Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Направление: 010100.68 – Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(магистерская диссертация)

Риккартовы, полунаследственные и наследственные полукольца

Работа завершена:

« » __________ 2015г. ________________________ К.З. Ахмед

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры алгебры
и математической логики КФУ
« » __________ 2015г. ________________________ С.Н. Ильин

Заведующий кафедрой:
доктор физ.-мат. наук, профессор
« » __________ 2015г. ____________________ М.М. Арсланов

Казань – 2015

Содержание

Введение

Теория полуколец и полумодулей — новое активно развивающееся направление в современной алгебре. Основы теории полуколец и полумодулей, а также примеры практических приложений полуколец и полумодулей приведены, например, в книге [4]. Полукольца и полумодули над ними являются обобщениями колец и модулей. Поэтому для полумодулей над полукольцами можно рассматривать вопросы, аналогичные вопросам о модулях над кольцами (см., например, [5]).

В данной работе исследуются наследственные, полунаследственные и риккартовы полукольца в классе полуколец вида $B(n,m)$. Полукольца вида $B(n,m)$ были введены в статье [3] и являются важными примерами конечных полуколец. В частности, полукольцо $B(n,0)$ изоморфно кольцу вычетов Z_n.

Выпускная работа содержит 3 параграфа. В первом параграфе даны основные определения и факты о полукольцах и полумодулях, используемые в работе. Во втором параграфе дано подробное доказательство известного критерия наследственности (полунаследственности, риккартовости) кольца Z_n. В третьем параграфе рассмотрены полукольца $B(2,1)$, $B(3,1)$ и $B(5,1)$, для каждого из них доказано – являются они наследственными (полунаследственными, риккартовыми) или нет. В конце приведен список использованной литературы.

1 Основные определения и понятия

Определение 1.1. Непустое множество S с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ называется полукольцом, если выполняются следующие аксиомы:

1. $(S, +)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0;

2. $(S, \cdot)$ — полугруппа с нейтральным элементом 1;

3. умножение дистрибутивно относительно сложения:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc$$

для любых $a, b, c \in S$;

4. $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$.

Определение 1.2. Коммутативная полугруппа $(A, +, 0)$ называется правым полумодулем над полукольцом S (или S-полумодулем), если задано умножение справа элементов $a \in A$ на элементы $s \in S$, обозначаемое as, и при этом для любых $a, b \in A$, $s, t \in S$ выполняются условия:

1. $a(st) = (as)t$;

2. $(a + b)s = as + bs$;

3. $a(s + t) = as + at$;

4. $a \cdot 1 = a$;

5. $0 \cdot s = a \cdot 0 = 0$.

Двойственным образом вводится определение левого полумодуля. Все результаты, справедливые для правых полумодулей, будут верны и для левых, и наоборот. Ниже будут использоваться только правые полумодули. Через A_S обозначим правый полумодуль над полукольцом S.

Определение 1.3. Отображение $\varphi : A_S \to B_S$ называется гомоморфизмом полумодулей, если

1. φ — полугрупповой гомоморфизм, то есть для всех $a, a' \in A$ верно $\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$;

2. $\varphi(as) = \varphi(a)s$ для любых $a \in A$, $s \in S$.

Определение 1.4. Множество $X \subseteq A$ называется базисом для S-полумодуля A, если

1) X — система порождающих для A, то есть

$$\forall a \in A\, \exists x_1, \ldots, x_k \in X\, \exists s_1, \ldots, s_k \in S: \quad a = x_1 s_1 + \ldots + x_k s_k;$$

2) X независимо (или свободно), то есть

$$\forall x_1, \ldots, x_k \in X\, \forall s_1, \ldots, s_k, s_1', \ldots, s_k' \in S \text{ верна импликация}$$

$$x_1 s_1 + \ldots + x_k s_k = x_1 s_1' + \ldots + x_k s_k' \;\Rightarrow\; s_1 = s_1', \ldots, s_k = s_k'.$$

Полумодуль, обладающий базисом, называется свободным.

Пример 1.1. Пусть $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ — полукольцо натуральных чисел с обычными операциями сложения и умножения.

1. Зададим на коммутативном моноиде $M = \{0, 1\}$, где $1 + 1 = 1$, умножение на элементы из $\mathbb{N}$ по правилу:

$$0 \cdot n = 0 \quad \text{при любом } n;$$

$$1 \cdot n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 0, \\ 1, & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что M — полумодуль над $\mathbb{N}$ и M не является свободным.

2. Пусть $M = \mathbb{N}_{\mathbb{N}}$ — регулярный полумодуль. Тогда M — свободный полумодуль, так как $X = \{1\}$ — его базис.

Пункт 2 из примера 1.1 легко переносится на случай произвольных свободных полумодулей. А именно, полумодуль M над полукольцом S свободен тогда и только тогда, когда для некоторого индексного множества I верно $M_S \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$, где $M_i = S_S$ — регулярный полумодуль для всех $i \in I$.

Определение 1.5. Полумодуль M_S называется проективным, если для любых S-полумодулей A, B, любого сюръективного S-гомоморфизма $\alpha\colon A \to B$ и любого S-гомоморфизма $\varphi\colon M \to B$ существует такой S-гомоморфизм $\psi\colon M \to A$, что $\varphi = \alpha\psi$.

Определение 1.6. Проектор — это такой S-гомоморфизм $\alpha\colon M \to M$, что $\alpha^2 = \alpha$; при этом образ $\alpha(M)$ называется проекцией.

Утверждение 1.1. ([5, Предложение 2.1]) Полумодуль над полукольцом S проективен тогда и только тогда, когда он изоморфен проекции некоторого свободного S-полумодуля.

Таким образом, каждый свободный полумодуль проективен. Следующий пример показывает, что существуют проективные полумодули, не являющиеся свободными.

Пример 1.2. Пусть $S = \mathbb{B}_2$ — двухэлементная булева алгебра, $M = S \times S$. Непосредственно проверяется, что отображение $\alpha\colon M \to M$, где $\alpha(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$ для всех $(x_1, x_2) \in M$, является проектором. Следовательно, $P = \alpha(M) = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ — проективный S-полумодуль. Очевидно, что для P есть только две различных системы порождающих элементов: само множество P и подмножество

$X = \{(0,1),(1,1)\}$. Но так как $(0,1)+(1,1)=(1,1)$, то ни одна из этих систем порождающих не является независимой. Поэтому у полумодуля P нет базиса, значит, он не свободный.

Определение 1.7. Полумодуль M_S называется

– риккартовым, если любой его циклический подполумодуль (то есть подполумодуль вида mS, где $m \in M$) проективен;

– полунаследственным, если любой его конечно-порожденный подполумодуль (то есть подполумодуль вида $m_1S + \ldots + m_kS$, где $m_1, \ldots, m_k \in M$, $k \in \mathbb{N}$) проективен;

– наследственным, если любой его подполумодуль проективен.

Полукольцо S риккартово (полунаследственно, наследственно), если регулярный полумодуль S_S является риккартовым (соотв., полунаследственным, наследственным).

Рассмотрим конечные полукольца специального вида, которые были введены в статье [3] (см. также [4, Пример 1.8, стр. 9]).

Пример 1.3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Обозначим через $B(n,m)$ множество $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ и зададим на нем операцию сложения $\oplus$ следующим образом:

для всех $a, b \in B(n,m)$ при $a+b<n$ полагаем $a \oplus b = a+b$; если же $a+b \geq n$, то полагаем $a \oplus b = c$, где $c \in B(n,m)$ — наибольший элемент, такой что $a+b \equiv c \pmod{n-m}$.

Аналогичным образом определяется операция умножения $\odot$. В результате, система $(B(n,m),\oplus,\odot)$ образует конечное полукольцо. В частности, $B(2,1)$ — это двухэлементная булева алгебра, а $B(n,0)$ — это кольцо вычетов Z_n.

Основная задача данной работы состоит в исследовании и описании риккартовых (полунаследственных, наследственных) полуколец среди полуколец вида $B(n, m)$. При $m = 0$ эта задача решается в следующем параграфе. В третьем параграфе даны примеры полуколец вида $B(n, 1)$, среди которых есть риккартовы, полунаследственные и наследственные полукольца, а также найден пример полукольца, не обладающего данными свойствами.

2 Риккартовы, полунаследственные и наследственные кольца вычетов

Пусть $n \geq 2$, Z_n — кольцо вычетов по модулю n и $I \subseteq Z_n$ — его идеал. Тогда аддитивная группа $(Z_n, +)$ — циклическая, а $(I, +)$ — ее подгруппа. Хорошо известен следующий факт (см., например, [2, Теорема 3, стр. 22]):

Теорема 2.1. Если G — циклическая группа, то любая ее подгруппа — тоже циклическая.

Следствие 2.1. Для кольца вычетов Z_n следующие условия эквивалентны:

1. Z_n — риккартово;
2. Z_n — полунаследственно;
3. Z_n — наследственно.

Таким образом, свойства риккартовости, полунаследственности и наследственности для колец вычетов равносильны. Поэтому будем исследовать только риккартовы кольца вычетов. Сначала рассмотрим случай, когда $n = p^m$, где p — простое число.

Утверждение 2.1. Кольцо Z_{p^m} риккартово тогда и только тогда, когда $m = 1$.

Доказательство. Пусть $m > 1$. Тогда главный идеал $I = pZ_{p^m}$ отличен от нулевого идеала. Покажем, что I не является проективным Z_{p^m}-модулем.

Имеем сюръективный гомоморфизм $\alpha\colon Z_{p^m} \to I$, где $\alpha(x) = px$ для всех $x \in Z_{p^m}$, и тождественный гомоморфизм $1_I\colon I \to I$.

Предположим, что I проективен. Тогда существует гомоморфизм $\psi\colon I \to Z_{p^m}$, такой что $1_I = \alpha\psi$. В частности, элемент p^{m-1} лежит в I, поэтому

$$p^{m-1} = 1_I(p^{m-1}) = \alpha(\psi(p^{m-1})) = p\psi(p^{m-1}) = \psi(p^m) = \psi(0) = 0,$$

то есть $p^{m-1} = 0$ — противоречие.

Итак, при $m > 1$ кольцо Z_{p^m} не является риккартовым, значит, $m = 1$.

Обратно, если $m = 1$, то кольцо Z_p является полем и, значит, имеет ровно два идеала: нулевой идеал и само кольцо Z_p. Оба этих идеала являются проективными. Следовательно, кольцо Z_p риккартово.

Приведем формулировку еще одного известного факта о кольцах вычетов (см., например, [2, Следствие 2, стр. 156]):

Утверждение 2.2. Пусть $n = p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}$ — каноническое разложение натурального числа n на простые множители. Тогда $Z_n \cong Z_{p_1^{m_1}} \oplus \ldots \oplus Z_{p_k^{m_k}}$ — прямая сумма колец.

Таким образом, с учетом Утверждения 2.2 нужно исследовать риккартовость прямых сумм колец.

Утверждение 2.3. Пусть $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_k$ — прямая сумма колец. Кольцо R риккартово тогда и только тогда, когда риккартовы кольца R_i для всех $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Обозначим через e_i единицу кольца R_i, $i =$

$1, \ldots, k$. Тогда $1 = e_1 + \ldots + e_k$ и $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, так что $e_i R = R_i$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Пусть кольцо R риккартово и $I = a_i R_i$ — главный идеал кольца R_i, где $a_i \in R_i$. Тогда $a_i R = a_i e_i R = a_i R_i = I$, значит, I — главный идеал в R и, следовательно, I — проективный R-модуль. Тогда по Утверждению 1.1 существует проектор $\alpha\colon R_R \to R_R$ и изоморфизм $\chi\colon I_R \to \alpha(R_R)$. Так как $\chi^{-1}(\alpha(1)) \in I \subseteq R_i$, то

$$\chi^{-1}(\alpha(1)) = \chi^{-1}(\alpha(1))e_i = \chi^{-1}(\alpha(1)e_i) = \chi^{-1}(\alpha(e_i)),$$

поэтому $\alpha(1) = \alpha(e_i)$ и, значит, $\alpha(R) = \alpha(e_i R) = \alpha(R_i)$. Таким образом, идеал I изоморфен проекции регулярного модуля $R_{i R_i}$, следовательно, I является проективным R_i-модулем по Утверждению 1.1.

Обратно, пусть все кольца $R_1, \ldots, R_k$ риккартовы и пусть $I = aR$ — главный идеал кольца R. Тогда $I = a(e_1 + \ldots + e_k)R = I_1 \oplus \ldots \oplus I_k$, где $I_j = a e_j R_j$ — главный идеал кольца R_j для всех $j = 1, \ldots, k$. Следовательно, каждый из идеалов I_j является проективным R_j-модулем и изоморфен проекции регулярного модуля $R_{j R_j}$ для некоторого проектора $\alpha_j\colon R_{j R_j} \to R_{j R_j}$. Нетрудно видеть, что отображение $\beta_j\colon R_R \to R_R$, где $\beta_j(x) = \alpha_j(e_j x)$ для всех $x \in R$, также является проектором и $\beta_j(R) = \alpha_j(R_j)$. Значит, каждый из идеалов I_j является проективным R-модулем, и поэтому идеал I – как их прямая сумма – тоже проективен (см., например, [1, Теорема 5.3.4 b), стр. 117]).

С помощью Следствия 2.1 и Утверждений 2.1–2.3 получаем следующий результат:

Теорема 2.2. Пусть $n = p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}$ — каноническое разложение натурального числа n на простые множители. Кольцо вычетов Z_n риккартово (полунаследственно, наследственно) тогда и только тогда, когда $m_1 = \ldots = m_k = 1$.

3 Риккартовы, полунаследственные и наследственные полукольца вида $B(n,1)$

Пусть $n \geq 2$. Обозначим $R = B(n,1) \setminus \{0\}$. Легко видеть, что R замкнуто относительно сложения и умножения, и что $(R,+)$ — циклическая группа из $n-1$ элементов. Следовательно, $(R,+,\cdot)$ — это кольцо, изоморфное кольцу вычетов Z_{n-1}. Аналогичными рассуждениями доказывается следующий результат:

Утверждение 3.1. Подмножество $I \subseteq B(n,1)$ является ненулевым идеалом полукольца $B(n,1)$ тогда и только тогда, когда $I = I' \cup \{0\}$, где I' — идеал кольца R.

Так как в кольце вычетов Z_{n-1} все идеалы — главные, то любой идеал кольца R является главным. Тогда для любого ненулевого идеала $I \subseteq B(n,1)$ получаем $I = I' \cup \{0\} = aR \cup \{0\} = a(R \cup \{0\}) = aB(n,1)$ при подходящем $a \in R$. Значит, все идеалы полукольца $B(n,1)$ — тоже главные. В итоге, получаем результат, аналогичный Следствию 2.1:

Следствие 3.1. Для полукольца $B(n,1)$ следующие условия эквивалентны:

1. $B(n,1)$ — риккартово;
2. $B(n,1)$ — полунаследственно;
3. $B(n,1)$ — наследственно.

Таким образом, как и для колец вычетов, в приведенных ниже примерах достаточно проверять только свойство риккартовости.

Пример 3.1. Полукольцо $B(2,1)$ содержит ровно два элемента: 0 и 1. Значит, оно имеет в точности два идеала: нулевой идеал и само полукольцо $B(2,1)$. Оба этих идаела, очевидно, проективны, следовательно, полукольцо $B(2,1)$ риккартово (полунаследственно, наследственно).

Пример 3.2. В полукольце $B(3,1) = \{0,1,2\}$ имеется три главных идеала: нулевой идеал, само полукольцо $B(3,1)$ и идеал $I = \{0,2\}$. Проективность первых двух идеалов очевидна. Для доказательства проективности идеала I рассмотрим гомоморфизм $\alpha\colon B(3,1) \to B(3,1)$, где $\alpha(x) = 2x$ для всех $x \in B(3,1)$. Заметим, что $\alpha^2 = \alpha$. Действительно, в полукольце $B(3,1)$ верно $2 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 1 = 2 = 2 \cdot 2$, поэтому $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 2 = \alpha(2)$, откуда получаем, что $\alpha^2(0) = \alpha(0)$, $\alpha^2(1) = \alpha^2(2) = \alpha(2) = \alpha(1)$. Ясно также, что $\alpha(B(3,1)) = I$, поэтому идеал I проективен как проекция регулярного полумодуля $B(3,1)_{B(3,1)}$. Следовательно, полукольцо $B(3,1)$ риккартово (полунаследственно, наследственно).

Аналогично доказывается риккартовость (полунаследственность, наследственность) полукольца $B(4,1)$.

Пример 3.3. Рассмотрим в полукольце $B(5,1) = \{0,1,2,3,4\}$ главный идеал $I = 2B(5,1) = \{0,2,4\}$ и сюръективный гомоморфизм $\alpha\colon B(5,1) \to I$, где $\alpha(x) = 2x$ для всех $x \in B(5,1)$.

Пусть $1_I\colon I \to I$ — тождественный гомоморфизм. Предположим, что существует такой гомоморфизм $\psi\colon I \to B(5,1)$, что $1_I = \alpha\psi$. Тогда с учетом выполненных в $B(5,1)$ при любом $x \neq 0$ равенств $4 \cdot x = 4$

получаем

$$2 = 1_I(2) = \alpha(\psi(2)) = 2\psi(2) = \psi(4) = \psi(4 \cdot 4) = 4\psi(4) = 4,$$

то есть $2 = 4$ — противоречие.

Таким образом, главный идеал I не является проективным, следовательно, полукольцо $B(5, 1)$ не риккартово (не полунаследственно, не наследственно).

Список литературы

[1] Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.

[2] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры. — М.: Физматлит, 2001. – 272 с.

[3] Alarcón F.E., Anderson D.D. Commutative semirings and their lattices of ideals, Houston J. Math. **20** (1994) 571–590.

[4] Golan J.S. Semirings and Their Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1999. – 381 с.

[5] Il'in S.N., Katsov Y. On p-Schreier varieties of semimodules, *Commun. Algebra* **39** (2011) 1491–1501.