матричными представлениями

$$\begin{gathered}
L_1^{(l)}=\operatorname{diag}(I_{\mathcal{H}},\dots,I_{\mathcal{H}})\in\{\mathcal{G}_1^{(l)}\},\quad v_1^{(l)}=\operatorname{col}(I_{\mathcal{H}},\dots,I_{\mathcal{H}})\in\{\mathcal{H},\mathcal{G}_1^{(l)}\},\\
L_2^{(l)}=\operatorname{diag}(z_1^{-1}I_{\mathcal{H}},\dots,z_l^{-1}I_{\mathcal{H}})\in\{\mathcal{G}_2^{(l)}\},\quad u_2^{(l)}=L_2^{(l)^{-1}}\cdot\operatorname{col}(s_1,\dots,s_l)\in\{\mathcal{H},\mathcal{G}_2\},\\
K_r^{(l)}=L_2^{(l)^{-1}}\cdot\left(\frac{z_i^{r-1}s_i-\overline{z}_j^{r-1}s_j^*}{z_i-\overline{z}_j}\right)_{i,j=1,\dots,l}\cdot L_2^{(l)^{-1^*}}\in\{G_r\},\quad r=1,2.
\end{gathered}\tag{27}$$

Очевидно, выполнено ОТ (1). ОФ $s\in\mathcal{S}$ является решением усеченной задачи (26) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе ОМН (4) [14]. Отсюда следует, что множество решений усеченной интерполяционной задачи (26) совпадает с множеством решений обобщенной интерполяционной задачи стилтьесовского типа:

$$\mathcal{P}^{(l)}=\left\{K_1^{(l)},L_1^{(l)},v_1^{(l)},K_2^{(l)},L_2^{(l)},u_2^{(l)}\right\}. \tag{28}$$

Следовательно, можем вместо задачи (26) рассматривать задачу (28), а вместо задачи (25) — предельную интерполяционную задачу $\mathcal{P}^{(\infty)}$.

Пусть при всех $l\in\mathbb{N}$ обобщенные интерполяционные задачи (28) являются вполне неопределенными. Непосредственно из блочных представлений (27) следует, что обобщенные интерполяционные задачи (28) являются упорядоченным семейством. Из (27), (12) и (2) имеем

$$T_1^{(l)}=L_2^{(l)}L_1^{(l)^*}=L_2^{(l)},\quad T_2^{(l)}=L_1^{(l)^*}L_2^{(l)}=L_2^{(l)},\quad v_2^{(l)}=L_1^{(l)^*}v_1^{(l)}=v_1^{(l)},$$

$$V_r^{(l)} = \mathrm{col}(O_{\mathcal{H}}, \dots, O_{\mathcal{H}}, I_{\mathcal{H}}).$$

Поэтому

$$R_{T_1}^{(l)}(z) = R_{T_2}^{(l)}(z) = \big(I_{\mathcal{G}_r^{(l)}} - zT_r^{(l)}\big)^{-1} = \big(I_{\mathcal{G}_r^{(l)}} - zL_2^{(l)}\big)^{-1} = \\ = \mathrm{diag}\,\big((1-zz_1^{-1})^{-1}I_{\mathcal{H}}, \dots, (1-zz_l^{-1})^{-1}I_{\mathcal{H}}\big).$$

Ортонормированные ОФ (14) в нашей задаче задаются явными формулами

$$\begin{aligned} &P_r^{(1)}(z) = K_r^{(1)^{-\frac{1}{2}}}((1-zz_1^{-1})^{-1}I_{\mathcal{H}}, \\ &P_r^{(l)}(z) = S_r^{(l)1/2}V_r^{(l)}K_r^{(l)^{-1}}\,\mathrm{col}\,\big((1-zz_1^{-1})^{-1}I_{\mathcal{H}}, \dots, (1-zz_l^{-1})^{-1}I_{\mathcal{H}}\big), \quad l>1, \quad r=1,2, \end{aligned} \tag{29}$$

и являются рациональными ОФ с простыми полюсами в узлах интерполяции. Подставляя рациональные ОФ (29) в ряды (21), получим критерий вполне неопределенности предельной интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(\infty)}$, который одновременно является и новым критерием вполне неопределенности задачи Неванлинны–Пика с бесконечным числом узлов интерполяции (25).

Пример 2. Проблема моментов Стилтьеса. Через $\mathfrak{B}$ обозначим класс борелевских подмножеств множества $\mathbb{R}_+$. Отображение $\sigma : \mathfrak{B} \to \{\mathcal{H}\}_{\geq}$ называется неотрицательной операторной мерой, если

$$\sigma\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(A_j)$$

для любой бесконечной последовательности $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся борелевских подмножеств из $\mathbb{R}_+$.

В операторной проблеме моментов Стилтьеса по заданной последовательности операторов $s_0, \dots, s_k, \dots \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$ требуется описать множество неотрицательных операторных мер $\sigma : \mathfrak{B} \to \{\mathcal{H}\}_{\geq}$ таких, что

$$s_j = \int_0^{+\infty} t^j \sigma(dt) \quad \forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{30}$$

Множество решений σ проблемы моментов (30) обозначим символом $\mathcal{M}^{(\infty)}$.

Вместе с бесконечной проблемой моментов (30) будем рассматривать и усеченные проблемы моментов Стилтьеса. В таких проблемах фиксируется целое нечетное число $l = 2n+1$, $n \geq 0$, и требуется описать множество неотрицательных операторных мер $\sigma : \mathfrak{B} \to \{\mathcal{H}\}_{\geq}$ и операторов $M \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$ таких, что

$$s_j = \int_0^{+\infty} t^j \sigma(dt), \quad 0 \leq j \leq l-1, \quad s_l = \int_0^{+\infty} t^l \sigma(dt) + M. \tag{31}$$

Проблема моментов (31) называется l-й усеченной проблемой моментов Стилтьеса, а множество ее решений σ обозначается символом $\mathcal{M}^{(l)}$.

Пусть индекс $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. С множеством мер $\sigma \in \mathcal{M}^{(l)}$ свяжем множество ОФ вида

$$\mathcal{F}^{(l)} = \Big\{ s(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(dt)}{t-z} : \sigma \in \mathcal{M}^{(l)} \Big\}. \tag{32}$$

В этих формулах ОФ $s(z)=\int\limits_0^{+\infty}(t-z)^{-1}\sigma(dt)\in\mathcal{S}$ ([18], с. 522) и называется *ассоциированной* с решением σ проблемы моментов. Из формулы обращения Стилтьеса следует, что соответствие, устанавливаемое между $\mathcal{F}^{(l)}$ и $\mathcal{M}^{(l)}$ формулой (32), является взаимно однозначным. Поэтому вместо описания множества $\mathcal{M}^{(l)}$ можем ограничиться описанием множества $\mathcal{F}^{(l)}$.

Покажем, что задачу описания множества $\mathcal{F}^{(l)}$ можно рассматривать как обобщенную интерполяционную задачу стилтьесовского типа. В качестве масштабных пространств выберем пространства

$$\mathcal{G}_1^{(l)}=\mathcal{G}_2^{(l)}=\underbrace{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}}_{n+1},\quad \mathcal{H}.$$

Операторы $K_1^{(l)}$, $L_1^{(l)}$, $v_1^{(l)}$, $K_2^{(l)}$, $L_2^{(l)}$, $u_2^{(l)}$, участвующие в задаче (3), зададим матричными представлениями

$$K_1^{(l)}=\left(s_{j+k}\right)_{j,\,k=0}^n,\quad L_1^{(l)}=\begin{pmatrix}I_\mathcal{H}&O_\mathcal{H}&\ldots&O_\mathcal{H}\\O_\mathcal{H}&I_\mathcal{H}&\ldots&O_\mathcal{H}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\O_\mathcal{H}&O_\mathcal{H}&\ldots&I_\mathcal{H}\end{pmatrix},\quad v_1^{(l)}=\begin{pmatrix}I_\mathcal{H}\\O_\mathcal{H}\\\vdots\\O_\mathcal{H}\end{pmatrix},$$

$$K_2^{(l)}=\left(s_{j+k+1}\right)_{j,\,k=0}^n,\quad L_2^{(l)}=\begin{pmatrix}O_\mathcal{H}&\ldots&O_\mathcal{H}&O_\mathcal{H}\\I_\mathcal{H}&\ldots&O_\mathcal{H}&O_\mathcal{H}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\O_\mathcal{H}&\ldots&I_\mathcal{H}&O_\mathcal{H}\end{pmatrix},\quad u_2^{(l)}=-\begin{pmatrix}s_0\\s_1\\\vdots\\s_n\end{pmatrix}. \tag{33}$$

Непосредственно проверяем, что определенные выше операторы удовлетворяют ОТ (1). Как известно (например, [14]), ОФ $s\in\mathcal{F}^{(l)}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе ОМН (4). Таким образом, множество $\mathcal{F}^{(l)}$ совпадает со множеством решений следующей обобщенной интерполяционной задачи стилтьесовского типа:

$$\mathcal{P}^{(l)}=\left\{K_1^{(l)},L_1^{(l)},v_1^{(l)},K_2^{(l)},L_2^{(l)},u_2^{(l)}\right\}. \tag{34}$$

Пусть при всех $l\in\mathbb{N}$ интерполяционные задачи (34) являются вполне неопределенными. Непосредственно из блочных представлений (33) следует, что последовательность усеченных интерполяционных задач (34) является упорядоченной. При этом множество решений предельной интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(\infty)}$ совпадает со множеством $F^{(\infty)}$. Из (33), (12) и (2) имеем

$$T_1^{(l)}=L_2^{(l)}L_1^{(l)^*}=L_2^{(l)},\quad T_2^{(l)}=L_1^{(l)^*}L_2^{(l)}=L_2^{(l)},\quad v_2^{(l)}=L_1^{(l)^*}v_1^{(l)}=v_1^{(l)},$$
$$V_r^{(l)}=\operatorname{col}(O_\mathcal{H},\ldots,O_\mathcal{H},I_\mathcal{H}).$$

Поэтому

$$R_{T_1}^{(l)}(z)=R_{T_2}^{(l)}(z)=\left(I_{\mathcal{G}_r^{(l)}}-zT_r^{(l)}\right)^{-1}=\left(I_{\mathcal{G}_r^{(l)}}-zL_2^{(l)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}I&O&\ldots&O&O\\zI&I&\ldots&O&O\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\z^nI&z^{n-1}I&\ldots&zI&I\end{pmatrix}.$$

Ортонормированные ОФ (14) в нашей задаче задаются явными формулами

$$\begin{aligned}&P_r^{(1)}(z)=K_r^{(1)^{-1/2}},\\&P_r^{(l)}(z)=S_r^{(l)^{1/2}}V_r^{(l)}K_r^{(l)^{-1}}\operatorname{col}\left(I_\mathcal{H},\,zI_\mathcal{H},\ldots,z^nI_\mathcal{H}\right),\quad l>1,\quad r=1,2,\end{aligned} \tag{35}$$

и являются операторными полиномами n-го порядка для усеченной задачи с номером $l = 2n+1$. Подставляя операторные полиномы (35) в ряды (21), получим новый критерий вполне неопределенности проблемы моментов Стилтьеса (30).

Литература

[1] Stieltjes T.J. *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci., Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. **8** (4), 1–122 (1894).

[2] Stieltjes T.J. *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci., Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. **9** (1), 1–47 (1895).

[3] Hamburger H. *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems*, Math. Ann. **81** (2–4), 235–319 (1920).

[4] Hamburger H. *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems*, Math. Ann. **82** (1–2), 120–164 (1921).

[5] Hamburger H. *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems*, Math. Ann. **82** (3–4), 168–187 (1921).

[6] Schur I. *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, J. Reine und Angew. Math. **147**, 205–232 (1917).

[7] Schur I. *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, J. Reine und Angew. Math. **148**, 122–145 (1918).

[8] Ковалишина И.В., Потапов В.П. *Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны–Пика*, Докл. АН АрмССР **59** (1), 17–22 (1974).

[9] Ковалишина И.В., Потапов В.П. *Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны–Пика*, Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения: Сб. науч. тр. (Наук. думка, Киев, 1981), с. 25–49.

[10] Потапов В.П. *К теории матричных кругов Вейля*, Функциональный анализ и прикладная математика: Сб. научн. тр. (Наук. думка, Киев, 1982), с. 113–121.

[11] Ковалишина И.В. *Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **47** (3), 455–497 (1983).

[12] Дюкарев Ю.М., Кацнельсон В.Э. *Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи*, Теория функций, функц. анализ и их прилож. **36**, 13–27 (1981).

[13] Дюкарев Ю.М. *О критериях неопределенности матричной проблемы моментов Стилтьеса*, Матем. заметки **75** (1), 71–88 (2004).

[14] Дюкарев Ю.М. *О неопределенности интерполяционных задач в классе Стилтьеса*, Матем. сб. **196** (3), 61–88 (2005).

[15] Дюкарев Ю.М. *Обобщенный критерий Стилтьеса полной неопределенности интерполяционных задач*, Матем. заметки **84** (1), 23–39 (2008).

[16] Дюкарев Ю.М. *Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов.* I, Матем. физ., анализ, геометрия **6** (1/2), 30–54 (1999).

[17] Bolotnikov V., Sakhnovich L. *On an operator approach to interpolation problems for Stieltjes functions*, Integral Equat. Oper. Theory **35**, 423–470 (1999).

[18] Крейн М.Г., Нудельман А.А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи* (Наука, М., 1973).

Ю.М. Дюкарев

профессор, кафедра математики и физики,

Белгородская государственная сельскохозяйственная академия,

ул. Вавилова, д. 1, п. Майский, 308503, Россия,

`e-mail:` yu.dyukarev@karazin.ua

Yu.M. Dyukarev

The criterion for the complete indeterminacy of limiting interpolation problem of Stieltjes type in terms of the orthonormal matrix functions

Abstract. The main goal of this paper is to study the ordered sequences of generalized interpolation problems and the limiting interpolation problem in the Stieltjes class by using the orthonormal matrix functions. We obtain explicit formulas for the orthonormal matrix functions. The main result of the paper is a criterion for the complete indeterminacy of limiting interpolation problem in the Stieltjes class. General constructions are illustrated by examples of the Stieltjes moment problem and the Nevanlinna–Pick problem in the Stieltjes class.

Keywords: interpolation problems, Stieltjes functions, a criterion of complete indeterminacy, orthonormal matrix functions.

Yu.M. Dyukarev

Professor, Chair of Mathematics and Physics,
Belgorod State Agricultural Academy,
1 Vavilov str., Maiskii community, 308503 Russia,

`e-mail:` yu.dyukarev@karazin.ua