ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 517.988

И.П. РЯЗАНЦЕВА

О РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ПОЛУМОНОТОННЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство, X^* — его сопряженное, которое считаем строго выпуклым, $A : X \to 2^{X^*}$ — неоднозначный полумонотонный оператор с $D(A) = X$, т. е. оператор $T = A + C$ является монотонным, где $C : X \to X^*$ — усиленно непрерывное отображение ([1], с. 267). Дополнительно считаем, что $T : X \to 2^{X^*}$ — максимальный монотонный оператор.

Рассмотрим в X вариационное неравенство

$$\langle Ax - f, z - x\rangle \geq 0 \ \ \forall z \in \Omega, \ \ x \in \Omega, \tag{1}$$

где Ω — выпуклое замкнутое множество в X, f — некоторый фиксированный элемент из X^*.

Решением (1) назовем элемент $x \in \Omega$ такой, что найдется $y \in Ax$, для которого при всех $z \in \Omega$ выполняется неравенство $\langle y - f, z - x\rangle \geq 0$.

Пусть $U : X \to X^*$ — дуальное отображение в X, в наших условиях U — непрерывное монотонное ограниченное коэрцитивное отображение ([1], сс. 313, 322, 330). Построим оператор $Fx = U(x - Px)$, где $P : X \to \Omega$ — оператор проектирования в X на множество Ω. Обычно F называют оператором штрафа [2]. $F : X \to X^*$ — однозначное ограниченное монотонное отображение, причем $Fx = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \Omega$ (см. [2]–[4]).

Определение (ср. с [2], с. 190; [4], с. 96). Многозначный оператор $A : X \to 2^{X^*}$ будем называть псевдомонотонным на X, если

а) для каждого $x \in X$ множество Ax непусто, замкнуто и выпукло в X^*;

б) если $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \in Ax_n$ и

$$\overline{\lim}\, \langle y_n, x_n - x\rangle \leq 0, \tag{2}$$

то для каждого $y \in X$ найдется элемент $z(y) \in Ax$ такой, что $\langle z, x - y\rangle \leq \underline{\lim}\, \langle y_n, x_n - y\rangle$.

Лемма. *Всякий полумонотонный оператор A ($D(A) = X$) является псевдомонотонным на X.*

Доказательство. Пусть $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \in Ax_n$ и выполнено (2), тогда $\langle Cx_n, x_n - x\rangle \to 0$, а значит,

$$\overline{\lim}\, \langle z_n, x_n - x\rangle \leq 0, \quad z_n = y_n + Cx_n \in Tx_n. \tag{3}$$

Так как T — максимальный монотонный, то T — псевдомонотонный в смысле определения (см. [4], с. 106), поэтому из (3) имеем

$$\underline{\lim}\, \langle y_n, x_n - y\rangle + \lim \langle Cx_n, x_n - y\rangle \geq \langle z, x - y\rangle;$$

здесь $z = z(y) \in Tx$. Следовательно,

$$\underline{\lim}\, \langle y_n, x_n - y\rangle \geq \langle u, x - y\rangle, \quad u = u(y) \in Ax. \quad \square$$

Нас будет интересовать вопрос о разрешимости неравенства (1) с полумонотонным оператором A. Из результатов работ [4]–[6] и леммы вытекает разрешимость вариационного неравенства

(1) для ограниченного полумонотонного хеминепрерывного отображения A, а из ([7], теорема 15) следует существование решения (1) с неограниченным полумонотонным A.

Приведем достаточные условия существования решений вариационных неравенств вида (1) с полумонотонным неограниченным оператором, совпадающих с точками однозначности A. Последнее позволяет изучить разрешимость (1) с произвольным однозначным полумонотонным отображением A (см., напр., [8]). Кроме того, используемая схема доказательства позволяет попутно установить возможность приближения решений (1) конечномерными аппроксимациями метода штрафа.

Теорема. *Пусть X — сепарабельное равномерно выпуклое банахово пространство, X^* строго выпукло, Ω — выпуклое замкнутое множество в X, $0 \in \Omega$, $A : X \to 2^{X^*}$ — полумонотонный оператор, причем $T = A + C$ — максимальное монотонное отображение, где $C : X \to X^*$ — усиленно непрерывный оператор, $D(A) = X$, справедливо неравенство*

$$\langle y - f, x\rangle \geq 0, \quad \|x\| = r > 0, \quad y \in Ax, \tag{4}$$

и во всякой точке $z^0 \in \Omega$, не являющейся точкой однозначности оператора A, хотя бы для одного элемента $u \in \Omega$

$$\overline{\lim}\, \langle v^n - f, z^n - u\rangle > 0, \tag{5}$$

при этом $z^n \rightharpoonup z^0$, $v^n \in Az^n$, а в остальных точках множества Ω оператор A однозначен. Тогда существует по крайней мере одно решение $\overline{x}$ вариационного неравенства (1), $\|\overline{x}\| \leq r$, причем решение $\overline{x}$ есть точка однозначности оператора A, и оно может быть получено как слабый предел подпоследовательности конечномерных аппроксимаций метода штрафа для (1).

Доказательство. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность конечномерных подпространств пространства X, $Q_n : X \to X_n$ — оператор проектирования, Q_n^* его сопряженный, $\Omega_n = \Omega \bigcap X_n$ — выпуклое замкнутое множество в X_n, $P_n : X \to \Omega_n$ — оператор проектирования на множество Ω_n, $F_n x = U(x - P_n x)$, $x \in X$. Очевидно, $0 \in \Omega_n$ при всех $n > 0$, и $F_n(x) = 0$ лишь при $x \in \Omega_n$. Оператор F_n обладает теми же свойствами, что и оператор F. Множества Ω_n аппроксимируют множество Ω в следующем смысле: $\Omega = \lim \Omega_n$ (см. [9], [4]), т. е. для любого элемента $v \in \Omega$ найдется последовательность $\{v_n\}$, $v_n \in \Omega_n$, такая, что $v_n \to v$, и если $v_n \rightharpoonup v$, $v_n \in \Omega_n$, то $v \in \Omega$ (ср. с [10], [11]). Зададим произвольную последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, и рассмотрим в X_n уравнение

$$Q_n^*(Ax + \tfrac{1}{\varepsilon_n} F_n x - f) = 0. \tag{6}$$

Так как $0 \in \Omega_n$, то $\langle F_n x, x\rangle \geq 0$ при всех $x \in X_n$, и потому для $x \in X_n$, $\|x\| = r$, $y \in Ax$ справедливы соотношения

$$\langle Q_n^*(y + \tfrac{1}{\varepsilon_n} F_n x - f), x\rangle = \langle y - f, x\rangle + \tfrac{1}{\varepsilon_n}\langle F_n x, x\rangle \geq 0.$$

Теперь можем утверждать существование решения $x_n \in X_n$ ($\|x_n\| \leq r$) уравнения (6) (см. [5]). Значит, найдется элемент $y^n \in Ax_n$ [6] такой, что

$$Q_n^*(y^n + \tfrac{1}{\varepsilon_n} F_n x_n - f) = 0. \tag{7}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поэтому $x_n \rightharpoonup \overline{x} \in X$ (здесь и далее обозначения для подпоследовательности не меняем).

Докажем ограниченность $\{y^n\}$. Пусть $u^n = a_1 I y^n / \|y^n\|$, $v^n \in Tu^n$, $\|v^n\| \leq a_2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $I = U^{-1}$. Локальная ограниченность максимального монотонного оператора T (см. [4]) гарантирует существование таких последовательностей $\{u^n\}$, $\{v^n\}$ для некоторых a_1 и a_2. Из условия монотонности T

$$\langle y^n + Cx_n - v^n, x_n - u^n\rangle \geq 0$$

получим неравенство (ср. с [6])

$$a_1\|y^n\| \le (\|Cx_n\|+a_2)a_1 + (\|f\|+\|Cx_n\|+a_2)r + \langle Q_n^*(y^n+\tfrac{1}{\varepsilon_n}F_nx_n - f), x_n\rangle - \tfrac{1}{\varepsilon_n}\langle F_nx_n, x_n\rangle.$$

Отсюда, учитывая (7) и свойства оператора F_n, имеем ограниченность последовательности $\{y^n\}$.

Далее, из (7) для всякого элемента $z_n \in X_n$ получаем $\langle \varepsilon_n(y^n - f) + F_nx_n, z_n\rangle = 0$, откуда заключаем, что $\langle F_nx_n, z_n\rangle \to 0$ для всякой ограниченной последовательности $\{z_n\}$, в частности, $\langle F_nx_n, x_n\rangle \to 0$. Очевидны соотношения

$$\langle F_nx_n, x_n\rangle = \langle U(x_n - P_nx_n), x_n - P_nx_n\rangle + \langle U(x_n - P_nx_n), P_nx_n\rangle = \|F_nx_n\|^2 + \langle U(x_n - P_nx_n), P_nx_n\rangle. \tag{8}$$

Из определения элемента P_nx_n, $x_n \in X_n$, имеем $\langle U(x_n - P_nx_n), P_nx_n - y\rangle \ge 0$ при всех $y \in \Omega_n$ ([2], [4]). Полагая здесь $y = 0$ получим неравенство $\langle U(x_n - P_nx_n), P_nx_n\rangle \ge 0$. Теперь из (8) следует, что $\langle F_nx_n, x_n\rangle \ge \|F_nx_n\|^2$, а значит, $F_nx_n \to 0$. Покажем, что $F_nx \to Fx$ для любого $x \in X$. Пусть $P_nx = z_n \in \Omega_n$, $Px = z \in \Omega$, $x \in X$, т. е.

$$\|x - z\| = \min_{y\in\Omega}\|x - y\|, \quad \|x - z_n\| = \min_{y\in\Omega_n}\|x - y\|. \tag{9}$$

Так как последовательность $\{z_n\}$ ограничена, то $z_n \rightharpoonup \overline{z}$, причем $\overline{z} \in \Omega$. Соотношения (9) эквивалентны неравенствам [2], [4]

$$\langle U(x - z), z - y\rangle \ge 0 \quad \forall y \in \Omega, \quad z \in \Omega; \tag{10}$$

$$\langle U(x - z_n), z_n - y\rangle \ge 0 \quad \forall y \in \Omega_n, \quad z_n \in \Omega_n. \tag{11}$$

Пусть $\overline{u}_n \in \Omega_n$, $\overline{u}_n \to z \in \Omega$. Полагая в (10) $y = \overline{z}$, а в (11) — $y = \overline{u}_n$ и складывая полученные неравенства, имеем

$$\langle U(x - z_n) - U(x - z), z_n - z\rangle + \langle U(x - z_n), z - \overline{u}_n\rangle + \langle U(x - z), z_n - \overline{z}\rangle \ge 0. \tag{12}$$

Из условия равномерной выпуклости пространства X следует неравенство [10]

$$\langle Ux - Uy, x - y\rangle \ge C\delta_X(\|x - y\|/C_2(R)), \quad x \in X, \ \ y \in X,$$

где $C > 0$, $C_2(R) > 0$ — неубывающая функция, $R = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, $\delta_X(t)$ — модуль выпуклости пространства X, $\delta_X(0) = 0$, $\delta_X(t)$ — возрастающая непрерывная функция. Поэтому из (12) при $R \ge \|x\|$ (см. (9)) имеем

$$C\delta_X(\|z - z_n\|/C_2(R)) \le \|x - z_n\|\,\|z - \overline{u}_n\| + \langle U(x - z), z_n - \overline{z}\rangle,$$

откуда заключаем, что $z_n \to z$. Непрерывность оператора U гарантирует теперь сильную сходимость $F_nx \to Fx$. Запишем условие монотонности оператора F_n:

$$\langle F_ny - F_nx_n, y - x_n\rangle \ge 0, \quad y \in X,$$

откуда с учетом установленных свойств последовательности операторов $\{F_n\}$ при $n \to \infty$ получим

$$\langle Fy, y - \overline{x}\rangle \ge 0 \quad \forall y \in X, \ \ \overline{x} \in X. \tag{13}$$

Оператор $F : X \to X^*$ монотонный непрерывный, $D(F) = X$, поэтому F максимальный монотонный (напр., [4]), а значит, из (13) вытекает равенство $F\overline{x} = 0$, т. е. $\overline{x} \in \Omega$. Пусть $w_n \in \Omega_n$, $w_n \to \overline{x} \in \Omega$, тогда $F_nw_n = 0$ и

$$\langle y^n - f, w_n - x_n\rangle = \tfrac{1}{\varepsilon_n}\langle F_nw_n - F_nx_n, w_n - x_n\rangle \ge 0, \tag{14}$$

т. е.

$$\langle y^n - f, x_n - \overline{x}\rangle \le \langle y^n - f, w_n - \overline{x}\rangle.$$

Поскольку последовательность $\{y^n\}$ ограничена, то из последнего неравенства находим

$$\overline{\lim}\,\langle y^n - f, x_n - \overline{x}\rangle \le 0. \tag{15}$$

В силу псевдомонотонности A (см. лемму)

$$\underline{\lim}\,\langle y^n - f, x_n - v\rangle \ge \langle \overline{y} - f, \overline{x} - v\rangle, \tag{16}$$

где $\overline{y} = \overline{y}(v) \in A\overline{x}$, $v \in X$. Пусть в (14) $w_n \to u$, $w_n \in \Omega_n$, u — произвольный элемент из Ω. Тогда, подобно (15), получим неравенство

$$\overline{\lim}\,\langle y^n - f, x_n - u\rangle \le 0, \quad u \in \Omega. \tag{17}$$

Поэтому в силу условия (5) теоремы оператор A однозначен в точке $\overline{x} \in \Omega$, значит, в (16) $\overline{y} = A\overline{x}$ при всех $v \in X$. Теперь, полагая в (16) $v = u \in \Omega$ и учитывая (17), имеем

$$\langle A\overline{x} - f, \overline{x} - u\rangle \le \underline{\lim}\,\langle y^n - f, x_n - u\rangle \le \overline{\lim}\,\langle y^n - f, x_n - u\rangle \le 0, \quad \overline{x} \in \Omega \;\; \forall u \in \Omega. \quad \square$$

Утверждение теоремы, очевидно, остается справедливым, если требование (4) заменить условием коэрцитивности A относительно некоторого элемента $x_0 \in X$ [2], [4]. Как уже отмечалось, существование решений (1) следует из результатов работы [7], при этом требование (5) теоремы может быть опущено. Однако (5) играет определяющую роль при доказательстве однозначности (непрерывности в некотором смысле) оператора A на решениях (1) и сходимости подпоследовательности из $\{x_n\}$ к $\overline{x}$. Идея требования (5) восходит к работам В.Н. Павленко (см., напр., [12], [8]). В [8] роль требования (5) играет условие регулярности точки разрыва $z^0 \in \Omega$, т. е.

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\,\langle A(z^0 + t(u - z^0)), u - z^0\rangle < 0 \tag{18}$$

для некоторого $u \in \Omega$. Покажем, что из (5) с $f = 0$ следует (18). Для этого построим $z^n = z^0 + t_n(u - z^0)$, и для последовательностей $z^n \to z^0$, $t_n \to 0+$ (5) примет вид

$$\overline{\lim}\,(t_n - 1)\langle A(z^0 + t_n(u - z^0)), u - z^0\rangle > 0.$$

Значит, (18) имеет место. Обратное в общем случае неверно. Отсюда заключаем, что в условиях теоремы на любом решении (1) оператор A однозначен ([8], замечание 2).

Утверждения теоремы позволяют использовать операторный метод регуляризации для решения монотонных вариационных неравенств при произвольных неограниченных полумонотонных возмущениях оператора A [13]. Подобное замечание справедливо и для смешанных вариационных неравенств [14], поскольку последние эквивалентны некоторым вариационным неравенствам вида (1) ([4], с. 265–266).

Литература

1. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
3. Ошман Е.В. *О непрерывности метрической проекции на выпуклые замкнутые множества* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 269. – № 2. – С. 289–291.
4. Pascali Dan, Sburlan Silviu. *Nonlinear mappings of monotone type.* – Bucuresti: Ed. Acad., Alphen aan den Rijn, Sijthoff and Noordhoff, 1978. – 341 p.
5. Абрамов А.А., Гаипова А.Н. *О существовании решений некоторых уравнений, содержащих монотонные разрывные преобразования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1972. – Т. 12. – № 2. – С. 525–528.
6. Рязанцева И.П. *Об уравнениях с полумонотонными разрывными отображениями* // Матем. заметки. – 1981. – Т. 30. – № 1. – С. 143–152.

7. Browder F., Hess P. *Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces* // J. Funct. Anal. – 1972. – V. 11. – № 3. – P. 251–294.
8. Павленко В.Н. *О разрешимости вариационных неравенств с разрывными полумонотонными операторами* // Укр. матем. журн. – 1993. – Т. 45. – № 3. – С. 443–447.
9. Панков А.А. *Дискретные аппроксимации выпуклых множеств и сходимость решений вариационных неравенств* // Math. Nachr. – 1979. – Bd. 91. – № 1. – S. 7–22.
10. Лисковец О.А. *Конечномерная проекционная регуляризация некорректных задач с монотонными операторами.* I. *Монотонные аппроксимирующие операторы* // Препринт. Ин-т матем. АН БССР. – Минск, 1983. – № 15. – 23 с.
11. Лисковец О.А. *Конечномерная проекционная регуляризация некорректных задач с монотонными операторами.* II. *Произвольные аппроксимирующие операторы* // Препринт. Ин-т матем. АН БССР. – Минск, 1984. – № 20. – 20 с.
12. Павленко В.Н. *Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1973. - № 6. - С. 21–29.
13. Рязанцева И.П. *О решении вариационных неравенств с монотонными операторами методом регуляризации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1983. – Т. 23. – № 2. – С. 479–483.
14. Лисковец О.А. *Регуляризация некоторых смешанных вариационных неравенств* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 317. – № 2. – С. 300–304.

Нижегородский государственный
технический университет

Поступили
первый вариант 28.03.1996
окончательный вариант 03.09.1997