И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 546.17

ХАМЗА БУЖУФ, В.В. МУХИН

О ТОПОЛОГИЯХ НА ПОЛУГРУППАХ И ГРУППАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СЕМЕЙСТВАМИ ОТКЛОНЕНИЙ И НОРМ

Способ задания топологии на полугруппах с помощью отклонений [1] не является универсальным в следующем смысле: существуют топологические полугруппы с неравномеризуемой топологией. В качестве примера можно взять не равномеризуемое топологическое пространство X с умножением $(x,y) \mapsto y$, которое, очевидно, непрерывно. Тем не менее вопрос описания семейств отклонений, порождающих топологию на X, согласованную с полугрупповой операцией, представляет интерес. Часть результатов работы была анонсирована авторами в [2]. В [3] такие семейства отклонений определялись посредством инвариантной меры.

Напомним, что отображение $f : X \times X \to [0,+\infty)$ называется отклонением на множестве X, если $f(x,y) = f(y,x)$ и $f(x,y) \le f(x,z) + f(z,y)$ для любых x, y, z из X. Отклонение f на полугруппе X называется инвариантным слева (справа), если $f(xy,xz) = f(y,z)$ $\big(f(yx,zx) = f(y,z)\big)$ для любых x, y, z из X.

Каждое семейство $\{f\}$ отклонений на множестве X порождает стандартным образом топологию на X: множества $\{x \in X \mid f(x,y) < a\}$, где $y \in X$, $f \in \{f\}$ и $a > 0$, образуют предбазу этой топологии. Достаточно просто доказывается

Теорема 1. *Пусть топология τ на полугруппе X порождена семейством инвариантных слева отклонений. Тогда левые сдвиги $x \to ax$ $(x \in X)$ непрерывны в (X,τ) для каждого $a \in X$.*

Ясно, что аналогичная теорема верна и в случае семейства инвариантных справа отклонений. Далее не будем останавливаться на подобных замечаниях.

Теорема 2. *Пусть топология τ на X порождена семейством $\{f\}$ инвариантных слева отклонений. Тогда следующие условия равносильны:*

А) *для любых $a,x \in X$, каждого отклонения $f \in \{f\}$ и каждого числа $\alpha > 0$ существуют отклонения $f,\dots,f_n$ из $\{f\}$ и число $\beta > 0$ такие, что $f(sa,xa) < \alpha$ для всех $s \in X$ таких, что $f_i(s,x) < \beta$ одновременно для всех $i = 1,\dots,n$;*

Б) *полугрупповая операция $(x,y) \mapsto xy$ непрерывна;*

В) *правые сдвиги $x \mapsto xa$ непрерывны для каждого $a \in X$.*

Если, кроме того, X — группа, то каждое из условий А), Б), В) *влечет непрерывность инверсии.*

Доказательство. Пусть выполнено условие А). Пусть $x,y \in X$, $\varepsilon > 0$, $g_1,\dots,g_n \in \{f\}$ и $W = \{t \in X \mid g_i(t,xy) < \varepsilon,\ i = 1,\dots,n\}$. Тогда существуют $f_1,\dots,f_m \in \{f\}$ и $\beta > 0$ такие, что $g_1(sy,xy) < \varepsilon/2$ для каждого $i = 1,\dots,n$ при всех $s \in X$ таких, что $f_j(s,x) < \beta$ одновременно для всех $j = 1,\dots,m$. Пусть s принадлежит окрестности $U = \{s \in X \mid f_j(s,x) < \beta,\ j = 1,\dots,m$ точки x, а h из окрестности $V = \{h \in X \mid g_i(h,y) < \varepsilon/2,\ i = 1,\dots,n\}$ точки y. Тогда для $i = 1,\dots,n$

имеем $g_i(sh,xy) \le g_i(sh,sy) + g_i(sy,xy) < g_i(h,y) + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Следовательно, $sh \in W$, и значит, умножение в (X,τ) непрерывно; т.е. из А) следует Б).

Очевидно, что условие Б) влечет условие В).

Пусть теперь выполнено условие В). Пусть $a,x \in X$, $\alpha > 0$ и $f \in \{f\}$. Тогда существует окрестность U точки x такая, что Ua содержится в окрестности $V = \{t \in X \mid f(t,xa) < \alpha\}$ точки xa. Значит, существуют $f_1,\dots,f_n \in \{f\}$ и число $\beta > 0$ такие, что множество $\{s \in X \mid f_i(s,x) < \beta,\ i = 1,\dots,n\}$ содержится в U. Следовательно, для таких s имеет место неравенство $f(sa,xa) < \alpha$; т.е. выполняется условие А), а значит, условия А), Б), В) равносильны.

Пусть X — группа и пусть условие А) выполнено. Пусть $\varepsilon > 0$, $U = \{z \in X \mid g_i(z,x^{-1}) < \varepsilon,\ i = 1,\dots,n\}$ где $x \in X$ и $g_1,\dots,g_n \in \{f\}$. Тогда существуют $f_1,\dots,f_m \in \{f\}$ и число $\beta > 0$ такие, что при $i = 1,\dots,n$ $\quad g_i(sx^{-1},xx^{-1}) < \varepsilon$ для всех s из окрестности $V = \{s \in X \mid f_j(s,x) < \beta,\ j = 1,\dots,m\}$ точки x. Если $s \in V$, то для $i = 1,\dots,n$ имеем $g_i(s^{-1},x^{-1}) = g_i(ss^{-1},sx^{-1}) = g_i(xx^{-1},sx^{-1}) = g(sx^{-1},xx^{-1}) < \varepsilon$, т.е. $s^{-1} \in U$. Следовательно, инверсия непрерывна. $\square$

Пусть f — отклонение на полугруппе X. Для каждого $z \in X$ формула $f_z(x,y) = f(xz,yz)$ задает отклонение на X, причем, если f инвариантно слева, то и f_z инвариантно слева.

Будем говорить, что семейство отклонений $\{f\}$ X-замкнуто справа, если $f_z \in \{f\}$ для каждого $f \in \{f\}$ и каждого $z \in X$.

Простой проверкой устанавливается

Теорема 3. *Если семейство инвариантных слева отклонений X-замкнуто справа, то оно удовлетворяет условию* А).

Следствие 1. Если топология на полугруппе X порождена X-замкнутым справа семейством инвариантных слева отклонений, то полугрупповая операция непрерывна; если, кроме того, X — группа, то и инверсия непрерывна.

Представляет интерес следующее приложение полученных результатов. Пусть μ — конечно-аддитивная мера, определенная на кольце S подмножеств полугруппы X и левоинвариантная на нем. Если $S_0 \subset S$ и для каждого $A \in S_0$ $\mu(A) < \infty$ и $xA \in S_0$, то функция $f_A(x,y) = \mu(xA \triangle yA)$ является инвариантным слева отклонением [3]. Так как $f_A(xz,yz) = \mu(xzA \triangle yzA) = f_{zA}(x,y)$, то семейство $\{f_A\}_{A\in S_0}$ X-замкнуто справа. Следовательно, топология, порожденная этим семейством, превращает X в топологическую полугруппу.

Теорема 4. *Для того чтобы топология τ на группе G была согласована со структурой группы, необходимо и достаточно, чтобы она была порождена G-замкнутым справа семейством инвариантных слева отклонений.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 3. Если же топология τ на группе G согласована с групповой структурой, то на G ([1], с.83) существует семейство инвариантных слева отклонений, порождающих топологию τ. Минимальное G-замкнутое справа семейство инвариантных слева отклонений на G, содержащее указанное выше семейство, будет порождать данную топологию τ. $\square$

Известно, что на группе G топология, согласованная со структурой группы, может быть построена с помощью семейства норм [4].

Квазинормой на G назовем функцию $N : G \to [0,+\infty)$ такую, что $N(e) = 0$, $N(x,y) \le N(x) + N(y)$, $x,y \in G$. Квазинорма, для которой $N(x) = N(x^{-1})$ $(x \in G)$, называется нормой.

Пусть $\{N\}$ — непустое семейство норм на G. Тогда для $N \in \{N\}$ формула $f_N(x,y) = N(y^{-1}x)$ задает инвариантное слева отклонение на G. Топологию, порожденную семейством $\{f_N\}$, будем называть левой топологией на G. Правая топология определяется с помощью отклонений $g_N(x,y) = N(xy^{-1})$.

Теорема 5. *Пусть $\{N\}$ — непустое семейство норм на группе G. Тогда следующие условия равносильны:*

Г) *для каждого $a \in G$, каждой нормы $N \in \{N\}$ и каждого числа $\alpha > 0$ существуют нормы $N_1, \dots, N_n \in \{N\}$ и число $\beta > 0$ такие, что $Naxa^{-1} < \alpha$ для всех $x \in G$ таких, что $N_i(x) < \beta$ одновременно для всех $i = 1, \dots, n$;*

Д) *правая и левая топологии на G совпадают;*

Е) *левая топология согласована со структурой группы.*

Доказательство. Условие Г) равносильно условию А) для семейства $\{f_N\}$. Поэтому из теоремы 2 следует, что условия Г) и Е) равносильны.

При выполнении Д) отображение $x \mapsto axa^{-1}$ непрерывно в единице e группы G для $a \in G$. Поэтому для $N \in \{N\}$ существует окрестность W точки e такая, что для всех $x \in W$ имеет место включение $axa^{-1} \in \{z \in G \mid N(z) < \alpha\}$. Так как найдутся нормы $N_1, \dots, N_n \in \{N\}$ и число $\beta > 0$ такие, что $W \supset \{x \in G \mid N_i(x) < \beta,\ i = 1, \dots, n\}$, то для $\{N\}$ выполнено условие Г).

Совокупность B всех множеств вида $\{x \in G \mid N_i(x) < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n\}$, где $\varepsilon > 0$, $N_1, \dots, N_n \in \{N\}$, образует фундаментальную систему окрестностей точки e в левой и правой топологии на G.

Пусть теперь левая топология согласована с групповой структурой G. Тогда семейство $By = \{Vy \mid V \in B\}$ является фундаментальной системой окрестностей точки y. Так как правые сдвиги непрерывны для правой топологии, то By является фундаментальной системой окрестностей точки y и для правой топологии. Значит, эти топологии совпадают, т.е. условие Е) влечет Д). $\square$

Топологию τ на G назовем нормируемой, если существует семейство норм на G такое, что топология τ совпадает с левой или правой топологией на G.

Из теорем 4 и 5 и того факта, что для любого инвариантного слева (справа) отклонения f на G функция $N(x) = f(x, e)$ является нормой на G, вытекает

Теорема 6. *Топология τ на группе G согласована с групповой структурой тогда и только тогда, когда она нормируема семейством норм, удовлетворяющим условию Г).*

В [5] (теорема 1) утверждается, что если в группе G с топологией τ сдвиги и инверсия непрерывны, то операция умножения непрерывна тогда и только тогда, когда для любой окрестности u единицы e существует непрерывная квазинорма N такая, что $N(G \setminus U) = \{1\}$.

Прямая Зоргенфрея является примером, показывающим, что условие непрерывности инверсии в этой теореме отбросить нельзя.

Теорема 7. *Топология τ на группе G, для которой сдвиги непрерывны, согласована со структурой группы тогда и только тогда, когда для любой окрестности U единицы e существует непрерывная норма N на G такая, что $N(G \setminus U) = \{1\}$*

Доказательство. Пусть $\{N\}$ — семейство непрерывных норм на G, удовлетворяющих условиям теоремы. Тогда правая и левая топологии на G совпадают с τ. Из теоремы 5 следует, что (G, τ) — топологическая группа.

Необходимость следует из теоремы 6 и того, что для любых норм $N_1, \ldots, N_n$ на G и любого $\varepsilon > 0$ функция $N(x) = \min\{1,\ \varepsilon^{-1} \max\{N_1(x), \ldots, N_h(x)\}\}$ является нормой на G, для которой $N(G \setminus U) = \{1\}$, где $U = \{x \in G \mid N_i(x) < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$. $\square$

Литература

1. Бурбаки Н. *Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.* – М.: Наука, 1975. – 408 с.
2. Бужуф Х., Мухин В.В. *О квазинормах на группах с топологией* // Алгебра и анализ. Тез. докл. Ч. II – Казань, 1994. – С. 139.
3. Мухин В.В. *О топологизации полугрупп с инвариантной мерой* // Укр. матем. журн. – 1983. – Т. 35. – № 1. – С. 103–106.
4. Марков А.А. *О свободных топологических группах* // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1945. – Т. 9. – С. 3–64.
5. Булгаков Д.Н., Ускова Э.Н. *Квазинормы на полутопологических группах и топологических лупах* // Тез. докл. Третьей Международн. конф. по алгебре. – Красноярск, 1993. – С. 56.

Гомельский государственный университет

Поступила
19.12.1994