ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

УДК 517

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ

МОМЕНТЫ СТИЛТЬЕСА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА A

Введение

Проблема моментов Стилтьеса (МС) состоит в отыскании функции $F(x)$, для которой

$$\int_0^\infty F(x)x^n dx = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где c_n — заданные числа. Если $F(x)\exp(\beta\sqrt{x}) \in L(0,\infty)$ при $\beta > 0$, то решение задачи единственно с точностью до значений на множествах меры нуль. С другой стороны, для функций $F_\mu(x) = \exp(-x^\mu \cos\mu\pi)\sin(x^\mu \sin\mu\pi)$, $0 < \mu < \frac{1}{2}$, имеем $c_n = 0$ для всех n (см. работы Харди [1]–[2] или их изложение в монографии Титчмарша ([3], с. 406–409)).

В последнее время вновь возник интерес к этой проблеме. В работе [4] введен класс функций $S_+ : F(x) \in C^\infty[0,\infty)$; $F^{(k)}(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} t^m F^{(k)}(t) = 0$ для всех k, m и установлено, что для любого набора $\{c_n\} \subset C$ проблема МС разрешима в этом классе. В работе [5] особо выделим результат о том, что решение проблем МС всегда можно выбрать в классе целых функций фиксированного порядка $\rho > 1/2$. Проблема МС в классе целых функций порядка $\rho < 1/2$ не имеет смысла, поскольку соответствующие несобственные интегралы расходятся. Поэтому в статье [6] задача рассматривалась в классе решений $F(x) = F^*(x)\exp(-\sqrt[4]{x})$, где $F^*(z)$ — целая функция порядка $\rho \le 1/4$. В случае $\rho = 1/4$ требовалось выполнение неравенства $h(0) < 1$, где $h(\theta)$ — индикатор целой функции $F^*(z)$ относительно данного порядка. Для целой функции экспоненциального типа (ц. ф. э. т.) $F^*(z^4)$ сопряженная индикаторная диаграмма $\overline{K}$ лежала внутри круга $|z| \le \sqrt{2}/2$ и удовлетворяла условию $R_1 \subseteq \overline{K}$. Здесь R_λ — квадрат с вершинами $t_1 = -t_3 = -\lambda(1+i)/2$, $t_2 = -t_4 = -\lambda(1-i)/2$.

Основная цель статьи — исследование лакунарной проблемы МС

$$L(F,k) \equiv \int_0^\infty F(x)\exp(-\lambda x)(1 + 2\cos 2\lambda x)x^{4k+2} = c_{4k+2}, \quad \lambda > 0, \tag{1}$$

где $F(x)$ — нечетная ц. ф. э. т. класса A ([7], гл. V), представимая в виде

$$F(z) = \int_{-\lambda}^{\lambda} a(x)\exp(izx)dx. \tag{2}$$

Напомним, что $F(z) \in A \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^\infty |\mathrm{Im}(a_k^{-1})| < \infty$, где a_k — корни $F(z)$, пронумерованные в порядке возрастания модулей. Особенно хорошо изучены свойства интегралов (2) ([8], гл. 1, § 4, п. 3) в случае, когда их плотности являются функциями ограниченной вариации. Стоит отметить, что это целые функции вполне регулярного роста (в. р. р.), ограниченные на вещественной оси. Их сопряженной индикаторной диаграммой является отрезок мнимой оси $\Gamma = [-\lambda i, \lambda i]$, если только в некоторой окрестности концов имеем $a(x) \ne 0$, что далее и предполагается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-81019-Бел_а).

Статья состоит из двух разделов. В § 1 рассматривается двенадцатиэлементное функциональное уравнение

$$(Vf)(z) = (V_1 f)(z) - (V_1 f)(iz) = g(z), \quad z \in R_\lambda, \tag{3}$$

где $(V_1 f)(z) \equiv f(z-\lambda)+f(z+\lambda)+f(z-\lambda-2\lambda i)+f(z+\lambda-2\lambda i)+f(z-\lambda+2\lambda i)+f(z+\lambda+2\lambda i)$. Решение отыскивается в классе четных функций B, представимых интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\tau - z)^{-1}\varphi(\tau)d\tau \tag{4}$$

с нечетной плотностью $\varphi(\tau) \in H_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu \le 1$ (удовлетворяющих условию Гёльдера на Γ). Другими словами, это класс четных функций, голоморфных в плоскости с двубережным разрезом по Γ и исчезающих на бесконечности. Считаем, что свободный член $g(z)$ аналитичен в R_λ и удовлетворяет условию $g(iz) = -g(z)$, причем $g^+(t \pm \lambda) \in H_\mu(\Gamma \pm \lambda)$. Предложен метод равносильной регуляризации уравнения (3), использующий свойства двоякопериодических функций.

В § 2 проблема МС (1) сводится к функциональному уравнению (3) с помощью преобразования Бореля ([9], гл. 1, § 1). Рассматриваются также различные биортогональные разложения, связанные с проблемой МС.

§ 1. Приступим к непосредственному исследованию уравнения (3). Прежде всего отметим, что решение и свободный член принадлежат к различным классам голоморфных функций. Особым множеством решения является разрез Γ, а особое множество суммы $(Vf)(z)$ включает в себя и границу ∂R_λ, т. е. оно разделяет точки 0 и ∞. Поэтому свободный член не обязан аналитически продолжаться через какой-либо отрезок границы. Даже в самом благоприятном в смысле аналитического продолжения случае однородного уравнения

$$(Vf)(z) = 0, \quad z \in R_\lambda, \tag{5}$$

нельзя, вообще говоря, заключить, что оно выполняется и в окрестности бесконечно удаленной точки (более подробно см. [10]).

Воспользуемся интегральным представлением (4). Тогда

$$(3) \Leftrightarrow (A\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(\tau)E(z,\tau)d\tau = g(z), \quad z \in R_\lambda, \tag{6}$$

где

$$E(z,\tau) = E_1(z,\tau) - E_1(iz,\tau). \tag{7}$$

Для сокращения записи далее используем обозначения $\omega(a) = (\tau - t + a)^{-1}$, $\omega_1(a) = (\tau - it + a)^{-1}$, применяя которые получим формулу

$$E_1(t,\tau) = E_1(\tau - t) = \omega(\lambda) + \omega(-\lambda) + \omega(\lambda + 2\lambda i) + \omega(2\lambda i - \lambda) + \omega(\lambda - 2\lambda i) + \omega(-\lambda - 2\lambda i). \tag{8}$$

Пусть теперь в соотношении (3) $z \to t \pm \lambda$, $t \in \Gamma$. Тогда для соответствующих пределов имеем $\lim (A\varphi)(z) = \pm\varphi(t)/2 + (A\varphi)(t \pm \lambda)$, где последнее слагаемое получено формальной заменой в (6) переменной z на $t \pm \lambda$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Применяя к предельным значениям формулу Сохоцкого–Племеля, придем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$(T\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = g_1(t), \tag{9}$$

где $g_1(t) = g^+(t+\lambda) - g^+(t-\lambda)$. Его ядро

$$\begin{aligned} K(t,\tau) = E(t+\lambda,\tau) - E(t-\lambda,\tau) = \omega(-2\lambda) + \omega(-2\lambda - 2\lambda i) + \omega(2\lambda i - 2\lambda) - \omega_1(-\lambda - 3\lambda i) - \\ - \omega_1(\lambda - 3\lambda i) - \omega(2\lambda) - \omega(2\lambda + 2\lambda i) - \omega(2\lambda - 2\lambda i) + \omega_1(3\lambda i - \lambda) + \omega_1(3\lambda i + \lambda) \end{aligned} \tag{10}$$

ограничено на Γ (проверяется непосредственно). Более того, любая частная производная ядра непрерывна.

Функция $g_1(t)$ нечетна. А ядро (10) удовлетворяет условию $K(-t,-\tau) = K(t,\tau)$. Поэтому в случае разрешимости неоднородного уравнения (9) всегда существует его нечетное решение. Представим ядро (10) в виде $K = K_1 + K_2$. В ядро K_1 входят все слагаемые вида $\omega(a)$, а ядро K_2 имеет вид $\omega_1(a)$. Поэтому $K_1 = -4\lambda[(\alpha+4\lambda^2)^{-1} + 2(\alpha+8\lambda^2)(\alpha^2+64\lambda^4)^{-1}]$, где $\alpha = -(\tau-t)^{-1}$ и $\alpha \in [0, 4\lambda^2]$. Вместо уравнения с ядром (10) теперь рассмотрим другое уравнение с ядром $G(t,\tau) = 2^{-1}[K_1(t,\tau) - K_1(t,-\tau)] + K_2(t,\tau)$. Заметим, что к этому уравнению применим принцип сжимающих отображений в банаховом пространстве $C(\Gamma)$. Действительно, $\max|K_1| = 2\lambda^{-1}, \min|K_1| = 1{,}7\lambda^{-1}$, а каждое из четырех слагаемых, составляющих ядро K_2, по модулю не превосходит величины $\lambda^{-1}/2$. Поскольку $K_1(t,\tau) < 0$, то отсюда следует оценка $\left|\int\limits_\Gamma \varphi(\tau)G(t,\tau)d\tau\right| \le 4{,}3\|\varphi\|$. Итак, существует нечетное решение φ данного интегрального уравнения, которое автоматически удовлетворяет и уравнению (9). Тем самым доказана безусловная разрешимость интегрального уравнения (9). Стоит отметить, что на самом деле его решение принадлежит более узкому классу — удовлетворяет условию Гёльдера на Γ. Это прямо следует из ограничений, наложенных на правую часть уравнения (9) и ранее отмеченных "хороших" свойств ядра (10).

Теперь осуществим обратный переход от интегрального уравнения (9) к функциональному уравнению (3), т. е. докажем равносильность данной регуляризации. Вообще говоря, придем к другому соотношению $(A\varphi)(z) = g(z) + h(z)$, $z \in R_\lambda$. Функция $h(z)$ голоморфна в R_λ и $h(iz) = -h(z)$. Кроме того, $h^+(t+\lambda) = h^+(t-\lambda)$, $t \in \Gamma$, причем $h^+(t\pm\lambda) \in C(\Gamma_1 \pm \lambda)$ на любом отрезке $\Gamma_1 \subset \Gamma$. В вершинах квадрата у функции $h(z)$ могут быть, самое большее, логарифмические особенности. Но тогда $h(z)$ является постоянной как двоякопериодическая функция, имеющая в параллелограмме периодов лишь особенности интегрируемого порядка в вершинах. Ясно, что эта постоянная обязательно будет нулем. Получена

Теорема 1. *Функциональное уравнение* (3) *в классе B безусловно разрешимо и имеет единственное решение. Это интеграл типа Коши* (4) *с плотностью $\varphi = T^{-1}g_1$.*

§ 2. Перейдем в уравнении (3) от четных нижних функций $f(z)$ к ассоциированным с ними по Борелю нечетным ц. ф. э. т. $F(z)$ (класс B_λ). Для этого воспользуемся формулой

$$f(z) = \int_0^\infty F(x)exp(-zx)dx, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Тогда при $z \in R_\lambda$ и $\operatorname{Re} z > 0$ имеем

$$(3) \Leftrightarrow 2\int_0^\infty F(x)\exp(-\lambda x)(1+2\cos 2\lambda x)(\cos zx - \operatorname{ch} zx)dx = g(z). \tag{11}$$

Обратим внимание на своеобразие этого уравнения. Его ядро состоит из двух слагаемых. Если бы одно из этих слагаемых отсутствовало, то такое уравнение решалось бы в явном виде с помощью свойств косинус-преобразования Фурье. При этом областью сходимости соответствующего несобственного интеграла была бы полоса шириной 2λ (вертикальная или горизонтальная), симметричная относительно осей координат. В рассматриваемом же случае областью сходимости является квадрат R_λ, образованный пересечением горизонтальной и вертикальной полос. Поэтому и возникает необходимость исследования уравнения (3) методом интегральных уравнений.

Если положить $c_{4k+2} = -g^{(4k+2)}(0)/4$, то (11) $\Leftrightarrow$ (1). Рассмотрим степенной ряд

$$g(z) = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^\infty \frac{c_{4k+2}z^{4k+2}}{(4k+2)!}. \tag{12}$$

Теорема 2. *Пусть функция* (12) *удовлетворяет всем ранее наложенным ограничениям. Тогда проблема МС в классе B_λ безусловно разрешима и имеет единственное решение.*

Замечание. Для справедливости теоремы достаточно потребовать, например, чтобы радиус сходимости степенного ряда (12) был больше, чем $\lambda\sqrt{2}$.

Пусть $g_m(z) = -z^{4m+2}/4(4m+2)!$. Возьмем систему интегралов типа Коши

$$\{f_m\} : Vf_m = g_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{13}$$

и систему ц. ф. э. т. $\{F_m\}$, ассоциированных с ними по Борелю. Очевидно,

$$L(F_m, k) = \delta_{m,k} \tag{14}$$

и $F_m(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_{k,m} z^{2k+1}$, $\operatorname{Im}\beta_{k,m} = 0$ для всех k, m. Другими словами, эти функции принимают вещественные значения на действительной оси. Справедливы неравенства

$$|\varphi_m(\tau)| < A_1(\lambda\sqrt{2})^{4m}[(4m+2)!]^{-1}, \quad \tau \in \Gamma; \quad |F_m(x)| < A_2(\lambda\sqrt{2})^{4m}[(4m+3)!]^{-1}, \tag{15}$$

где $\varphi_m(\tau)$ — плотности интегралов типа Коши (13), а $A_j > 0$ — некоторые постоянные, $j = 1, 2$. Для получения второй оценки используется условие $\varphi_m(\tau) \in C^\infty(\Gamma)$, соотношение (10) и интегрирование по частям.

Под классом $[\rho, \sigma)$ будем, как обычно, понимать множество целых функций порядка $\rho_1 \leq \rho$ и типа $\sigma_1 < \sigma$ (относительно порядка ρ).

Теорема 3. *Коэффициенты Тейлора четной ц. ф. э. т.*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^{4k+2}}{(4k+2)!}; \quad \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[4k+2]{|a_k|} < \lambda$$

могут быть найдены из условий биортогональности (14), *т. е.*

$$a_k = (4k+2)! \int_0^\infty F(x)F_m(x)exp(-\lambda x)(1 + 2\cos 2\lambda x)dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{16}$$

Доказательство. Для данных ц. ф. э. т. класса $[1, \lambda)$ несобственные интегралы (16) абсолютно сходятся. Остается заметить, что при $X > 0$ с использованием условий биортогональности (14) имеем

$$\left| \int_0^X F_m(x)exp(-\lambda x)(1 + 2\cos 2\lambda x)x^{4k+2}dx \right| \leq A_3 \int_X^\infty x^{4k+2}exp(-\lambda x)dx,$$

где $m \neq 4k+2$, а постоянная $A_3 > 0$ и не зависит от k. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству известной теоремы Харди об условиях почленной интегрируемости на интервале $(0, \infty)$ степенного ряда, умноженного на $\exp(-x)$ ([11], гл. 1, § 7, п. 9).

Нечетные плотности интегралов типа Коши (13) по самому своему определению и в силу формулы (7) удовлетворяют равенствам

$$\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \varphi_m(\tau) E_1^{(4k+2)}(\tau)d\tau = \delta_{m,k}. \tag{17}$$

Рассмотрим круговую луночку D^*, ограниченную дугами $l^\pm$ двух окружностей $|z \pm \lambda| = \lambda\sqrt{2}$ (знаки согласованы), причем $0 \in D^*$. Дуга l^+ (l^-) лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ $(\operatorname{Re} z \leq 0)$ и $l^+ \cup l^- = \Gamma^*$, где $\Gamma^* = \partial^+ D^*$. Функции φ_m голоморфны в замыкании $\overline{D^*}$. Более того, они голоморфны в плоскости с двумя вертикальными разрезами, соединяющими точки $2\lambda \pm 3\lambda i$, $-2\lambda \pm 3\lambda i$ и четырьмя горизонтальными разрезами, соединяющими точки $2\lambda \pm \lambda i$, $4\lambda \pm \lambda i$ соответственно с точками $-2\lambda \pm \lambda i$ и $-4\lambda \pm \lambda i$ (в последнем случае знаки согласованы). Эти разрезы не разделяют точки 0 и ∞, причем в точке $z = \infty$ у функции φ_m полюс порядка $4m+1$. По этому поводу см. формулы (8) и (9). Обозначим через $B(\lambda)$ класс нечетных функций $\Phi(z)$, голоморфных в области D^* и удовлетворяющих условию $\Phi^+(t) \in C^2(\Gamma^*)$. Поставим такой функции в соответствие ряд

$$\Phi(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m \varphi_m(z), \quad z \in D^* \tag{18}$$

с естественным образом определенными коэффициентами

$$\theta_m = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(t) E_1^{(4m+2)}(t) dt. \tag{19}$$

Теорема 4. *Пусть* $\Phi(z) \in B(\lambda)$ *и* $\Phi(i\lambda) = 0$. *Тогда в формуле* (18) *имеет место знак равенства, причем ряд сходится абсолютно и равномерно в замыкании* $\overline{D^*}$.

Доказательство. Дважды проинтегрируем по частям интеграл в правой части равенства (19), взяв за u соответственно Φ и Φ'. Затем используем тождества

$$\int_{\Gamma} \Phi''(\tau)[(\tau-\lambda)^{-k} + (\tau+\lambda)^{-k}] d\tau = \int_{l^+} \Phi''^+(\tau)(\tau+\lambda)^{-k} d\tau - \int_{l^-} \Phi''^+(\tau)(\tau-\lambda)^{-k} d\tau,$$

справедливые в силу теоремы Коши. Первое из неравенств (15) остается справедливым, если переменную $\tau \in \Gamma$ заменить на $z \in \overline{D^*}$. Поэтому при $m \to \infty$ имеем $|\theta_m \varphi_m(t)| \sim m^{-2}$, при $t \in \partial D^*$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (18).

Теперь докажем, что ряд (18) сходится именно к той функции, по которой он был построен. Предположим противное. Обозначим через f разность между исходной функцией и рядом (18). Все коэффициенты (19) разности f равны нулю, т.е. в силу нечетности имеем (5) $\Rightarrow f \equiv 0$.

Следствие. Рассмотрим нечетную ц. ф. э. т. (2), плотность которой удовлетворяет условию $a(iz) \in B(\lambda)$ и $a(\lambda) = 0$. Тогда $F(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \theta_m F_m(z)$, $\theta_m = L(F, m)$, причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в комплексной плоскости. Для получения этой формулы достаточно обе части соотношения (18), где $\Phi(z) = a(iz)$, умножить на $exp(zw)dz$ и проинтегрировать по Γ.

Перепишем равенства (17) в равносильном виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \varphi_m(\tau) h_k(\tau) d\tau = \delta_{m,k}, \tag{20}$$

вытекающем из теоремы Коши. Здесь

$$h_k(\tau) = 2[(\tau+\lambda)^{-k} + (\tau+\lambda-2\lambda i)^{-k} + (\tau+\lambda+2\lambda i)^{-k}], \quad \tau \in l^+,$$

и $h_k(\tau) = h_k(-\tau)$. Более удобно в соотношениях (20) вместо функции $h_k(\tau)$ взять граничные значения $H_k^-(\tau)$ соответствующих интегралов типа Коши

$$H_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} h_k(t)(z-t)^{-1} dt, \quad z \notin \overline{D^*}.$$

Пусть $\overline{G}$ — дополнение D^* до всей плоскости. Рассмотрим нечетную функцию

$$F_t(z) = 2^{-1}[(t-z)^{-1} - (t+z)^{-1} + z\lambda^{-1} i((t-i\lambda)^{-1} - (t+i\lambda)^{-1})],$$

где $t \in G$. К этой функции применима теорема 4, т. е.

$$F_t(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [H_k(t) - \beta_k(t^2+\lambda^2)^{-1}] \varphi_k(z), \quad z \in \overline{D^*}; \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^*} H_k(t) t\, dt. \tag{21}$$

Пусть далее $H(z)$ — четная функция, аналитическая на $\overline{G}$, причем в бесконечно удаленной точке у нее нуль не менее четвертого порядка. Возьмем замкнутый контур L, лежащий в D^*, на котором и вне которого $H(z)$ — аналитическая функция. Поскольку t лежит вне L, то $H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L H(z)F_t(z)dz$. Подставляя сюда вместо ядра этого интеграла разложение (21), получим

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k [H_k(t) - \beta_k (t^2 + \lambda^2)^{-1}], \quad t \in G, \quad \gamma_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L H(z)\varphi_k(z)dz, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (22)$$

Теорема 5. *Каждую четную функцию $H(t)$, аналитическую на $\overline{G}$ и имеющую на бесконечности нуль не менее четвертого порядка, можно в области G представить рядом* (22).

Литература

1. Hardy G.H. *On Stieltjes "probleme des moments"* // Messenger of Math. – 1916. – V. 46. – P. 175–182.
2. Hardy G.H. *On Stieltjes "probleme des moments"* // Messenger of Math. – 1917. – V. 47. – P. 81–88.
3. Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 479 с.
4. Duran A.I. *The Stieltjes moments problem for rapidly decreasing functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 107. – P. 631–641.
5. Попов А.Ю. *О проблеме моментов быстро убывающих функций* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 1. – С. 66–74.
6. Гарифьянов Ф.Н. *Моменты Стилтьеса целых функций экспоненциального типа* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67. – № 5. – С. 674–679.
7. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.
8. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
9. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* – М.: Наука, 1967. – 240 с.
10. Гарифьянов Ф.Н. *Функциональные уравнения, связанные с автоморфными формами.* – Казань: Изд-во Казанск. гос. энерг. ун-та, 2003. – 124 с.
11. Титчмарш Е. *Теория функций.* – М.: Наука, 1980. – 463 с.

Казанский государственный энергетический университет

Поступила 26.10.2004