ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

УДК 517.972

С.Ф. МОРОЗОВ, А.В. СЕМЕНОВ

О ТЕОРИИ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ КРИВЫХ

В работах [1]–[3] изучалась задача на определение

$$\inf I[y] = \inf \int_a^b F(x, y, y')dx \tag{1}$$

в классе U функций $y(x)$, обладающих конечным числом точек разрыва типа "стенка". Предложенный там метод исследования вариационной задачи (1) основывается на построении расширений класса U (введение классов U_0 (y,z)-линий и $\overline{U}_0$ (y,z)-объектов), доопределении функционала $I[y]$ на элементах этих расширений и поиске абсолютных минималей в классе U_0 или $\overline{U}_0$, что обеспечивает нахождение приближенных минимизирующих решений класса U.

В данной работе изучение вариационной задачи (1) в классе существенно разрывных функций опирается на теорию обобщенных кривых Юнга–Макшейна [4]–[6]. Предлагаемый метод исследования позволяет не только получить теорему существования обобщенного решения сопряженной параметрической задачи, но и доказать в отличие от [1]–[3] существование абсолютного минимума вариационной задачи (1) в исходном классе существенно разрывных функций. Кроме того, данный метод позволяет в отличие от [7], [8] ослабить требования на гладкость интегранта F и избавляет от необходимости устанавливать факт полунепрерывности сопряженного функционала $J[C]$ в классе абсолютно непрерывных кривых, имеющих не более чем счетное число вертикальных отрезков.

1. Допустимый класс кривых (класс П**).** Параметрическим представлением абсолютно непрерывной кривой C на плоскости (x,y) будем называть абсолютно непрерывное отображение $f(t) = (x(t), y(t))$ отрезка $[t_1, t_2] \subset \mathbf{R}^1$ в $\mathbf{R}^2$. Если $t = \varphi(\tau)$ — абсолютно непрерывная, строго возрастающая в $[\tau_1, \tau_2]$ функция такая, что $\varphi(\tau_i) = t_i$ $(i = 1, 2)$, то параметрическое представление $f[\varphi(\tau)]$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, будем считать эквивалентным параметрическому представлению $f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Кривой $C : f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, назовем класс всех параметрических представлений, эквивалентных $f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Носитель $(\{C\} \equiv \{f(t)\})$ кривой C есть по определению множество значений функции $f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, и он, очевидно, не зависит от вида параметрического представления кривой.

Спрямляемую кривую C, лежащую в области $\Omega = \{(x, y) : x \in [a, b], |y| \le y^0\}$ плоскости (x,y), соединяющую точки $A = (a, a_1)$, $B = (b, b_1)$ $(A, B \in \Omega)$, отнесем к классу П, если C имеет абсолютно непрерывное представление $\{f(t) = (x(t), y(t)),\ \dot{x}(t) \ge 0,\ t \in [t_1, t_2]\}$ и, следовательно, ее носитель обладает не более чем счетным числом отрезков d_i, параллельных оси $0y$.

2. Допустимый класс функций (класс НП**).** Пусть C — кривая класса П. Проекцию любой точки $P \in \{C\}$ плоскости (x,y) на ось $0x$ обозначим через P'. Каждой точке P' из интервала $[a, b]$ поставим в соответствие совокупность всех $P \in \{C\}$, которые имеют P' своей проекцией. Тем самым получаем функцию $y(x)$, $x \in [a, b]$, вообще говоря, неоднозначную. Очевидно, $y(x)$ не зависит от параметрического представления кривой C. Эти функции будем считать допустимыми функциями класса НП вариационной задачи. Функция $y(x) \in$ НП может иметь в $[a, b]$

не более чем счетное число точек разрыва $x = x_i$ $(i = 1, 2, \dots)$, и $y(x)$ абсолютно непрерывна на каждом из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ $(j = 1, 2, \dots)$. Класс НП содержит в себе класс абсолютно непрерывных функций.

3. Интегрант F. Пусть функция F удовлетворяет следующим условиям: 1) $F(x, y, z) > 0$ определена и непрерывна по совокупности переменных $x, y, z : (x, y) \in \Omega$, $-\infty < z < \infty$; 2) F — выпуклая вниз функция по $z : F(x, y, \theta_1 z_1 + \theta_2 z_2) \leq \theta_1 F(x, y, z_1) + \theta_2 F(x, y, z_2)$ для всех $(x, y) \in \Omega$, $-\infty < z_1, z_2 < \infty$, $\theta_1, \theta_2 \geq 0$, $\theta_1 + \theta_2 = 1$; 3) существует конечный предел $\lim\limits_{z \to \pm\infty} F(x, y, z)/z = w(x, y, \operatorname{sign} z)$, где w — непрерывная функция по совокупности переменных $(x, y) \in \Omega$.

4. Функционал $I[y]$ **на классе функций** НП. Для функции $y(x)$ класса НП определим функционал

$$I[y] = \sum_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} F(x, y, y')dx + \sum_i \int_{y_i}^{\overline{y}_i} w(x_i, \xi, \operatorname{sign}[\overline{y}_i - y_i])d\xi, \tag{2}$$

где x_i, x_j — точки разрыва функции $y(x)$; $\overline{y}_i = y(x_i + 0)$, $y_i = y(x_i - 0)$.[1] В случае, когда $y(x)$ абсолютно непрерывна в $[a, b]$, функционал (2) принимает свой обычный вид (1).

5. Сопряженный параметрический интегрант $\widetilde{G}$. Обозначим через $\widetilde{G}$ сопряженный параметрический интегрант

$$\widetilde{G}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right), \quad \dot{x} > 0; \quad \widetilde{G}(x, y, 0, 0) = 0. \tag{3}$$

Для $\dot{x} = 0$ продолжим функцию $\widetilde{G}$, используя (3) и определение функции $w(x, y, \operatorname{sign} z)$,

$$\widetilde{G}(x, y, 0, \dot{y}) = \lim_{\dot{x} \to +0} \widetilde{G}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \lim_{z \to \pm\infty} \dot{y} \frac{1}{z} F(x, y, z) = \dot{y} w(x, y, \operatorname{sign} z), \tag{4}$$

где $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Таким образом, в области $\Omega \times \mathbf{R}^2_+ = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) : (x, y) \in \Omega,\ \dot{x} \geq 0,\ -\infty < \dot{y} < \infty\}$ с помощью соотношений (3), (4) определена непрерывная, положительно однородная первой степени относительно $\dot{x}$, $\dot{y}$ и выпуклая вниз по $\dot{x}$, $\dot{y}$ функция $\widetilde{G}$ — интегрант сопряженного параметрического функционала

$$J[C] = \int_C \widetilde{G}(x, y, \dot{x}, \dot{y})dt,$$

определенного на классе кривых $C \in \Pi$. Нетрудно видеть, что $I[y] = J[C]$, где $y(x)$ есть функция класса НП, соответствующая кривой C класса П.

6. Класс обобщенных кривых (класс ОК**)**. Пусть S — произвольное множество, Σ — σ-алгебра подмножеств множества S, тогда пара (S, Σ) называется измеримым пространством. Мерой μ будем называть счетно-аддитивную функцию множества со значениями из расширенной области вещественных чисел, определенную на заданной σ-алгебре Σ.

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^2$ с метрической топологией $\mathcal{G}$ евклидова расстояния и возьмем в качестве S пространство $\mathbf{R}^2_+ = \{u = (u^1, u^2) \in \mathbf{R}^2 : u^1 \geq 0,\ -\infty < u^2 < \infty\}$, наделенное индуцированной топологией пространства $(\mathbf{R}^2, \mathcal{G})$. Обозначим через $\mathcal{B}$ борелевскую σ-алгебру топологического пространства $S = \mathbf{R}^2_+$, т. е. наименьшую σ-алгебру, содержащую все замкнутые подмножества данного топологического пространства. Таким образом, определено измеримое пространство $(\mathbf{R}^2, \mathcal{B})$.

Пусть C — кривая класса П и $f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, — некоторое ее параметрическое представление. Пусть T — произвольное множество значений $t \in [t_1, t_2]$ лебеговой меры $t_2 - t_1$, для которых существуют конечные производные $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, и пусть для каждого $t \in T$ заданы меры $\mu(t)$, определенные на измеримом пространстве $(\mathbf{R}^2_+, \mathcal{B})$ и удовлетворяющие условиям

А) для каждого $t \in T$ $\mu(t)$ — положительная конечная мера;

[1] Вышеприведенные определения и представление вариационного функционала (2) обоснованы в работах [9], [7], [8].

Б) для каждого $t \in T$ носитель меры $\mu(t)$ ($\operatorname{supp}\mu(t)$) — ограниченное множество;

В) функция $\varphi(t) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} \Phi(u)\mu(t)(du)$ является измеримой на $[t_1, t_2]$ для любой $\Phi(u) \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^2_+)$;

Г) для каждого $t \in T$ выполняются равенства

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} u^1\mu(t)(du) = \dot{x}(t), \quad \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} u^2\mu(t)(du) = \dot{y}(t).$$

Из таких ограничений на меры $\mu(t)$ непосредственно следует

Лемма 1. *Пусть $C : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2]\}$ — кривая класса* П, *и $\mu(t)$, $t \in T \subset [t_1, t_2]$, — меры, удовлетворяющие условиям* А)–В). *Тогда для любой $\Phi(t, u) \in \mathbf{C}([t_1, t_2] \times \mathbf{R}^2_+)$ функция $\psi(t) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} \Phi(t, u)\mu(t)(du)$ является измеримой на $[t_1, t_2]$.*

Представлением некоторой обобщенной кривой C^* будем называть пару $\{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu(t),\ t \in T\}$, где $C : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2]\}$ — кривая класса П, $\mu(t)$, $t \in T$, — меры, удовлетворяющие условиям А)–Г).

Обозначим через $\mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$ класс функций $G(x, y, u^1, u^2)$, положительно однородных первой степени относительно u^1, u^2 и непрерывных по совокупности переменных $(x, y) \in \Omega$, $(u^1, u^2) \in \mathbf{R}^2_+$.

Два представления $\{f_1(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu_1(t),\ t \in T_1\}$, $\{f_2(\tau),\ \tau \in [\tau_1, \tau_2];\ \mu_2(\tau),\ \tau \in T_2\}$ будем считать эквивалентными представлениями обобщенной кривой C^*, если для каждой функции $G(x, y, u^1, u^2)$ класса $\mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$ из существования одного из интегралов

$$J_1[C^*](G) = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} G(x_1(t), y_1(t), u^1, u^2)\mu_1(t)(du),$$

$$J_2[C^*](G) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} G(x_2(\tau), y_2(\tau), u^1, u^2)\mu_2(\tau)(du)$$

следует существование другого и их равенство

$$J_1[C^*](G) = J_2[C^*](G), \quad G \in \mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+). \tag{5}$$

Обобщенной кривой C^* класса ОК назовем совокупность всех представлений, эквивалентных $C^* : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu(t),\ t \in T\}$.

В силу равенства (5) на обобщенной кривой $C^* : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu(t),\ t \in T\}$ определим функционал

$$J[C^*](G) = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} G(x(t), y(t), u^1, u^2)\mu(t)(du), \quad G \in \mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+).$$

Очевидно, значение $J[C^*](G)$ не зависит от выбора обобщенного представления обобщенной кривой $C^* \in$ ОК.

Пример. Пусть $C : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2]\}$ — кривая класса П. Положим $\mu(t) = \delta_{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}$, $t \in T$, где $\delta_{(\alpha,\beta)}(E) = \begin{cases} 1, & (\alpha, \beta) \in E \in \mathcal{B}; \\ 0, & (\alpha, \beta) \notin E \in \mathcal{B}, \end{cases}$ — мера Дирака в точке (α, β) ([10], c. 65). Тогда обобщенная кривая $C^* : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \delta_{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))},\ t \in T\}$ однозначно соответствует обычной кривой C класса П, при этом для любой функции $G \in \mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$ имеем

$$J[C^*](G) = \int_{t_1}^{t_2} G(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))dt.$$

7. Класс обобщенных спрямляемых кривых (класс ОСК). Обобщенную кривую $C^* \in$ ОК назовем обобщенной спрямляемой кривой, если ее обобщенная длина $L[C^*] = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{\mathbf{R}_+^2} |u|\mu(t)(du)$ конечна. Класс всех обобщенных спрямляемых кривых из ОК обозначим через ОСК.

Непосредственно из данного определения обобщенной спрямляемой кривой и условия однородности функций класса $\mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}_+^2)$ следует

Лемма 2. *Если* $C^* \in$ ОСК, *то значение функционала* $J[C^*](G)$ *конечно для любой функции* $G \in \mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}_+^2)$.

8. Эквивалентные представления обобщенных спрямляемых кривых. По теореме о замене переменного в интеграле Лебега ([10], с. 119) справедлива

Лемма 3. *Пусть* $C^* : \{f_1(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu_1(t),\ t \in T_1\}$ — *обобщенная кривая класса* ОСК *и* $t = t(\tau)$ — *монотонная абсолютно непрерывная в* $[\tau_1, \tau_2]$ *функция такая, что* а) $t'(\tau) > 0$ *почти всюду в* $[\tau_1, \tau_2]$; б) $t(\tau_i) = t_i$ $(i = 1, 2)$. *Тогда* C^* *имеет эквивалентное представление* $\{f_2(\tau),\ \tau \in [\tau_1, \tau_2];\ \mu_2(\tau),\ \tau \in T_2\}$, *где* $f_2(\tau) = f_1(t(\tau))$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, $\mu_2(\tau) = t'(\tau)\mu_1(t(\tau))$, $\tau \in T_2 \subset [\tau_1, \tau_2]$.

Лемма 4. *Пусть* $C^* : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu_1(t),\ t \in T\}$ — *обобщенная спрямляемая кривая класса* ОСК *и* r — *произвольное положительное число. Тогда существует такое эквивалентное представление* $\{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu_2(t),\ t \in T\}$ *обобщенной кривой* C^*, *что* $\operatorname{supp} \mu_2(t) \subset S_r$, $t \in T$, *где* $S_r = \{u \in \mathbf{R}_+^2 : |u| = r\}$.

Доказательство. Пусть $C^* : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu_1(t),\ t \in T\}$ — обобщенная кривая класса ОСК и $r > 0$ — произвольная постоянная. Возьмем фиксированное $t \in T$. Так как $\operatorname{supp} \mu_1(t)$ — ограниченное множество, то найдется такая постоянная $\alpha(t) > 0$, что $\operatorname{supp} \mu_1(t) \subset D_{\alpha(t)} = \{u \in \mathbf{R}_+^2 : |u| \le \alpha(t)\}$. На классе функций $\Phi(u) \in \mathbf{C}(D_{\alpha(t)})$ определим линейный непрерывный функционал

$$V_t(\Phi) = \iint\limits_{D_{\alpha(t)}} \Phi^*(u)\mu_1(t)(du),$$

где

$$\Phi^*(u) = \begin{cases} \frac{|u|}{r}\Phi(\frac{ru^1}{|u|}\frac{ru^2}{|u|}), & |u| \ne 0; \\ 0, & u_1 = u_2 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

— функция класса $\mathbf{CH}(\mathbf{R}_+^2)$.

Семейство $\mathcal{B}(D_{\alpha(t)}) = \{E' \in \mathcal{B} : E' = E \cap D_{\alpha(t)},\ E \in \mathcal{B}\}$ является борелевской σ-алгеброй подмножеств $D_{\alpha(t)}$ ([11], с. 30). По теореме Рисса ([12], с. 288) существует такая конечная положительная регулярная мера $\overline{\mu}_2(t)$, определенная на измеримом пространстве $(D_{\alpha(t)}, \mathcal{B}(D_{\alpha(t)}))$, что $V_t(\Phi) = \iint\limits_{D_{\alpha(t)}} \Phi(u)\overline{\mu}_2(t)(du)$, $\Phi(u) \in \mathbf{C}(D_{\alpha(t)})$. Тогда функция множеств $\mu_2(t)$, определенная на измеримом пространстве $(\mathbf{R}_+^2, \mathcal{B})$ равенством $\mu_2(t)(E) = \overline{\mu}_2(E \cap D_{\alpha(t)})$, $E \in \mathcal{B}$, является положительной регулярной мерой.

Так как

$$\iint\limits_{\mathbf{R}_+^2} \Phi(u)\mu_2(t)(du) = \iint\limits_{D_{\alpha(t)}} \Phi(u)\overline{\mu}_2(t)(du) = V_t(\Phi) = \iint\limits_{D_{\alpha(t)}} \Phi^*(u)\mu_1(t)(du),$$

то из (6) легко видеть, что $\operatorname{supp} \mu_2(t) \subset S_r$. Для каждой $\Phi \in \mathbf{C}(\mathbf{R}_+^2)$ функция $\varphi^*(t) = \iint\limits_{\mathbf{R}_+^2} \Phi^*(u)\mu_1(t)(du)$ является измеримой на $[t_1, t_2]$, следовательно, в силу равенства $\varphi(t) = \iint\limits_{\mathbf{R}_+^2} \Phi(u)\mu_2(t)(du) = \varphi^*(t)$ функция $\varphi(t)$ также измерима на $[t_1, t_2]$.

Если $\Phi(u) \in \mathbf{CH}(\mathbf{R}^2_+)$, то из (6) имеем $\Phi^* \equiv \Phi$. Отсюда

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} \Phi(u)\mu_2(t)(du) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} \Phi^*(u)\mu_1(t)(du) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} \Phi(u)\mu_1(t)(du), \quad t \in T. \tag{7}$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} u^1\mu_2(t)(du) = \dot{x}(t), \quad \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} u^2\mu_2(t)(du) = \dot{y}(t), \quad t \in T.$$

Пусть $G(x, y, u^1, u^2)$ — произвольная функция класса $\mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$, t — фиксированная точка из T и $\Phi(u^1, u^2) = G(x(t), y(t), u^1, u^2)$ — функция класса $\mathbf{CH}(\mathbf{R}^2_+)$. Применяя (7), имеем

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} G(x(t), y(t), u^1, u^2)\mu_2(t)(du) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} G(x(t), y(t), u^1, u^2)\mu_1(t)(du), \quad t \in T.$$

Отсюда для каждой $G \in \mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$ получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\mathbf{R}^2_+} G(x(t), y(t), u^1, u^2)\mu_2(du) = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\mathbf{R}^2_+} G(x(t), y(t), u^1, u^2)\mu_1(t)(du).$$

Таким образом, $\{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu_1(t),\ t \in T\}$ и $\{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu_2(t),\ t \in T\}$ являются эквивалентными представлениями обобщенной кривой C^*, причем $\operatorname{supp}\mu_2(t) \subset S_r$. $\square$

Лемма 5. *Для произвольного* $\varepsilon > 0$ *и каждой обобщенной кривой* $C^* : \{f_1(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu_1(t),\ t \in T_1\}$ *класса* ОСК *существует такое эквивалентное представление* $\{f_2(\tau),\ \tau \in [0, 1];\ \mu_2(\tau),\ \tau \in T_2\}$, *что для всех* $\tau \in T_2$ $\operatorname{supp}\mu_2(\tau) \subset S_1$ *и* $\iint\limits_{S_1} \mu_2(\tau)(du) < L[C^*] + \varepsilon$.

Доказательство. Функция

$$\varphi(t) = \frac{1}{L[C^*] + \varepsilon} \int_{t_1}^{t} \Bigg\{ \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} |u|\mu_1(t)(du) + \frac{\varepsilon}{t_2 - t_1} \Bigg\} dt$$

является непрерывной строго возрастающей в $[t_1, t_2]$ и, следовательно, существует обратная строго возрастающая абсолютно непрерывная функция $t = t(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$. Применяя лемму 3 к функции $t = t(\tau)$, получаем эквивалентное представление $\{f_2(\tau),\ \tau \in [0, 1];\ \overline{\mu}_2(\tau),\ \tau \in T_2\}$ для $C^* \in$ ОСК, при этом для каждого $\tau \in T_2$ имеем

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} |u|\overline{\mu}_2(\tau)(du) = t'(\tau) \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} |u|\mu_1(t(\tau))(du) < L[C^*] + \varepsilon. \tag{8}$$

Далее, применяя лемму 4 к обобщенной кривой $C^* : \{f_2(\tau),\ \tau \in [0, 1];\ \overline{\mu}_2(\tau),\ \tau \in T_2\}$ и $r = 1$, получим такое эквивалентное представление $\{f_2(\tau),\ \tau \in [0, 1];\ \mu_2(\tau), \tau \in T_2\}$, что $\operatorname{supp}\mu_2(\tau) \subset S_1$, $\tau \in T_2$. Из соотношения (7) и неравенства (8) для всех $\tau \in T_2$ имеем

$$\iint\limits_{S_1} \mu_2(\tau)(du) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} |u|\overline{\mu}_2(\tau)(du) < L[C^*] + \varepsilon. \quad \square$$

9. Топология на классе обобщенных спрямляемых кривых (ОСК). Пусть $h(x, y, u^1, u^2)$ — произвольная функция класса $\mathbf{C}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$. Тогда, очевидно, функция

$$G(x, y, u^1, u^2) = \begin{cases} |u|h(x, y, \frac{u^1}{|u|}, \frac{u^2}{|u|}), & |u| \neq 0; \\ 0, & u^1 = u^2 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

принадлежит классу $\mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$ и $h(x, y, u^1, u^2) = G(x, y, u^1, u^2)$, $(x, y) \in \Omega, (u^1, u^2) \in S_1$. Таким образом, определено взаимно однозначное соответствие между классами $\mathbf{C}(\Omega\times S_1)$ и $\mathbf{CH}(\Omega\times\mathbf{R}^2_+)$, т. е. они являются алгебраически изоморфными.

Пусть $C^* \in$ ОСК, тогда на функциях h класса $\mathbf{C}(\Omega \times S_1)$ определим непрерывный линейный функционал $H[C^*](h)$, полагая

$$H[C^*](h) = J[C^*](G), \tag{10}$$

где G — функция класса $\mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$, определяемая формулой (9).

Понятие эквивалентных представлений позволяет отождествить обобщенную кривую $C^* \in$ ОСК и функционал $J[C^*](G)$, $G \in \mathbf{CH}(\Omega\times\mathbf{R}^2_+)$. Учитывая это и принимая во внимание (10), введем в классе ОСК топологию, определяемую следующим типом сходимости: последовательность обобщенных спрямляемых кривых C^*_n $(n = 1, 2, \dots)$ сходится к $C^*_0 \in$ ОСК, если последовательность $H[C^*_n](h)$ $(n = 1, 2, \dots)$ $*$-слабо сходится к $H[C^*_0](h)$, т. е.

$$H[C^*_0](h) = \lim_{n\to\infty} H[C^*_n](h)$$

для каждой $h \in \mathbf{C}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$. Из (10) следует, что такая сходимость в ОСК равносильна следующей: последовательность C^*_n $(n = 1, 2, \dots)$ сходится к $C^*_0 \in$ ОСК, если

$$J[C^*_0](G) = \lim_{n\to\infty} J[C^*_n](G)$$

для каждой $G \in \mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для каждой фиксированной функции $G \in \mathbf{CH}(\Omega \times \mathbf{R}^2_+)$ функционал $J[C^*](G)$ является непрерывным в классе* ОСК.

Кроме того, имеет место

Теорема 2 (компактности). *Пусть $\mathcal{M}$ — бесконечное множество обобщенных кривых класса* ОСК. *Если существует такое $N > 0$, что $L[C^*] \le N$ для каждой $C^* \in \mathcal{M}$, то множество $\mathcal{M}$ компактно.*

Доказательство. Пусть C^*_n $(n = 1, 2, \dots)$ — произвольная последовательность обобщенных кривых из $\mathcal{M}$; $L[C^*_n] \le N$ $(n = 1, 2, \dots)$. Из леммы 5 следует, что для каждой C^*_n существует такое представление $\{f_n(t),\ t \in [0, 1];\ \mu_n(t),\ t \in T_n\}$, что

$$\operatorname{supp}\mu_n(t) \subset S_1, \quad t \in T_n;$$
$$\iint\limits_{S_1} \mu_n(t)(du) < L[C^*_n] + \frac{1}{n} \le N + 1, \quad t \in T_n. \tag{11}$$

Пусть $\Phi(x, y, u^1, u^2)$ — произвольная функция класса $\mathbf{C}(\Omega \times S_1)$ и $K = \max\limits_{\Omega\times S_1} |\Phi|$, тогда

$$\left| \iint\limits_{S_1} \Phi(x_n(t), y_n(t), u^1, u^2)\mu_n(t)(du)\right| < K(N + 1).$$

Так как по лемме 2 функция

$$\varphi_n(t) = \iint\limits_{S_1} \Phi(x_n(t), y_n(t), u^1, u^2)\mu_n(t)(du)$$

является измеримой, то функция

$$g_n(t; \Phi) = \int_0^t dt \iint\limits_{S_1} \Phi(x_n(t), y_n(t), u^1, u^2)\mu_n(t)(du)$$

определена и непрерывна по t в [0,1].

Для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ и всех n имеем $|g_n(t_2;\Phi) - g_n(t_1;\Phi)| < K(N+1)|t_2 - t_1|$, следовательно, все функции $g_n(t;\Phi)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной $K(N+1)$, а поэтому являются равностепенно непрерывными. Так как $g_n(0;\Phi) = 0$ $(n = 1,2,\dots)$, то для любого $t \in [0,1]$ получаем $|g_n(t;\Phi)| < K(N+1)$ $(n = 1,2,\dots)$, т.е. семейство функций $g_n(t;\Phi)$ равномерно ограничено. По теореме Арцела из последовательности $g_n(t;\Phi)$ $(n = 1,2,\dots)$ можно выделить равномерно сходящуюся на $[0,1]$ подпоследовательность $g_{n_k}(t;\Phi)$ $(k = 1,2,\dots)$.

В силу сепарабельности пространства $\mathbf{C}(\Omega \times S_1)$ существует последовательность функций $\Phi_m(x,y,u^1,u^2)$ $(m = 1,2,\dots)$, непрерывных в $\Omega \times S_1$ и таких, что для любой $\Phi(x,y,u^1,u^2)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное m_0 такое, что

$$|\Phi(x,y,u^1,u^2) - \Phi_{m_0}(x,y,u^1,u^2)| < \varepsilon, \quad (x,y) \in \Omega, \ \ (u^1,u^2) \in S_1. \tag{12}$$

Проведем процесс диагонализации: из последовательности $g_n(t;\Phi_1)$ $(n = 1,2,\dots)$ выделим равномерно сходящуюся по t на $[0,1]$ подпоследовательность $g_{n_k^{(1)}}(t;\Phi_1)$ $(k = 1,2,\dots)$; из последовательности $g_{n_k^{(1)}}(t;\Phi_2)$ $(k = 1,2,\dots)$ — равномерно сходящуюся по t подпоследовательность $g_{n_k^{(2)}}(t;\Phi_2)$ $(k = 1,2,\dots)$ и т.д. Для последовательности $g_{n_k^{(k)}}(t;\Phi_2)$ $(k = 1,2,\dots)$ и соответствующей ей последовательности обобщенных кривых $C^*_{n_k^{(k)}}$ $(k = 1,2,\dots)$ сохраним прежние обозначения $g_n(t,\Phi)$, C_n^* $(n = 1,2,\dots)$.

Из проведенного процесса диагонализации следует, что для любого m последовательность $g_n(t;\Phi_m)$ $(n = 1,2,\dots)$ равномерно по t на $[0,1]$ сходится к некоторой функции $g_0(t;\Phi_m)$, $t \in [0,1]$. При любом m функция $g_0(t;\Phi_m)$ удовлетворяет условию Липшица, а следовательно, является абсолютно непрерывной на $[0,1]$. Поэтому существует такое множество T_0 лебеговой меры 1, что для любого m и любого $t \in T_0$ производная $g_0'(t;\Phi_m)$ конечна.

Пусть $\Phi(x,y,u^1,u^2)$ — произвольная функция класса $C(\Omega \times S_1)$, ε — произвольное положительное число и m_0 — натуральное число, определяемое (12). Для любого n и всех $t \in [0,1]$ имеем

$$|g_n(t;\Phi_{m_0}) - g_n(t;\Phi)| < \varepsilon \int_0^t dt \iint\limits_{S_1} \mu_n(t)(du) \le \varepsilon N. \tag{13}$$

Так как $g_n(t;\Phi_{m_0})$ сходится к $g_0(t;\Phi_{m_0})$ равномерно на $[0,1]$, то по критерию Коши существует n_0 такое, что $|g_p(t;\Phi_{m_0}) - g_q(t;\Phi_{m_0})| < \varepsilon$ для всех $t \in [0,1]$ и $p,q > n_0$. Тогда, учитывая (13), получаем $|g_p(t;\Phi) - g_q(t;\Phi)| < \varepsilon(2N+1)$, $t \in [0,1]$, $p,q > n_0$. Следовательно, последовательность $g_n(t;\Phi)$ $(n = 1,2,\dots)$ равномерно на $[0,1]$ сходится к некоторой функции $g_0(t;\Phi)$, удовлетворяющей условию Липшица, а значит, являющейся абсолютно непрерывной на $[0,1]$.

Из неравенств (11), (12) легко видеть, что функции $g_n(t;\Phi) - g_n(t;\Phi_{m_0}) - \varepsilon(N+1)t$; $g_n(t;\Phi) - g_n(t;\Phi_{m_0}) + \varepsilon(N+1)t$ $(n = 1,2,\dots)$ являются соответственно убывающими и возрастающими в $[0,1]$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что функции $g_0(t;\Phi) - g_0(t;\Phi_{m_0}) - \varepsilon(N+1)t$; $g_0(t;\Phi) - g_0(t;\Phi_{m_0}) + \varepsilon(N+1)t$ являются соответственно монотонно невозрастающей и неубывающей по t в $[0,1]$, следовательно, все производные числа первой неположительны, а второй — неотрицательны ([13], с. 195). Пусть $t_0 \in T_0$, тогда

$$\overline{D}g_0(t_0;\Phi) - g_0'(t_0;\Phi_{m_0}) - \varepsilon(N+1) \le 0 \le \underline{D}g_0(t_0;\Phi) - g_0'(t_0;\Phi_{m_0}) + \varepsilon(N+1),$$

где $\underline{D}\,g_0(t_0;\Phi)$, $\overline{D}g_0(t_0;\Phi)$ — нижняя и верхняя производные функции $g_0(t_0;\Phi)$ в точке t_0. Отсюда $0 \le \overline{D}g_0(t_0;\Phi) - \underline{D}\,g_0(t_0;\Phi) \le 2\varepsilon(N+1)$, а т.к. ε — произвольное число, то $\underline{D}\,g_0(t_0;\Phi) = \overline{D}g_0(t_0;\Phi)$, т.е. в любой точке $t_0 \in T_0$ существует конечная производная $g_0'(t_0;\Phi)$.

Пусть $\Phi(x,y,u^1,u^2) \equiv u^1$, тогда

$$g_n(t;u^1) = \int_0^t dt \iint\limits_{S_1} u^1 \mu_n(t)(du) = \int_0^t \dot{x}_n(t)dt = x_n(t) - a. \tag{14}$$

Так как $g_n(t;u^1)$ равномерно на $[0,1]$ сходится к $g_0(t;u^1)$, то $x_n(t)$ равномерно сходится к абсолютно непрерывной на $[0,1]$ функции $x_0(t)=g_0(t;u^1)+a$. Аналогично, $y_n(t)$ сходится равномерно на $[0,1]$ к некоторой абсолютно непрерывной функции $y_0(t)$.

Пусть $\Phi(u^1,u^2)\in C(S_1)$ и $t_0\in T_0$. Положим $V_{t_0}[\Phi]=g_0'(t_0;\Phi)$. Легко видеть, что функционал $V_{t_0}[\Phi]$ является линейным.

Для любой неотрицательной $\Phi(u)\in\mathbf{C}(S_1)$ функция $g_n(t_0;\Phi)$ является монотонно неубывающей на $[0,1]$, следовательно, предельная функция $g_0(t;\Phi)$ также обладает указанным свойством, поэтому функционал $V_{t_0}[\Phi]$ является положительным: $V_{t_0}\geq 0$, $\Phi\geq 0$, $\Phi\in\mathbf{C}(S_1)$. Из условий положительности и линейности $V_{t_0}[\Phi]$ легко следует выполнение неравенства $|V_{t_0}[\Phi]|\leq V_{t_0}[|\Phi|]$, $\Phi\in\mathbf{C}(S_1)$. Отсюда $|V_{t_0}[\Phi]|\leq V_{t_0}[e]\|\Phi\|$, где $e(u)\equiv 1$, $u\in S_1$, $\|\Phi\|=\max\limits_{S_1}|\Phi|$. Таким образом, $V_{t_0}[\Phi]$ — положительный линейный функционал, следовательно, по теореме Рисса ([12], с. 288) найдется такая положительная регулярная мера $\overline{\mu_0}(t_0)$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(S_1)=\{E'\in\mathcal{B}:E'=E\cap S_1,\,E\in\mathcal{B}\}$ подмножеств множества S_1, что $V_{t_0}[\Phi]=\iint\limits_{S_1}\Phi(u)\overline{\mu_0}(t_0)(du)$, $\Phi\in\mathbf{C}(S_1)$. Тогда функция множества $\mu_0(t_0)$, определенная на измеримом пространстве $(\mathbf{R}^2_+,\mathcal{B})$ равенством $\mu_0(t_0)(E)=\overline{\mu_0}(t_0)(E\cap S_1)$, $E\in\mathcal{B}$, является положительной конечной регулярной мерой, при этом

$$\operatorname{supp}\mu_0(t_0)\subset S_1,\quad t_0\in T_0,\tag{15}$$

$$V_{t_0}[\Phi]=\iint\limits_{S_1}\Phi(u)\mu_0(t_0)(du),\quad \Phi\in\mathbf{C}(S_1).\tag{16}$$

Покажем, что $C_0^*:\{f_0(t)=(x_0(t),y_0(t)),\ t\in[0,1];\ \mu_0(t),\ t\in T_0\}$ является обобщенной спрямляемой кривой и $\lim\limits_{n\to\infty}C_n^*=C_0^*$.

Так как для любой $\Phi\in\mathbf{C}(S_1)$ $g_0(t;\Phi)$ — абсолютно непрерывная функция и $V_{t_0}[\Phi]=g_0'(t;\Phi)$, то для каждой $\Phi\in\mathbf{C}(\mathbf{R}^2_+)$ функция

$$\varphi_0(t)=\iint\limits_{\mathbf{R}^2_+}\Phi(u)\mu_0(t)(du)\tag{17}$$

измерима на $[0,1]$. Из (14), (16) для каждого $t\in T_0$ имеем

$$\dot{x}_0(t)=\frac{d}{dt}(\lim_{n\to\infty}g_n(t;u^1))=\frac{d}{dt}g_0(t;u^1)=\iint\limits_{S_1}u^1\mu_0(t)(du).\tag{18}$$

Отсюда

$$\dot{x}_0(t)\geq 0\quad\text{почти всюду в}\quad[0,1].\tag{19}$$

Аналогично,

$$\dot{y}_0(t)=\iint\limits_{S_1}u^2\mu_0(t)(du),\quad t\in T_0.\tag{20}$$

Пусть $\Phi\in\mathbf{C}(\Omega\times S_1)$, $t\in T_0$ и $\psi(u)=\Phi(x_0(t_0),y_0(t_0),u^1,u^2)$. В силу непрерывности для любого $\varepsilon>0$ найдется такая окрестность $U\subset\Omega$ точки $(x_0(t_0),y_0(t_0))$, что

$$|\Phi(x,y,u^1,u^2)-\psi(u^1,u^2)|<\varepsilon,\ \ (x,y)\in U,\ \ (u^1,u^2)\in S_1.$$

Выберем интервал $[\alpha,\beta]$, содержащий внутри t_0, настолько малым, чтобы $(x_0(t_0),y_0(t_0))\in U$, $t\in[\alpha,\beta]$. В силу равномерной сходимости существует такое n_0, что $(x_n(t),y_n(t))\in U$, $t\in[\alpha,\beta]$, при $n > n_0$. Тогда

$$\left| \int_\alpha^\beta dt \iint\limits_{S_1} \Phi(x_n(t), y_n(t), u^1, u^2)\mu_n(t)(du) - \int_\alpha^\beta dt \iint\limits_{S_1} \psi(u)\mu_n(t)(du) \right| < \varepsilon(N+1)(\beta-\alpha),$$

отсюда

$$\left| \frac{g_n(\beta;\Phi) - g_n(\alpha;\Phi)}{\beta-\alpha} - \frac{g_n(\beta;\psi) - g_n(\alpha;\psi)}{\beta-\alpha} \right| < \varepsilon(N+1).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая произвольность ε, получаем

$$g_0'(t_0;\Phi) = g_0'(t_0;\psi) = V_{t_0}[\psi] = \iint\limits_{S_1} \Phi(x_0(t_0), y_0(t_0), u^1, u^2)\mu_0(t_0)(du).$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 dt \iint\limits_{S_1} \Phi(x_n(t), y_n(t), u^1, u^2)\mu_n(t)(du) = \lim_{n\to\infty} g_n(1;\Phi) = \int_0^1 g_0'(t;\Phi)dt =$$

$$= \int_0^1 dt \iint\limits_{S_1} \Phi(x_0(t), y_0(t), u^1, u^2)\mu_0(t)(du), \quad \Phi \in \mathbf{C}(\Omega \times S_1), \tag{21}$$

в частности,

$$\int_0^1 dt \iint\limits_{S_1} \mu_0(t)(du) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 dt \iint\limits_{S_1} \mu_n(t)(du) \le N. \tag{22}$$

Используя (18), (19), для $t \in T$ получаем

$$\dot{x}_0^2(t) + \dot{y}_0^2(t) = \iint\limits_{S_1} \{\dot{x}_0(t)u^1 + \dot{y}_0(t)u^2\}\mu_0(t)(du) \le \sqrt{\dot{x}_0^2(t) + \dot{y}_0^2(t)} \iint\limits_{S_1} \mu_0(t)(du),$$

следовательно,

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}_0^2(t) + \dot{y}_0^2(t)}dt \le \int_0^1 dt \iint\limits_{S_1} \mu_0(t)(du) \le N. \tag{23}$$

Таким образом, учитывая (19), (23), устанавливаем, что абсолютно непрерывная кривая $C_0 : \{f_0(t),\ t \in [0,1]\}$ принадлежит классу Π, а значит, принимая во внимание (15), (17), (18), (20), (22), получим, что $C_0^* : \{f_0(t),\ t \in [0,1];\ \mu_0(t),\ t \in T_0\}$ является обобщенной спрямляемой кривой ($L[C_0^*] \le N$), при этом из (21) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^* = C_0^*$. $\square$

10. Теорема существования обобщенного решения положительно определенной сопряженной параметрической вариационной задачи.

Теорема 3. *Пусть* $F(x,y,z)$ *удовлетворяет условиям* 1)–3) *п.* 3, $\widetilde{G}$ — *сопряженный параметрический интегрант и*

$$m = \inf_{\text{НП}} I[y] = \inf_{\Pi} J[C].$$

Тогда существует такая обобщенная кривая $C_0^* \in$ ОСК, *что* $J[C_0^*](\widetilde{G}) = m$.

Доказательство. Пусть $C_n : \{f_n(t),\ t \in [0,1]\}$ — минимизирующая последовательность

$$\lim_{n\to\infty} J[C_n] = m; J[C_n] \le m+1 \ \ (n = 1, 2, \dots).$$

Пусть $K = \min\limits_{\Omega\times S_1} \widetilde{G}$, тогда в силу свойства однородности функции $\widetilde{G}$ для всех $(x,y)\in\Omega$, $(u^1,u^2)\in \mathbf{R}^2_+$ имеем $|\widetilde{G}(x,y,u^1,u^2)|\geq K|u|$, отсюда

$$K\int_0^1 \sqrt{\dot{x}_n^2(t)+\dot{y}_n^2(t)}dt \leq \int_0^1 \widetilde{G}(x_n(t),y_n(t),\dot{x}_n(t),\dot{y}_n(t))dt \leq m+1,$$

следовательно, $L[C_n]\leq (m+1)/K$ $(n=1,2,\dots)$.

Принимая во внимание пример п. 6, каждой кривой $C_n\in\Pi$ $(n=1,2,\dots)$ поставим во взаимно однозначное соответствие обобщенную спрямляемую кривую $C_n^*:\{f_n(t),\ t\in[0,1];\ \delta_{(\dot{x}_n(t),\dot{y}_n(t))},\ t\in T_n\}$. Так как $L[C_n^*]=L[C_n]\leq\frac{(m+1)}{K}$ $(n=1,2,\dots)$, то по теореме 2 из последовательности C_n^* $(n=1,2,\dots)$ можно выделить подпоследовательность $C_{n_k}^*$ $(k=1,2,\dots)$, сходящуюся к некоторой обобщенной кривой C_0^* класса ОСК, при этом в силу теоремы 1 имеем

$$J[C_0^*](\widetilde{G})=\lim_{n\to\infty} J[C_n^*](\widetilde{G})=\lim_{n\to\infty} J[C_n]=m. \quad \square$$

11. Леммы и теорема существования решения класса НП **положительно определенной вариационной задачи.**

Лемма 6. *Для каждой обобщенной кривой* C^* *класса* ОСК *существует такое представление* $\{f(t),\ t\in[0,1];\ \mu(t),\ t\in T\}$, *что* а) $\operatorname{supp}\mu(t)\subset S_{L[C^*]}$, $t\in T$; б) $\iint\limits_{S_{L[C^*]}}\mu(t)(du)=1$, $t\in T$.

Доказательство. Пусть $C^*\in$ ОСК. Полагая $C_n^*=C^*$ $(n=1,2,\dots)$ и применяя метод доказательства теоремы 2, для обобщенной спрямляемой кривой C^* получим эквивалентное представление $\{f_0(t),\ t\in[0,1];\ \mu_0(t),\ t\in T_0\}$, при этом $\operatorname{supp}\mu_0(t)\subset S_1$, $t\in T_0$.

Пусть $\Phi(x,y,u^1,u^2)\equiv 1$, $(x,y)\in\Omega$, $u\in\mathbf{R}^2_+$ и t_1, t_2 — произвольные значения из $[0,1]$ $(0\leq t_1<t_2\leq 1)$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\{g_n(t_2;\Phi)-g_n(t_1;\Phi)\}=g_0(t_2;\Phi)-g_0(t_1;\Phi),$$

где $g_n(t;\Phi)$, $g_0(t;\Phi)$ — функции, определенные в доказательстве теоремы 2, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}dt\iint\limits_{S_1}\mu_n(t)(du)=\int_{t_1}^{t_2}dt\iint\limits_{S_1}\mu_0(t)(du),$$

поэтому из (11) имеем

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\iint\limits_{S_1}\mu_0(t)(du)\leq(t_2-t_1)L[C^*].$$

Отсюда для любого $t\in[0,1]$ следуют неравенства

$$\int_0^t dt\iint\limits_{S_1}\mu_0(t)(du)\leq tL[C^*],\quad \int_t^1 dt\iint\limits_{S_1}\mu_0(t)(du)\leq(1-t)L[C^*]. \tag{24}$$

Из второго неравенства получаем

$$\int_0^t dt\iint\limits_{S_1}\mu_0(t)(du)\geq L[C^*]-(1-t)L[C^*]=tL[C^*],\quad t\in[0,1].$$

Принимая во внимание первое неравенство (24), имеем

$$\iint\limits_{S_1}\mu_0(t)(du)=L[C^*],\quad t\in T,$$

где T — некоторое подмножество множества T_0 лебеговой меры 1.

Из (23) легко видеть, что $L[C^*] \geq b - a > 0$. Применяя лемму 4 к обобщенной кривой C^* : $\{f_0(t),\ t \in [0,1];\ \mu_0(t),\ t \in T\}$ и $r = L[C^*]$, получим эквивалентное представление $\{f(t),\ t \in [0,1];\ \mu(t),\ t \in T\}$, удовлетворяющее условию а). Кроме того, из доказательства леммы 4 имеем

$$\iint\limits_{S_{L[C^*]}} \mu(t)(du) = \iint\limits_{S_1} \frac{|u|}{L[C^*]} \mu_0(t)(du) = \frac{1}{L[C^*]} \iint\limits_{S_1} \mu_0(du) = 1, \quad t \in T. \quad \square$$

Аналогично установлению интегрального неравенства Йенсена ([13], с. 288) доказывается

Лемма 7. *Пусть $G(u)$, $u \in \mathbf{R}^2_+$, — непрерывная выпуклая вниз функция. Если μ — положительная конечная мера, определенная на измеримом пространстве $(\mathbf{R}^2_+, \mathcal{B})$, обладающая ограниченным носителем и такая, что $\mu(\mathbf{R}^2_+) = 1$, то*

$$G\Big(\iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} u^1 \mu(du),\ \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} u^2 \mu(du) \Big) \leq \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} G(u)\mu(du).$$

Теорема 4. *Пусть $F(x, y, z)$ удовлетворяет условиям 1)–3) п. 3, тогда существует функция $y_0(x) \in$ НП, доставляющая минимум функционалу $I[y]$ в классе* НП.

Доказательство. По теореме 3 существует такая обобщенная кривая $C^* \in$ ОСК, что

$$J[C_0^*](\widetilde{G}) = m = \inf_{\text{НП}} I[y].$$

Пусть $\{f_0(t),\ t \in [0,1];\ \mu_0(t),\ t \in T_0\}$ — представление обобщенной спрямляемой кривой C_0^*, доставляемое леммой 6. Тогда для каждого $t \in T_0$ по лемме 7 имеем

$$\widetilde{G}(x_0(t), y_0(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \widetilde{G}\Big(x_0(t), y_0(t), \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} u^1 \mu_0(t)(du),\ \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} u^2 \mu_0(t)(du)\Big) \leq$$
$$\leq \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} \widetilde{G}(x_0(t), y_0(t), u^1, u^2)\mu_0(t)(du).$$

Следовательно, $I[y_0] \leq J[C_0^*](\widetilde{G}) = m$, где $y_0(x)$ — функция класса НП, соответствующая кривой C_0 : $\{f_0(t),\ t \in [0,1]\}$ класса П. Таким образом, в силу определения числа m, $y_0(x) \in$ НП минимизирует $I[y]$ в классе НП. $\square$

Литература

1. Кротов В.Ф. *Разрывные решения вариационных задач* // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 5. – С. 86–98.
2. Кротов В.Ф. *Основная задача вариационного исчисления для простейшего функционала на совокупности разрывных функций* // ДАН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 1. – С. 31–34.
3. Кротов В.Ф., Букреев В.В., Гурман В.И. *Новые методы вариационного исчисления в динамике полета.* – М.: Машиностроение, 1969. – 288 с.
4. Young L.C. *Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations* // C. R. Sci. Letters Varsovie. – 1937. – V. 30. – P. 212–234.
5. Янг Л. *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.* – М.: Мир, 1974. – 488 с.
6. McShane E.J. *Generalized curves* // Duke Math. J. – 1940. – V. 6. – P. 1–27.
7. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. *Достаточные условия существования разрывных решений для простейшего интеграла вариационного исчисления.* I // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 11. – С. 21–34.

8. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. *Достаточные условия существования разрывных решений для простейшего интеграла вариационного исчисления.* II // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 12. – С. 38–46.
9. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. *О необходимых условиях экстремума вариационных задач в непараметрической форме на совокупности разрывных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 12. – С. 37–46.
10. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 624 с.
11. Халмош П.Р. *Теория меры.* – М.: Ин. лит., 1953. – 292 с.
12. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
13. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Нижегородский государственный университет

Поступила
03.03.1998