ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 514.75

А.В. СТОЛЯРОВ

ДВОЙСТВЕННЫЕ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ

В данной работе исследуется внутренняя геометрия нормализованной m-мерной регулярной гиперполосы H_m, погруженной в n-мерное проективное пространство P_n $(m < n-1)$. Результаты получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г.Ф. Лаптевым [1]–[3]. Все исследования проведены в минимально специализированной системе отнесения. Во всей работе индексы принимают следующие значения:

$$\overline{I},\overline{K},\overline{L}=\overline{0,n};\quad \overline{i},\overline{j},\overline{k}=\overline{0,m};\quad i,j,k,l,s,t=\overline{1,m};\quad u,w=\overline{m+1,\,n-1}.$$

1. Пусть P_n — n-мерное проективное пространство, отнесенное к подвижному точечному реперу $R\equiv\{A_{\overline{K}}\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид $dA_{\overline{I}}=\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}A_{\overline{K}}$, где формы Пфаффа $\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}$ подчинены уравнениям структуры проективного пространства P_n ([4], с. 143)

$$D\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}=\omega_{\overline{I}}^{\overline{L}}\wedge\omega_{\overline{L}}^{\overline{K}},\quad \omega_{\overline{L}}^{\overline{L}}=0.$$

Известно [5], [6], что в репере 1-го порядка дифференциальные уравнения регулярной гиперполосы $H_m\subset P_n$ $(m<n-1)$ [7] имеют вид

$$\begin{gathered}\omega_0^n=\omega_0^v=\omega_v^n=0,\quad \omega_i^n=\Lambda_{ij}^n\omega_0^j,\quad \omega_i^u=\Lambda_{ij}^u\omega_0^j,\quad \omega_u^i=N_{uj}^i\omega_0^j,\\ \Lambda_{[ij]}^n=\Lambda_{[ij]}^u=0,\quad \Lambda_{s[i}^nN_{|u|j]}^s=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Отметим, что совокупность функций $\{\Lambda_{ij}^n\}$ образует тензор первого порядка, а каждый из наборов функций $\{\Lambda_{ij}^u,\Lambda_{ij}^n\}$, $\{N_{uj}^i\}$, $\{\Lambda_{ijk}^n,\Lambda_{ij}^n\}$ — геометрический объект 2-го порядка [2], причем имеют место уравнения

$$\begin{gathered}\nabla\Lambda_{ij}^n+\Lambda_{ij}^n\omega_0^0=\Lambda_{ijk}^n\omega_0^k,\quad \Lambda_{i[jk]}^n=0,\\ \nabla\Lambda_{ij}^u+\Lambda_{ij}^u\omega_0^0+\Lambda_{ij}^n\omega_n^u=\Lambda_{ijk}^u\omega_0^k,\quad \Lambda_{i[jk]}^u=0,\\ \nabla N_{uj}^i+N_{uj}^i\omega_0^0-\delta_j^i\omega_v^0=N_{ujk}^i,\quad N_{u[jk]}^i=0,\\ \nabla\Lambda_{ijk}^n+2\Lambda_{ijk}^n\omega_0^0+\Lambda_{(ij}^n\omega_{k)}^0-\Lambda_{(ij}^n\Lambda_{k)s}^n\omega_n^s=\Lambda_{ijks}^n\omega_0^s,\\ \Lambda_{ij[ks]}^n=\Lambda_{it}^n\Lambda_{j[k}^wN_{|w|s]}^t+\Lambda_{tj}^n\Lambda_{i[k}^wN_{|w|s]}^t.\end{gathered}\tag{2}$$

В силу регулярности гиперполосы тензор Λ_{ij}^n является невырожденным, т.е. $\Lambda\overset{\text{def}}{=}|\Lambda_{ij}^n|\neq0$; относительный инвариант Λ первого порядка удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\ln\Lambda+m(\omega_0^0+\omega_n^n)-2\omega_k^k=\Lambda_k\omega_0^k,\quad \text{где}\quad \Lambda_k=\Lambda_n^{ji}\Lambda_{ijk}^n.\tag{3}$$

Компоненты обращенного тензора Λ_n^{ik} определяются из соотношений

$$\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kj}^n=\delta_j^i\tag{4}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\Lambda_n^{ij}-\Lambda_n^{ij}\omega_0^0=-\Lambda_n^{ik}\Lambda_n^{sj}\Lambda_{kst}^n\omega_0^t.\tag{5}$$

Продолжая уравнение (3), находим

$$\nabla\Lambda_i + \Lambda_i\omega_0^0 + (m+2)(\omega_i^0 - \Lambda_{ki}^n\omega_n^k) = \Lambda_{ik}\omega_0^k, \quad \Lambda_{[ik]} = 2\Lambda_{s[i}^u N_{|u|k]}^s. \tag{6}$$

В [5], [6] показано, что регулярная гиперполоса $H_m \subset P_n$ в 3-й дифференциальной окрестности внутренним образом порождает поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1}, уравнения которых относительно репера первого порядка имеют вид

$$\Lambda_{ij}^n x^i x^j + 2\frac{\Lambda_i}{m+2}x^i x^n + B_{uw}^n x^u x^w + 2b_w x^w x^n + S_n(x^n)^2 = 2x^0 x^n. \tag{7}$$

Заметим, что в каждой точке $A_0 \in H_m$ касательная плоскость $T_m(A_0)$ к базисной поверхности V_m гиперполосы и характеристика $\Pi_{n-m-1}(A_0)$ ее главной касательной гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_0)$ полярно сопряжены относительно гиперквадрики (7).

Доказано [6], что обращение в нуль симметричного тензора Дарбу второго порядка

$$\begin{gathered} D_{ijk}^n \stackrel{\text{def}}{=} (m+2)\Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{(ij}^n\Lambda_{k)}, \quad \nabla D_{ijk}^n + 2D_{ijk}^n\omega_0^0 = D_{ijks}^n\omega_0^s, \\ D_{ijks}^n = (m+2)\Lambda_{ijks}^n - \Lambda_{s(ij}^n\Lambda_{k)} - \Lambda_{(ij}^n\Lambda_{k)s}, \end{gathered} \tag{8}$$

есть условие касания 3-го порядка соприкасающихся гиперквадрик поля (7) с гиперполосой $H_m \subset P_n$.

2. Известно [5], [6], что нормализация гиперполосы $H_m \subset P_n$ в смысле Нордена–Чакмазяна [8], [9] равносильна заданию на H_m двух полей квазитензоров v_n^i, v_i^0:

$$\nabla v_n^i + \omega_n^i = v_{nk}^i\omega_0^k, \quad \nabla v_i^0 + \omega_i^0 = v_{ik}^0\omega_0^k, \tag{9}$$

определяющих соответственно поля нормалей первого $N_{n-m} \equiv [\Pi_{n-m-1}, N_n]$ и второго $N_{m-1} \equiv [N_i]$ родов, где

$$N_n = A_n + v_n^i A_i + a_n^w A_w, \quad N_i = A_i + v_i^0 A_0, \quad a_n^u \stackrel{\text{def}}{=} = \frac{1}{m}\Lambda_{ij}^u\Lambda_n^{ji}. \tag{10}$$

Условием взаимности [8] нормализации гиперполосы $H_m \subset P_n$ относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (7) является обращение в нуль тензора

$$\begin{gathered} T_k^0(v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Lambda_k}{m+2} - v_k^0 + \Lambda_{ks}^n v_n^s, \quad \nabla T_k^0(v) = T_{ks}^0\omega_0^s, \\ T_{[ks]}^0 = \frac{2}{m+2}\Lambda_{l[k}^u N_{|u|s]}^l - v_{[ks]}^0 - v_{n[k}^l\Lambda_{s]l}^n. \end{gathered} \tag{11}$$

В частности, нормализации Фубини (F_n^i, F_i^0) и Вильчинского $(-W_n^i, W_i^0)$, определяемые в третьей дифференциальной окрестности, являются взаимными [5], [6].

В [5], [6] в 3-й дифференциальной окрестности построено поле канонического пучка инвариантных нормалей первого рода v_n^i с осью $\Pi_{n-m-1}(A_0)$, определяемое полями квазитензоров F_n^i и $(-W_n^i)$ 3-го порядка

$$v_n^i = -W_n^i + \tau(W_n^i + F_n^i), \tag{12}$$

где τ — инвариантный параметр.

Отметим, что совокупность функций

$$T_n^i \stackrel{\text{def}}{=} W_n^i + F_n^i, \quad dT_n^i - T_n^i\omega_n^n + T_n^j\omega_j^i = T_{nj}^i\omega_0^j \tag{13}$$

есть тензор 3-го порядка. Обращение тензора T_n^i в нуль есть условие, при котором в каждой точке $A_0 \in H_m$ канонический пучок нормалей первого рода (12) вырождается в одну нормаль $N_{n-m}(A_0)$; такие гиперполосы $H_m \subset P_n$ по аналогии с поверхностью $V_2 \subset P_3$ [10] назовем *коинцидентными.*

3. Известно [11], что при нормализации в смысле Нордена–Чакмазяна регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ индуцируются две двойственные [12] аффинные связности ∇ и $\overline{\nabla}$ без кручения, определяемые соответственно системами форм Пфаффа

$$\theta^i_0 = \omega^i_0, \quad \theta^j_i = \omega^j_i - \delta^j_i \omega^0_0 + \delta^j_i v^0_k \omega^k_0 - v^j_n \omega^n_i + v^0_i \omega^j_0; \tag{14}$$

$$\overline{\theta}{}^i_0 = \theta^i_0 = \omega^i_0, \quad \overline{\theta}{}^j_i = \theta^j_i + [\Lambda^{js}_n \Lambda^n_{sik} - \Lambda^{jt}_n \Lambda^n_{ik}(v^0_t - \Lambda^n_{ts} v^s_n) - \delta^j_i (v^0_k - \Lambda^n_{ks} v^s_n) - \delta^j_k (v^0_i - \Lambda^n_{is} v^s_n)]\omega^k_0. \tag{15}$$

Формы (14), (15) удовлетворяют структурным уравнениям Картана–Лаптева [1], [2]

$$\begin{aligned} D\theta^i_0 &= \theta^k_0 \wedge \theta^i_k, \quad D\theta^j_i = \theta^k_i \wedge \theta^j_k + \frac{1}{2} r^j_{ist} \omega^s_0 \wedge \omega^t_0; \\ D\overline{\theta}{}^i_0 &= \overline{\theta}{}^k_0 \wedge \overline{\theta}{}^i_k, \quad D\overline{\theta}{}^j_k = \overline{\theta}{}^k_j \wedge \overline{\theta}{}^j_k + \tfrac{1}{2} \overline{r}{}^j_{ist} \omega^s_0 \wedge \omega^t_0. \end{aligned} \tag{16}$$

Тензоры кривизн r^j_{ist} и $\overline{r}{}^j_{ist}$ связностей ∇ и $\overline{\nabla}$ имеют строения

$$r^j_{ist} = 2(\Lambda^u_{i[s} N^j_{|u|t]} - v^j_{n[s} \Lambda^n_{t]i} - \delta^j_i v^0_{[st]} + v^0_{i[s} \delta^j_{t]} + v^k_n v^0_k \Lambda^n_{i[s} \delta^j_{t]} - v^k_n v^j_n \Lambda^n_{i[s} \Lambda^n_{t]k} - v^0_i v^0_{[s} \delta^j_{t]}); \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \overline{r}{}^j_{ist} = 2(&\Lambda^n_{ki} v^k_{n[s} \delta^j_{t]} + v^0_k v^k_n \Lambda^n_{i[s} \delta^j_{t]} - \Lambda^n_{ik} \Lambda^{jl}_n \Lambda^u_{l[s} N^k_{|u|t]} - \Lambda^{jk}_n v^0_{k[s} \Lambda^n_{t]i} - \delta^j_i \Lambda^n_{k[s} v^k_{|n|t]} - \\ &- \Lambda^{jk}_n v^0_k \Lambda^n_{i[s} v^0_{t]} - \Lambda^n_{il} v^l_n v^k_n \Lambda^n_{k[s} \delta^j_{t]}. \end{aligned} \tag{18}$$

Согласно работе [3], путем преобразования слоевых форм аффинной связности можно получить другие аффинные связности. Рассмотрим эту задачу на нормализованной гиперполосе $H_m \subset P_n$, взяв за базовую связность первую аффинную связность ∇ без кручения.

Другая аффинная связность $\overset{p}{\nabla}$ $(p = 1, 2, \dots)$ на нормализованной гиперполосе определяется системой форм $\{\omega^i_0, \overset{p}{\theta}{}^j_i$ $(p = 1, 2, \dots)$, в которой слоевые формы $\overset{p}{\theta}{}^j_i$ получаются в результате преобразования

$$\overset{p}{\theta}{}^j_i = \theta^j_i + \overset{p}{\Gamma}{}^j_{ik} \omega^k_0. \tag{19}$$

Требование того, чтобы система слоевых форм $\overset{p}{\theta}{}^j_i$ удовлетворяла структурным уравнениям Картана–Лаптева

$$\begin{aligned} D\overset{p}{\theta}{}^j_0 &= \overset{p}{\theta}{}^k_0 \wedge \overset{p}{\theta}{}^j_k + \frac{1}{2} \overset{p}{r}{}^j_{0st} \omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \\ D\overset{p}{\theta}{}^j_i &= \overset{p}{\theta}{}^k_i \wedge \overset{p}{\theta}{}^j_k + \frac{1}{2} \overset{p}{r}{}^j_{ist} \omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \end{aligned} \tag{20}$$

равносильно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\overset{p}{\Gamma}{}^j_{0k} - \overset{p}{\Gamma}{}^j_{0s} \omega^s_k + \overset{p}{\Gamma}{}^s_{0k} \omega^j_s = \overset{p}{\Gamma}{}^j_{0ks} \omega^s_0, \\ d\overset{p}{\Gamma}{}^j_{ik} + \overset{p}{\Gamma}{}^j_{ik} \omega^0_0 - \overset{p}{\Gamma}{}^j_{is} \omega^s_k - \overset{p}{\Gamma}{}^j_{sk} \omega^s_i + \overset{p}{\Gamma}{}^s_{ik} \omega^j_s = \overset{p}{\Gamma}{}^j_{iks} \omega^s_0; \end{aligned} \tag{21}$$

следовательно, при любом $p = 1, 2, \dots$ каждая из систем функций $\{\overset{p}{\Gamma}{}^j_{0k}\}$, $\{\overset{p}{\Gamma}{}^j_{ik}\}$ должна быть тензором.

В силу соотношений (2), (5), (8), (9), (11), (13) уравнениям (21) удовлетворяют следующие системы охватов:

$$\overset{1}{\Gamma}{}^j_{0k} = \overset{1}{\Gamma}{}^j_{ik} = 0, \tag{22}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^j_{0k} = 0, \quad \overset{2}{\Gamma}{}^j_{ik} = \frac{1}{m+2} \Lambda^{js}_n D^n_{sik}, \tag{23}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^j_{0k} = 0, \quad \overset{3}{\Gamma}{}^j_{ik} = -\frac{m+1}{m} \delta^j_i \Lambda^n_{ks} T^s_n, \tag{24}$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^j_{0k} = 0, \quad \overset{4}{\Gamma}{}^j_{ik} = \frac{1}{m+2} \Lambda^{js}_n D^n_{sik} - \frac{m+1}{m} \delta^j_i \Lambda^n_{ks} T^s_n, \tag{25}$$

$$\overset{5}{\Gamma}{}^j_{0k} = \delta^j_k, \quad \overset{5}{\Gamma}{}^j_{ik} = \frac{1}{m+2}\Lambda^{js}_n D^n_{sik} - \delta^j_i T^0_k(v) - \delta^j_k T^0_i(v), \tag{26}$$

$$\overset{6}{\Gamma}{}^j_{0k} = 0, \quad \overset{6}{\Gamma}{}^j_{ik} = \frac{1}{m+2}\Lambda^{js}_n D^n_{sik} + \delta^j_i T^0_k(v) + \delta^j_k T^0_i(v) + \Lambda^{jt}_n \Lambda^n_{ik} T^0_t(v). \tag{27}$$

Охваты (22) определяют исходную аффинную связность ∇, т. е. $\overset{1}{\nabla} \equiv \nabla$; аналогично, в силу соотношений (8), (15), (19) охваты (27) определяют двойственную аффинную связность $\overline{\nabla}$ без кручения, т. е. $\overset{6}{\nabla} \equiv \overline{\nabla}$.

Согласно соотношениям (19), (23)–(26) аффинные связности $\overset{2}{\nabla}, \dots, \overset{5}{\nabla}$ определяются соответственно слоевыми формами

$$\overset{2}{\theta}{}^j_0 = \overset{1}{\theta}{}^j_0 = \omega^j_0, \quad \overset{2}{\theta}{}^j_i = \overset{1}{\theta}{}^j_i + \frac{1}{m+2}\Lambda^{js}_n D^n_{sik}\omega^k_0, \tag{28}$$

$$\overset{3}{\theta}{}^j_0 = \overset{1}{\theta}{}^j_0 = \omega^j_0, \quad \overset{3}{\theta}{}^j_i = \overset{1}{\theta}{}^j_i - \frac{m+1}{m}\delta^j_i \Lambda^n_{ks} T^s_n \omega^k_0, \tag{29}$$

$$\overset{4}{\theta}{}^j_0 = \overset{1}{\theta}{}^j_0 = \omega^j_0, \quad \overset{4}{\theta}{}^j_i = \overset{1}{\theta}{}^j_i + \left(\frac{1}{m+2}\Lambda^{js}_n D^n_{sik} - \frac{m+1}{m}\delta^j_i \Lambda^n_{ks} T^s_n\right)\omega^k_0, \tag{30}$$

$$\overset{5}{\theta}{}^j_0 = 2\overset{1}{\theta}{}^j_0, \quad \overset{5}{\theta}{}^j_i = \overset{1}{\theta}{}^j_i + \left[\frac{1}{m+2}\Lambda^{js}_n D^n_{sik} - \delta^j_i T^0_k(v) - \delta^j_k T^0_i(v)\right]\omega^k_0. \tag{31}$$

Отметим, что из шести аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}, \dots, \overset{6}{\nabla}$, индуцируемых на нормализованной гиперполосе $H_m \subset P_n$, формы $\overset{1}{\theta}{}^j_0, \dots, \overset{6}{\theta}{}^j_0$ кручения всех связностей, за исключением $\overset{5}{\nabla}$, совпадают с базовыми формами ω^j_0; для связности $\overset{5}{\nabla}$ согласно (31) имеем $\overset{5}{\theta}{}^j_0 = 2\omega^j_0$.

В структурных уравнениях (20) компоненты тензоров кручения $\overset{p}{r}{}^j_{0st}$ и кривизны $\overset{p}{r}{}^j_{ist}$ связностей $\overset{p}{\nabla}$ имеют следующие строения:

$$\overset{1}{r}{}^j_{0st} = 0, \quad \overset{1}{r}{}^j_{ist} = r^j_{ist} \ (\text{см. } (17)); \quad \overset{6}{r}{}^j_{0st} = 0, \quad \overset{6}{r}{}^j_{ist} = \overline{r}{}^j_{ist} \ \ (\text{см. } (18)), \tag{32}$$

$$\begin{gathered}\overset{2}{r}{}^j_{0st} = 0, \quad \overset{2}{r}{}^j_{ist} = \overset{1}{r}{}^j_{ist} - \frac{2}{m+2}(\Lambda^{jl}_n v^k_n D^n_{lk[s}\Lambda^n_{t]i} + \Lambda^{kl}_n v^0_k D^n_{li[s}\delta^j_{t]} + \Lambda^{jk}_n \Lambda_{k[s}\Lambda^n_{t]i} + \Lambda_{i[s}\delta^j_{t]} - \delta^j_i \Lambda_{[st]}) + \\ + \frac{2}{(m+2)^2}(\Lambda^{kl}_n \Lambda_k D \ \ n_{li[s}\delta^j_{t]} + \Lambda_i \Lambda_{[s}\delta^j_{t]} + \Lambda^{jk}_n \Lambda_k \Lambda_{[s}\Lambda^n_{t]i}) - 2(\Lambda^u_{i[s} N^j_{|u|t]} + \Lambda^{jl}_n \Lambda^n_{ki}\Lambda^u_{l[s} N^k_{|u|t]}),\end{gathered} \tag{33}$$

$$\overset{3}{r}{}^j_{0st} = -2\frac{m+1}{m}T^k_n \Lambda^n_{k[s}\delta^j_{t]}, \quad \overset{3}{r}{}^j_{ist} = \overset{1}{r}{}^j_{ist} - \frac{2(m+1)}{m}\delta^j_i T^k_{n[s}\Lambda^n_{t]k}, \tag{34}$$

$$\overset{4}{r}{}^j_{0st} = \overset{3}{r}{}^j_{0st}, \quad r^j_{ist} = \overset{2}{r}{}^j_{ist} - \frac{2(m+1)}{m}\delta^j_i T^k_{n[s}\Lambda^n_{t]k}, \tag{35}$$

$$\begin{gathered}\overset{5}{r}{}^j_{0st} = 0, \quad \overset{5}{r}{}^j_{ist} = \overset{2}{r}{}^j_{ist} + \frac{2}{(m+2)^2}(\Lambda^{kl}_n \Lambda_k D^n_{li[s}\delta^j_{t]} - \Lambda_i \Lambda_{[s}\delta^j_{t]}) - \\ - \frac{2}{m+2}(\Lambda^{kl}_n v^0_k D^n_{li[s}\delta^j_{t]} + 2v^k_n \Lambda_k \Lambda^n_{i[s}\delta^j_{t]} - 2\Lambda_i v^0_{[s}\delta^j_{t]} + \\ + 2\Lambda_i v^k_n \Lambda^n_{k[s}\delta^j_{t]} - 2\delta^j_i \Lambda^u_{k[s} N^k_{|u|t]} + \Lambda_{i[s}\delta^j_{t]} + v^k_n \Lambda^n_{ki}\Lambda_{[s}\delta^j_{t]}) - 2(\Lambda^n_{kl} v^k_n v^l_n \Lambda^n_{i[s}\delta^j_{t]} + 3v^0_i v^0_{[s}\delta^j_{t]} - v^k_n v^0_k \Lambda^n_{i[s}\delta^j_{t]} + \\ + \Lambda^n_{il} v^l_n v^k_n \Lambda^n_{k[s}\delta^j_{t]} - \Lambda^n_{ik} v^k_n v^0_{[s}\delta^j_{t]} + \delta^j_i v^k_{n[s}\Lambda^n_{t]k} + \delta^j_i v^0_{[st]} + \Lambda^n_{ik} v^k_{n[s}\delta^j_{t]} - v^0_{i[s}\delta^j_{t]}).\end{gathered} \tag{36}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *На нормализованной в смысле Нордена–Чакмазяна регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ в касательном расслоении индуцируется шесть аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}, \dots, \overset{6}{\nabla}$, определяемых соответственно системами слоевых форм* (14), (28)–(31), (15); *при этом из шести соответствующих пространств аффинной связности $\overset{1}{A}_{m,m}, \dots, \overset{6}{A}_{m,m}$ четыре — без кручения* *(см. (32), (33), (36)), а два* ($\overset{3}{A}_{m,m}$ *и* $\overset{4}{A}_{m,m}$) *имеют равные тензоры кручения (вообще говоря, ненулевые, см. (34), (35)).*

Из соотношений (34), (35) непосредственно следует

Теорема 2. *Пространство аффинной связности* $\overset{3}{A}_{m,m}$ *(или, что то же самое,* $\overset{4}{A}_{m,m}$*), индуцируемое при нормализации регулярной гиперполосы* $H_m \subset P_n$*, имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда гиперполоса коинцидентна, или, что то же самое, когда* $\overset{3}{\nabla} \equiv \overset{1}{\nabla}$ *(или* $\overset{4}{\nabla} \equiv \overset{2}{\nabla}$*).*

Достаточность условия теоремы 2 очевидна; докажем его необходимость. Если $\overset{3}{r}{}^{j}_{0st} = 0$, то из соотношений (34) находим

$$T^k_n(\Lambda^n_{ks}\delta^j_t - \Lambda^n_{kt}\delta^j_s) = 0.$$

Свернув последние соотношения по индексам j, s, получим

$$(m-1)\Lambda^n_{kt}T^k_n = 0,$$

откуда при $m \geq 2$ в силу $\Lambda = |\Lambda^n_{kt}| \neq 0$ следует, что тензор T^k_n нулевой, т. е. гиперполоса H_m коинцидентна.

Согласно соотношениям (11), (19), (22)–(25), (27) справедливы следующие инвариантные аналитические условия попарного совпадения аффинных связностей $\overset{p}{\nabla}$, $p \neq 5$, индуцируемых на нормализованной регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$,

$$\overset{1}{\nabla} \equiv \overset{2}{\nabla} \Leftrightarrow \overset{3}{\nabla} \equiv \overset{4}{\nabla} \Leftrightarrow D^n_{ijk} \equiv 0, \tag{37}$$

$$\overset{1}{\nabla} \equiv \overset{3}{\nabla} \Leftrightarrow \overset{2}{\nabla} \equiv \overset{4}{\nabla} \Leftrightarrow T^i_n \equiv 0, \tag{38}$$

$$\overset{1}{\nabla} \equiv \overset{4}{\nabla} \Leftrightarrow \overset{2}{\nabla} \equiv \overset{3}{\nabla} \Leftrightarrow \{D^n_{ijk} \equiv 0,\ T^i_n \equiv 0\}, \tag{39}$$

$$\overset{1}{\nabla} \equiv \overset{6}{\nabla} \Leftrightarrow \{D^n_{ijk} \equiv 0,\ T^0_i(v) \equiv 0\}, \tag{40}$$

$$\overset{2}{\nabla} \equiv \overset{6}{\nabla} \Leftrightarrow T^0_i(v) \equiv 0. \tag{41}$$

Аналитические условия (37)–(41) попарного совпадения связностей $\overset{p}{\nabla}$ согласно п.п. 1, 2 имеют следующие геометрические характеристики:

— обращение в нуль тензора Дарбу D^n_{ijk} (см. (8)) есть условие касания 3-го порядка соприкасающихся гиперквадрик поля (7) с гиперполосой $H_m \subset P_n$;
— обращение в нуль тензора T^i_n (см. (13)) есть условие коинцидентности гиперполосы H_m;
— обращение в нуль тензора $T^0_i(v)$ (см. (11)) есть условие взаимности нормализации гиперполосы.

Заметим, что ни одна из пяти аффинных связностей $\overset{p}{\nabla}$, $p \neq 5$, не может совпасть со связностью $\overset{5}{\nabla}$, ибо $\overset{5}{\theta}{}^i_0 = 2\omega^i_0 = 2\overset{p}{\theta}{}^i_0$, т. е. $\overset{5}{\theta}{}^i_0 \neq \overset{p}{\theta}{}^i_0$, $p \neq 5$.

Так как аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$, $\overset{5}{\nabla}$, $\overset{6}{\nabla}$ — без кручения, то соответствующие тензоры кривизны удовлетворяют тождествам Риччи

$$\overset{p}{r}{}^{j}_{(ist)} = 0, \quad p \neq 3, 4; \tag{42}$$

в справедливости тождеств (42) легко убедиться, если замкнуть квадратичные уравнения $D\overset{p}{\theta}{}^j_0 = \overset{p}{\theta}{}^k_0 \wedge \overset{p}{\theta}{}^j_k$.

Для симметрической связности $\overset{p}{\nabla}$ тензор

$$\overset{p}{r}_{is} \overset{\text{def}}{=} \overset{p}{r}{}^j_{isj} \tag{43}$$

называется ее тензором Риччи [8]. Свернув тождества (42) по индексам i, j, находим

$$2\overset{p}{r}_{[st]} = -\overset{p}{r}{}^j_{ist}, \quad p \neq 3, 4. \tag{44}$$

Тензор $\overset{p}{r}_{[st]}$ называется объемным тензором пространства аффинной связности $\overset{p}{A}_{m,m}$ без кручения; обращение его в нуль есть условие эквиаффинности [8] связности $\overset{p}{\nabla}$ пространства $\overset{p}{A}_{m,m}$.

Некоторые вопросы геометрии двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{6}{\nabla}$, индуцируемых на нормализованной гиперполосе $H_m \subset P_n$, изучались в работах [13], [11], [12]. В частности, доказано, что

— связность $\overset{16}{\nabla}$, средняя по отношению к $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{6}{\nabla}$, является вейлевой; условием ее римановости является обращение в нуль кососимметричного тензора $T^0_{ij}(v) \overset{\text{def}}{=} v^0_{[ij]} - v^s_{n[i}\Lambda^n_{j]s}$;

— связности $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{6}{\nabla}$, индуцируемые взаимной нормализацией подмногообразия $H_m \subset P_n$, могут быть эквиаффинными лишь одновременно, ибо

$$2\overset{1}{r}_{[st]} = 2\overset{6}{r}_{[st]} = mT^0_{st}(v); \tag{45}$$

— двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{6}{\nabla}$, индуцируемые нормализацией Фубини (F^i_n, F^0_i) гиперполосы $H_m \subset P_n$, эквиаффинны (ибо $T^0_{ij}(v) \equiv 0$), а их средняя связность риманова с метрическим тензором Λ^n_{ij};

— если при некоторой взаимной нормализации гиперполосы H_m тензоры Риччи $\overset{1}{r}_{is}$, $\overset{6}{r}_{is}$ совпадают, то данная нормализация есть нормализация Вильчинского $(-W^i_n, W^0_i)$.

Рассмотрим вопросы, аналогичные перечисленным выше, по отношению к симметрическим связностям $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$. Свертывая выражения (33) компонент тензора кривизны пространства $\overset{2}{A}_{m,m}$ по индексам i, j, с использованием соотношений (4), (6), (17), (44) получим $\overset{2}{r}_{[st]} = \overset{1}{r}_{[st]} = (m+1)v^0_{[st]} + v^j_{n[s}\Lambda^n_{t]j} - \Lambda^u_{j[s}N^j_{|u|t]}$ (ср. с (45)). Отметим, что совокупность функций

$$N^0_{st}(v) \overset{\text{def}}{=} (m+1)v^0_{[st]} + v^j_{n[s}\Lambda^n_{t]j} - \Lambda^u_{j[s}N^j_{|u|t]} \tag{46}$$

есть кососимметричный тензор. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые на нормализованной регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$, могут быть эквиаффинными лишь одновременно; условием их эквиаффинности является обращение в нуль кососимметричного тензора $N^0_{st}(v)$ (см. (46)).*

Заметим, что теорема 3 не предполагает взаимность нормализации подмногообразия H_m.

Дифференциальные уравнения (2) для компонент тензора Λ^n_{ij} в силу (14), (28) можно записать в виде

$$d\Lambda^n_{ij} - \Lambda^n_{ik}\overset{1}{\theta}{}^k_j - \Lambda^n_{kj}\overset{2}{\theta}{}^k_i = \Lambda^n_{ij}\left[\left(\frac{\Lambda_k}{m+2} - 2v^0_k\right)\omega^k_0 + \omega^0_0 - \omega^n_n\right] + (T^0_i(v))\omega^n_j + (T^0_j(v))\omega^n_i. \tag{47}$$

Если аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$ сопряжены [8] относительно поля тензора Λ^n_{ij}, то справедливо

$$d\Lambda^n_{ij} - \Lambda^n_{ik}\overset{1}{\theta}{}^k_j - \Lambda^n_{kj}\overset{2}{\theta}{}^k_i = \Lambda^n_{ij}\Omega. \tag{48}$$

Сравнивая уравнения (47), (48), имеем

$$\Lambda^n_{ij}\left[\left(\frac{\Lambda_k}{m+2}-2v^0_k\right)\omega^k_0+\omega^0_0-\omega^n_n\right]+(T^0_i(v))\omega^n_j+(T^0_j(v))\omega^n_i=\Lambda^n_{ij}\Omega.$$

Свертывая последние соотношения с тензором Λ^{ij}_n, находим

$$\Omega=\frac{m+2}{m}T^0_k(v)\omega^k_0-(\omega^n_n-\omega^0_0+v^0_k\omega^k_0+v^k_n\omega^n_k). \tag{49}$$

Аффинная связность $\overset{12}{\nabla}$, средняя [8] по отношению к $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$, определяется системой форм $\{\overset{12}{\theta}{}^i_0\equiv\omega^i_0,\ \overset{12}{\theta}{}^j_i=\frac{1}{2}(\overset{1}{\theta}{}^j_i+\overset{2}{\theta}{}^j_i)\}$.

Предположим, что связности $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$ сопряжены относительно поля тензора Λ^n_{ij}. Сделав перестановку индексов i, j в уравнениях (48) и складывая почленно левые и правые части полученных и исходных уравнений, имеем $d\Lambda^n_{ij}-\Lambda^n_{ik}\overset{12}{\theta}{}^k_j-\Lambda^n_{kj}\overset{12}{\theta}{}^k_i=\Lambda^n_{ij}\Omega$; последнее говорит о том, что средняя связность $\overset{12}{\nabla}$ является вейлевой с метрическим тензором Λ^n_{ij}; связность $\overset{12}{\nabla}$ будет эквиаффинной, а следовательно, римановой тогда и только тогда, когда форма (49) есть полный дифференциал.

В силу соотношений (9), (11), (46), (49) справедливо

$$D\Omega=\frac{4}{m}N^0_{st}(v)\omega^s_0\wedge\omega^t_0;$$

следовательно, имеем

$$\Omega=dF\Leftrightarrow D\Omega=0\Leftrightarrow N^0_{st}(v)=0.$$

Доказана

Теорема 4. *Если симметрические аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые на нормализованной регулярной гиперполосе $H_m\subset P_n$, сопряжены относительно поля тензора Λ^n_{ij}, то средняя связность $\overset{12}{\nabla}$ является вейлевой с метрическим тензором Λ^n_{ij}; условием ее римановости является обращение в нуль тензора $N^0_{st}(v)$ (см. (46)).*

Используя охваты функций $T_n\equiv T$, $\widehat{\Lambda}_{ij}\equiv\widehat{b}_{ij}$ на регулярной гиперполосе $H_m\subset P_n$, построенные в работе [6], путем свертывания тензора $\overset{2}{r}{}^j_{ist}$ (см. (33)) по индексам j, t с использованием (1), (6), (10), (11), (17), (43) получим

$$\begin{aligned}\overset{2}{r}_{is}=\overset{1}{r}_{is}-\frac{m}{m+2}v^k_nD^n_{kis}+\frac{m-1}{m+2}\Lambda^{kl}_nD^n_{lis}T^0_k(v)+\frac{1}{m+2}\Lambda^n_{is}T_n-\\-\frac{m}{m+2}\left(\Lambda_{is}-\frac{\Lambda_i\Lambda_s}{m+2}\right)-m(\Lambda^u_{is}a^0_u-\Lambda^n_{ki}a^u_nN^k_{us})+\frac{2m}{m+2}\Lambda^u_{k[i}N^k_{|u|s]},\end{aligned}$$

т. е.

$$\overset{2}{r}_{is}=\overset{1}{r}_{is}-\frac{m}{m+2}v^k_nD^n_{kis}+\frac{m-1}{m+2}\Lambda^{kl}_nD^n_{lis}T^0_k(v)-\frac{m}{m+2}\widehat{\Lambda}_{is}-m(\Lambda^u_{is}a^0_u-\Lambda^n_{ki}a^u_nN^k_{us})+\frac{2m}{m+2}\Lambda^u_{k[i}N^k_{|u|s]}.$$

Если $\overset{2}{r}_{is}=\overset{1}{r}_{is}$, то из последних соотношений находим

$$\widehat{\Lambda}_{is}=-v^k_nD^n_{kis}+\frac{m-1}{m}\Lambda^{kl}_nD^n_{lis}T^0_k(v)-(m+2)(\Lambda^u_{is}a^0_u-\Lambda^n_{ki}a^u_nN^k_{us})+2\Lambda^u_{k[i}N^k_{|u|s]}. \tag{50}$$

Известно [5], [6], что первая директриса Вильчинского определяется полем квазитензора $(-W^i_n)$ третьего порядка, где

$$W^i_n=B^{ik}W_{nk}; \tag{51}$$

здесь тензор B^{ik} является взаимным по отношению к тензору второго порядка

$$B_{ij} = \Lambda_n^{kl}\Lambda_n^{st} D_{iks}^n D_{jlt}^n \tag{52}$$

и

$$W_{nk} = \Lambda_n^{is}\Lambda_n^{jt}\widehat{\Lambda}_{ij} D_{kst}^n + (m+2)(\lambda_{nk} - \mu_{nk}).$$

Используя соотношения (50), (52) и охваты функций λ_{nk}, μ_{nk} (см. [6]), имеем

$$W_{nk} = -v_n^l B_{kl} + \frac{m-1}{m}\Lambda_n^{sl} B_{kl} T_s^0(v) = -B_{kl}\Big(v_n^l - \frac{m-1}{m}\Lambda_n^{sl} T_s^0(v)\Big).$$

Из соотношений (51) с использованием последних выражений находим

$$v_n^i = m(-W_n^i) - (m-1)\Lambda_n^{ki}\Big(v_k^0 - \frac{\Lambda_k}{m+2}\Big). \tag{53}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Если для некоторой нормализации регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ тензоры Риччи аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$ совпадают, то компоненты нормализующих объектов v_n^i, v_i^0 связаны соотношениями* (53).

Заметим, что в условиях теоремы 5 нормаль v_n^i (см. (53)) не обязательно принадлежит каноническому пучку (12); ниже найдем условие, при котором она является нормалью канонического пучка.

Соотношения (53) в силу (13) можно переписать в следующем виде:

$$v_n^i = -W_n^i + (1-m)\Big[T_n^i - \Lambda_n^{ik}\Big(\frac{\Lambda_k}{m+2} - v_k^0 + \Lambda_{ks}^n F_n^s\Big)\Big]. \tag{54}$$

Сравнивая (12) и (54), имеем, что в условиях теоремы 5 нормаль первого рода v_n^i принадлежит каноническому пучку гиперполосы $H_m \subset P_n$ тогда и только тогда, когда

$$\Lambda_n^{ik}\Big(\frac{\Lambda_k}{m+2} - v_k^0 + \Lambda_{ks}^m F_m^s\Big) = \lambda T_n^i.$$

В силу последних соотношений выражения (54) нормали v_n^i канонического пучка и соответствующей ей нормали v_i^0 второго рода примут вид

$$v_n^i = -W_n^i + (1-m)(1-\lambda)T_n^i, \quad v_i^0 = \frac{\Lambda_i}{m+2} + \Lambda_{is}^n(F_n^s - \lambda T_n^s). \tag{55}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *В условиях теоремы* 5 *нормаль первого рода принадлежит каноническому пучку* (12) *гиперполосы $H_m \subset P_n$ тогда и только тогда, когда нормализующие объекты v_n^i, v_i^0 имеют строения* (55)*, где λ — инвариантный параметр.*

Если гиперполоса $H_m \subset P_n$ не коинцидентная, то в соотношениях (55) значение $\lambda = 1$ соответствует нормализации подмногообразия H_m полями нормалей Вильчинского. Так как при охватах (55) тензор $T_i^0(v)$ (см. (11)) имеет строение $T_i^0(v) = m(\lambda-1)\Lambda_{is}^n T_n^s$, то справедливо

Следствие. При выполнении условий теоремы 6 нормализация гиперполосы $H_m \subset P_n$ является взаимной тогда и только тогда, когда

— либо она является нормализацией Вильчинского,
— либо гиперполоса коинцидентная.

Отметим, что в случае коинцидентности гиперполосы H_m она нормализована полями нормалей, в которые вырождаются канонические пучки нормалей первого и второго родов; следовательно, и в этом случае H_m нормализована полями нормалей Вильчинского (или, что то же самое, полями нормалей Фубини и т. д.).

Замечание 1. Для гиперполосы $H_m \subset P_n$, отличной от коинцидентной, в охватах (55) справедливо, например,

— $\lambda = 0 \Leftrightarrow \{v_i^0 = F_i^0,\ v_n^i$ есть нормаль пучка (12) при $\tau = 1 - m\}$;
— $\lambda = \frac{m}{m-1} \Leftrightarrow \{v_n^i = F_n^i,\ v_i^0 = F_i^0 - \frac{m}{m-1}\Lambda_{is}^n T_n^s\}$.

Замечание 2. Известно [11], [12], что аффинные связности $\nabla \equiv \overset{1}{\nabla}$, $\overline{\nabla} \equiv \overset{6}{\nabla}$ (см. (14), (15)) являются двойственными. Рассматривая двойственный образ подмногообразия H_m [14] и проведя двойственные построения (на базе связности $\overline{\nabla}$) по законам (19)–(31), имеем шесть аффинных связностей $\overset{1}{\overline{\nabla}}, \dots, \overset{6}{\overline{\nabla}}$, индуцируемых нормализацией гиперполосы H_m и попарно двойственных с $\overset{1}{\nabla}, \dots, \overset{6}{\nabla}$; при этом часть пар будет дублировать друг друга (напр., пары $\overset{1}{\nabla} \leftrightarrow \overset{1}{\overline{\nabla}}$ и $\overset{6}{\nabla} \leftrightarrow \overset{6}{\overline{\nabla}}$, ибо $\overset{1}{\overline{\nabla}} \equiv \overset{6}{\nabla}$, $\overset{6}{\overline{\nabla}} \equiv \overset{1}{\nabla}$).

Литература

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1979. – Т. 9. – 246 с.
2. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Лаптев Г.Ф. *Многообразия, погруженные в обобщенные пространства* // Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда. – 1964. – Т. 2. – С. 226–233.
4. Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
5. Столяров А.В. *О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 10. – С. 97–99.
6. Столяров А.В. *Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1975. – Т. 7. – С. 117–151.
7. Вагнер В.В. *Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу.* – М.: Изд-во МГУ, 1950. – Вып. 8. – С. 197–272.
8. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
9. Чакмазян А.В. *Двойственная нормализация* // ДАН Арм. ССР. – 1959. – № 4. – С. 151–157.
10. Mihăilescu T. *Geometrie differentiala projectiva* // Bucureşti Acad. RPR. – 1958. – 494 p.
11. Столяров А.В. *Дифференциальная геометрия полос* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1978. – Т. 10. – С. 25–54.
12. Столяров А.В. *Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1977. – Т. 8. – С. 25-46.
13. Столяров А.В. *Условие квадратичности регулярной гиперполосы* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 11. – С. 106–108.
14. Столяров А.В. *Двойственная теория регулярной гиперполосы* $H_m \subset P_{n,n}$ // Дифференц. геометр. многообразий фигур. – Калининград: Калинингр. ун-т, 1988. – Вып. 19. – С. 88–93.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступила
11.12.1998