И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 517.53

Р.Ф. ШАМОЯН

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n),\ |z_j| < 1,\ j = 1, \dots, n\}$ — единичный полидиск n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{T}^n = \{z : |z_j| = 1,\ j = 1, \dots, n\}$ — его остов, $H(U^n)$ — множество всех голоморфных в U^n функций. В дальнейшем будем использовать стандартные обозначения $I^n = [0,1]^n$, $(1-R)^\gamma = (1-R_1)^\gamma \cdots (1-R_n)^\gamma$, $-\infty < \gamma < \infty$, $R_j \in (0,1)$, $j = 1, \dots, n$, $sz = (s_1 z_1, \dots, s_n z_n)$, $s \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{C}^n$, $dR = dR_1 \cdots dR_n$, $M_q(f,r) = \Big(\int\limits_{\mathbb{T}^n} |f(r\xi)|^q dm_n(\xi)\Big)^{1/q}$, $0 < q \le \infty$, $dm_{2n}(z)$ — мера Лебега на U^n, $H^s(U^n)$ — класс Харди в поликруге U^n, $0 < s \le \infty$. Для произвольных $0 < p, q < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ введем пространства

$$F^{p,q}_\alpha(U^n) = \Big\{ f \in H(U^n) : \|f\|^p_{F^{p,q}_\alpha(U^n)} = \int_{\mathbb{T}^n} \Big(\int_{I^n} |f(R\xi|^q (1-R)^\alpha dR \Big)^{p/q} dm_n(\xi) < \infty \Big\},$$

где $m_n(\xi)$ — нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}^n$.

Нетрудно показать, что при $\max(p,q) \le 1$ пространство $F^{p,q}_\alpha$ является полным метрическим пространством с метрикой $\rho(f,g) = \|f-g\|^{\min\{p,q\}}$, а при $\min\{p,q\} \ge 1$ относительно нормы $\|f\|_{F^{p,q}_\alpha}$ пространство $F^{p,q}_\alpha$ банахово. Заметим, что $F^{p,p}_\alpha = A^p_\alpha$, где $A^p_\alpha(U^n)$ — известные классы Бергмана–Джрбашяна [1], а $F^{p,2}_\alpha(U) = H^p_\alpha$, $0 < p < \infty$ [2], где H^p_α — классы Харди–Соболева. Некоторые свойства введенных пространств и их гладкостных аналогов при $1 < p, q < \infty$ исследовались в [3] и [4].

Цель статьи — изучение некоторых свойств пространств $F^{p,q}_\alpha$ при $0 < p, q \le 1$, $-1 < \alpha < \infty$.

Пусть $0 < p, q \le 1$, $-1 < \alpha < \infty$. Обозначим через $S^{p,q}_\alpha$ множество всех голоморфных в U^n функций таких, что для любого $\beta > \frac{\alpha+1}{q} + \frac{1}{p}$

$$\|f\|_{S^{p,q}_\alpha} = \sup_{z \in U^n} \{ |D^{\beta+1} g(z)| (1-|z|)^{\beta+2-\frac{(\alpha+1)}{q}-\frac{1}{p}} \} < \infty,$$

где

$$D^\beta g(z) = \sum_{|k| \ge 0} \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)} c_k z^k, \quad \Gamma(k+\beta+1) = \prod_{j=1}^n \Gamma(k_j+\beta+1), \quad g(z) = \sum_{|k|\ge 0} c_k z^k, \quad \beta > -1,$$

— дробная производная функции $g(z)$. Легко видеть, что относительно нормы $\|\cdot\|_{S^{p,q}_\alpha}$ пространство $S^{p,q}_\alpha$ является банаховым.

Определение. Пусть X и Y — подпространства $H(U^n)$. Скажем, что последовательность комплексных чисел $\{(c_k)_{k \in z^n_+}\}$ является мультипликатором из X в Y, если для любой функции $f(z) = \sum\limits_{|k|\ge 0} a_k z^k$, $f \in H(U^n)$, функция $g(z) = \sum\limits_{|k|\ge 0} c_k a_k z^k$ принадлежит Y.

Множество таких последовательностей обозначим через $M_T(X,Y)$. Отметим, что задача описания мультипликаторов для различных пар пространств X и Y решалась в работах многих авторов (см. [5]–[7]).

Теорема 1. 1) *Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $F^{p,q}_\alpha$, $0<p,q\le 1$, $g(z)=\Phi(l_z)$, $l_z(w)=\frac{1}{1-zw}=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1-z_kw_k}$, $z\in U^n$. Тогда $g(z)\in S^{p,q}_\alpha$, функционал Φ представи́м в виде*

$$\Phi(f)=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(\rho\xi)g(\rho\overline{\xi})dm_n(\xi). \tag{1}$$

2) *Обратно, любая функция $g\in S^{p,q}_\alpha$ по формуле (1) порождает линейный непрерывный функционал на $F^{p,q}_\alpha$. Более того, справедливы оценки*

$$c_1(\alpha,p,q)\|\Phi\|\le\|g\|_{S^{p,q}_\alpha}\le c_2(\alpha,p,q)\|\Phi\|.$$

Теорема 2. *Если $g\in H(U^n)$, $g(z)=\sum\limits_{|k|\ge 0}c_kz^k$, то*

$$\{(c_k)_{k\in z^n_+}\}\in M_T(F^{p,q}_\alpha(U^n),\,H^s(U^n)),\quad 0<\max(p,q)\le s\le\infty,\quad 0<p,q\le 1,$$

тогда и только тогда, когда

$$\sup_{r\in I^n} M_s(D^m g,r)(1-r)^{m+1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha+1}{q}}<\infty \tag{2}$$

для некоторого $m\in\mathbb{N}$, $m>\frac{1}{p}-1+\frac{\alpha+1}{q}$.

В дальнейшем

$$A^{p,q}_\alpha(U^n)=\left\{f\in H(U^n):\|f\|^p_{A^{p,q}_\alpha}=\int_{I^n}M^p_q(f,r)(1-r)^\alpha dr<\infty\right\},\quad 0<p,q<\infty.$$

Пространства типа $A^{p,q}_\alpha$ изучались многими авторами (см. [5]).

Теорема 3. *Если $g\in H(U^n)$, $g(z)=\sum\limits_{|k|\ge 0}c_kz^k$, то*

1) *$\{(c_k)_{k\in z^n_+}\}\in M_T(F^{p,q}_\alpha(U^n),\,F^{t,s}_\beta(U^n))$, $0<s\le t<\infty$, $0<p,q\le 1$, $0<\max(p,q)\le s\le 1$, $s\left(\frac{\alpha+1}{q}+\frac{1}{p}\right)<2$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{r\in I^n} M_t(f,r)(1-r)^{m+1-\frac{1}{p}+\frac{\beta+1}{s}-\frac{\alpha+1}{q}}<\infty \tag{3}$$

для некоторого $m\in\mathbb{N}$, $m\ge\frac{2}{q}-1$;

2) *$\{(c_k)_{k\in z^n_+}\}\in M_T(A^{p,q}_\alpha(U^n),\,F^{t,s}_\beta(U^n))$, $0<p,q\le s\le 1$, $0<s\le t<\infty$, $s\left(\frac{\alpha+1}{p}+\frac{1}{q}\right)<2$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{r\in I^n} M_t(f,r)(1-r)^{m+1-\frac{1}{q}+\frac{\beta+1}{s}-\frac{\alpha+1}{p}}<\infty \tag{4}$$

для некоторого $m\in\mathbb{N}$, $m\ge\frac{2}{s}-1$.

Замечание. Утверждение теоремы 1 при $p=q$ хорошо известно и установлено в [1].

Приведем схемы доказательств теорем 1–3. Они основаны на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Пусть $f,g\in H(U^n)$, $r\in I^n$, $\alpha>-1$. Тогда*

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n}f(r\overline{t})g(rt)dm_n(t)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n r_1^{-2\alpha}\cdots r_n^{-2\alpha}\times$$

$$\times\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_n}\int_{\mathbb{T}^n}D^{\alpha+1}g(R\xi)f(R\overline{\xi})\prod_{l=1}^{n}(r_l^2-R_l^2)^\alpha R\,dR\,dm_n(\xi).$$

Лемма 2. *Пусть* $0 < \max(p,q) \le s \le 1$, $-1 < \alpha < \infty$, $f \in F^{p,q}_\alpha(U^n)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\left(\int_{U^n} |f(w)|^s (1-|w|) s\left(\frac{\alpha+1}{q}+\frac{1}{p}\right) - 2dm_{2n}(w)\right)^{1/s} \le c\|f\|_{F^{p,q}_\alpha(U^n)},$$

где c *— некоторая константа.*

Для доказательства необходимости условий (2)–(4) используется ограниченность оператора $T : (a_k)_{k\in z^n_+} \to (c_k a_k)_{k\in z^n_+}$, $f(z) = \sum\limits_{|k|\ge 0} a_k z^k$, $f \in F^{p,q}_\alpha$, и лемма 2. При доказательстве достаточности условия (2) при $1 < s < \infty$ используется лемма 1 и двойственность пространств $H^s(U^n)$ и $H^{s'}(U^n)$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$. Доказательство достаточности условий (3) и (4) следует из лемм 1, 2, при этом используется оценка

$$\left(\int_{U^n} |f(w)| dm_{2n}(w)\right)^s \le c\int_{U^n} |f(w)|^s (1-|w|)^{2s-2} dm_{2n}(w), \quad f \in H(U^n), \quad 0 < s \le 1,$$

вытекающая из результатов [1].

В заключение отметим, что при доказательстве теорем 1–3 существенную роль играет разбиение поликруга U^n на диадические области U_{jk} (см. [1]).

Литература

1. Djrbashian A., Shamoyan F.A. *Topics in the theory of A^p_α spaces* // Teubner Texte zur Math. – 1988. – V. 105. – P. 1–199.
2. Fefferman C., Stein E. *H^p spaces of several variables* // Acta Math. – 1972. – V. 129. – № 3–4. – P. 137–173.
3. Гулиев В.С., Лизоркин П.И. *Классы голоморфных и гармонических функций в поликруге в связи с их граничными значениями* // Тр. матем. ин-та РАН. – 1993. – Т. 204. – С. 137–159.
4. Aleksandrov A.B., Peller V.V. *Hankel operators and similarity to a contraction* // Intern. Math. Research Notices. – 1996. – № 9. – P. 263–275.
5. Шведенко С.В. *Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. матем. анализ. – 1985. – Т. 23. – С. 3–124.
6. Тригуб Р.М. *Мультипликаторы класса $H^p(\mathbb{D}^m)$ при $p \in (0,1)$, аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов* // Докл. РАН. – 1994. – Т. 335. – № 6. – С. 697–699.
7. Nawrocki M. *Multipliers, linear functionals and the Frechét envelope of the Smirnov class $N_*(U^n)$* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – V. 322. – № 2. – P. 493–506.

Брянский государственный
педагогический университет

Поступила
07.10.1998