Известия вузов. Математика
2015, № 7, с. 3–9

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.И. КАБАНОВА

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ НА МНОГООБРАЗИИ НЕГОЛОНОМНОЙ $(n+1)$-ТКАНИ

Аннотация. Рассматривается неголономная $(n+1)$-ткань NW на многообразии M размерности n, т. е. $n+1$ распределений коразмерности 1 на этом многообразии. Доказывается, что на многообразии M существует инвариантный пучок проективных связностей. Упорядоченной неголономной $(n+1)$-ткани на M можно единственным образом поставить в соответствие криволинейную $(n+1)$-ткань на M и обратно. Это соответствие определяется поляритетом относительно некоторой инвариантной полилинейной n-формы или барицентрическим подразделением некоторого $(n-1)$-мерного симплекса. В заключение рассмотрен частный случай: неголономная $(n+1)$-ткань ANW гиперплоскостей в аффинном пространстве. Ткань ANW порождает инвариантный пучок аффинных связностей. Рассмотрен случай, когда эти связности являются проективными.

Ключевые слова: неголономная $(n+1)$-ткань, криволинейная $(n+1)$-ткань, аффинная связность, аффинная неголономная $(n+1)$-ткань, проективные связности, геодезическая линия.

УДК: 514.763

1. Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Неголономной $(n+1)$-тканью NW называем $n+1$ распределений $\Delta_1, \dots, \Delta_{n+1}$ коразмерности 1 на M, находящихся в общем положении [1].

Пусть структурные уравнения гладкого многообразия M записаны в виде [2]

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k, \tag{1}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \tag{2}$$

$$\dots$$

Здесь и далее $i, j, k = 1,\ 2, \dots, n$, и формы ω^i зависят от дифференциалов локальных координат многообразия M. Тогда семейство адаптированных реперов неголономной $(n+1)$-ткани NW можно выбрать так, что на распределениях Δ_i, $i = 1,\ 2, \dots, n$, аннулируются формы ω^i соответственно, а на распределении Δ_{n+1} аннулируется форма $\omega^1 + \dots + \omega^n$. В этом случае формы ω^i образуют адаптированный корепер неголономной $(n+1)$-ткани NW, в котором имеют место уравнения [1]

$$\omega^i_j = \delta^i_j \theta + \widetilde{c}^i_{jk} \omega^k. \tag{3}$$

Иными словами, на многообразии существует такая форма θ и такие функции $\widetilde{c}^i_{jk}$, для которых выполняются равенства (3).

Поступила 25.01.2014

При этом векторы e_i, $i = 1, 2, \dots, \widehat{k}, \dots, n$, адаптированного репера, двойственного кореперу $\{\omega^i\}$, принадлежат распределению Δ_k (знак "$\widehat{\ }$" над k означает, что индекс k пропускается). Распределение Δ_{n+1} содержит всевозможные разности $e_i - e_j$ и задается уравнением

$$x^1 + x^2 + \dots + x^n = 0. \tag{4}$$

Множество адаптированных кореперов образует однопараметрическое семейство и определяет на многообразии M G-структуру со структурной группой скалярных матриц. В [1] эту G-структуру назвали *λE-структурой*. Там же доказано, что задание неголономной $(n+1)$-ткани NW на гладком многообразии M размерности n равносильно заданию λE-структуры на этом многообразии.

В адаптированном репере структурные уравнения неголономной $(n+1)$-ткани NW приводятся к виду [1]

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \theta + c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{5}$$

$$\nabla c^i_{jk} \equiv dc^i_{jk} - c^i_{jk}\theta = c^i_{jkm}\omega^m, \tag{6}$$

$$d\theta = \mu_{kl}\,\omega^k \wedge \omega^l, \tag{7}$$

где $c^i_{jk} \equiv \widetilde{c}^i_{[jk]}$,

$$\mu_{kl} = \frac{1}{n-2}c^i_{kli}, \tag{8}$$

причем величины c^i_{jk} и c^i_{jkm} удовлетворяют соотношениям

$$c^i_{(jk)} = 0, \quad c^i_{(jk)m} = 0, \tag{9}$$

$$c^i_{ik} = 0, \quad c^i_{ikm} = 0, \tag{10}$$

$$c^i_{[klm]} = -2c^i{}_{j[k}c^j_{lm]} + \frac{1}{n-2}\delta^i{}_{[m}c^p_{kl]p}. \tag{11}$$

Отметим, что все распределения неголономной ткани NW геометрически равноправны, но вследствие выбора базиса первые n распределений оказываются выделенными, т. е. координатными. Фактически, структурные уравнения (5)–(7) записаны для ткани NW, у которой выделены первые n распределений. В этом случае будем говорить, что ткань NW упорядочена.

2. Заметим, что в уравнении (5) содержится только кососимметричная часть тензора $\widetilde{c}^i_{jk}$, входящего в уравнение (3). С другой стороны, как видно из первой серии структурных уравнений (1), формы ω^i_k определены с точностью до слагаемого вида $s^i_{jk}\omega^j$, где $s^i_{jk} = s^i_{kj}$. Поэтому введем новые формы $\widetilde{\omega}^i_k = \omega^i_k - c^i_{(jk)}\omega^k$. Тогда структурные уравнения (5)–(7) сохранят вид, а соотношения (3) примут вид

$$\omega^i_j = \delta^i_j\theta + c^i_{jk}\omega^k,$$

где $c^i_{jk} = -c^i_{kj}$ (волну над ω^i_j опускаем).

Теорема 1. *Формы*

$$\Omega^i_j = \delta^i_j\theta + tc^i_{jk}\omega^k \tag{12}$$

определяют на многообразии M аффинную связность при любом $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Дифференцируя соотношение (12), находим

$$d\Omega^i_j - \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k = \delta^i_j d\theta + t\nabla c^i_{jm} \wedge \omega^m + t^2(c^i_{jk}c^k_{lm} + c^i_{kl}c^k_{jm})\omega^l \wedge \omega^m.$$

Подставляя в полученное соотношение (6) и (7), получим

$$d\Omega^i_j - \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k = (\delta^i_j \mu_{lm} + tc^i_{jml} + t^2(c^i_{jk}c^k_{lm} + c^i_{kl}c^k_{jm}))\omega^l \wedge \omega^m.$$

Согласно теореме Картана–Лаптева формы Ω^i_j на многообразии M определяют аффинную связность с тензором кривизны

$$R^i_{jlm} = \delta^i_j \mu_{lm} - tc^i{}_{j[lm]} + t^2(c^i_{jk}c^k_{lm} + c^i{}_{k[l}c^k_{|j|m]}).$$

Обозначим эту связность $\Gamma(t)$. □

В силу (12) уравнение (5) можно переписать в виде

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \Omega^i_j + (1-t)c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

Отсюда находим тензор кручения $S^i_{jk} = (1-t)c^i_{jk}$ связности $\Gamma(t)$. В частности, при $t = 0$ получаем связность Γ, рассмотренную в работе [1], а при $t = 1$ получаем связность без кручения, которую обозначим Γ_1.

Теорема 2. *Связности пучка* $\Gamma(t)$ *проективны.*

Доказательство. Геодезические линии произвольной аффинной связности определяются уравнениями $d\omega^i + \omega^j\Omega^i_j = \psi\omega^i$, где d — обычный дифференциал. Подставляя в данное уравнение (12), находим

$$d\omega^i + \omega^j(\delta^i_j\theta + tc^i_{jk}\omega^k) = \psi\omega^i.$$

В силу кососимметричности тензора c^i_{jk} имеем $c^i_{jk}\omega^j\omega^k = 0$, поэтому дифференциальные уравнения геодезических принимают вид

$$d\omega^i = \widetilde{\psi}\omega^i. \tag{13}$$

Как видно, левая часть уравнений не зависит от t, т.е. все связности пучка $\Gamma(t)$ имеют одни и те же геодезические (13). Следовательно, все связности пучка $\Gamma(t)$ проективны ([3], с. 165). □

Интегрируя (13), находим, что геодезические линии связности Γ (пучка $\Gamma(t)$) задаются уравнениями

$$\omega^i = c^i\omega, \tag{14}$$

где c^i — постоянные. В частности, геодезическими будут интегральные кривые ткани NW. Отсюда в свою очередь следует, что распределения неголономной ткани будут вполне геодезическими относительно связности Γ.

3. *Криволинейной* $(n+1)$*-тканью* на многообразии M размерности n, $n > 2$, называется совокупность $(n+1)$ слоений общего положения размерности 1. Общую теорию криволинейных $(n+1)$-тканей построил В.К. Восканян [4].

Теорема 3. *Упорядоченной неголономной* $(n+1)$*-ткани, заданной на* n*-мерном многообразии* M*, однозначно соответствует упорядоченная криволинейная* $(n+1)$*-ткань на* M*.*

Доказательство. Пусть, как и выше, первые n распределений ткани NW определяются в касательном пространстве T_pM уравнениями $x^i = 0$.

Рассмотрим инвариантную форму $\Phi = x^1x^2\cdots x^n$. Уравнение $\Phi = 0$ в касательном пространстве к многообразию M выделяет совокупность n подпространств π_i, $\pi \in \Delta_i$, $\dim \pi_i = n-1$. Для краткости будем называть эту совокупность конусом Φ.

Форме Φ соответствует симметричная полилинейная форма

$$\Phi(x^1, \dots, x^n) = \sum (x^1)^{i_1}(x^2)^{i_2}\dots(x^n)^{i_n}, \tag{15}$$

где суммирование ведется по сочетаниям верхних индексов.

С полилинейной формой Φ свяжем поляритеты $1, 2, \ldots \quad (n-1)$-го рода, аналогичные известным поляритетам относительно плоских алгебраических кривых [5], с. 24).

Если в (15) фиксировать $x^1 = a$, а остальные переменные отождествить: $x^2 = \cdots = x^{n-1} \equiv x$, то уравнение $\Phi(a, x, \ldots, x) = 0$ определит некоторое алгебраическое подмногообразие $(n-1)$-мерных подпространств — первую поляру вектора a относительно конуса Φ.

Если в (15) фиксировать $x^1 = x^2 = a$, а остальные переменные отождествить: $x^3 = \cdots = x^{n-1} \equiv x$, то уравнение $\Phi(a, a, x, \ldots, x) = 0$ определит также некоторое алгебраическое подмногообразие $(n-1)$-мерных подпространств — вторую поляру вектора a относительно конуса Φ, и т. д.

Наконец, если в (15) фиксировать $x^1 = x^2 = \cdots = x^{n-1} = a$, то уравнение $\Phi(a, a, a, ..., x)$=0 или

$$a^2 a^3 \cdots a^n x^1 + a^1 a^3 \cdots a^n x^2 + \cdots + a^1 a^2 \cdots a^{n-1} x^n = 0 \tag{16}$$

определит линейное подмногообразие $(n-1)$-мерных подпространств — $(n-1)$-ю поляру вектора a относительно конуса Φ.

Теперь потребуем, чтобы $(n-1)$-я поляра совпадала с подпространством π_{n+1} распределения Δ_{n+1}, которое определяется уравнением $x^1 + \cdots + x^n = 0$. Сравнивая с (16), получим равенства

$$a^2 a^3 \cdots a^n = a^1 a^3 \cdots a^n = \cdots = a^1 a^2 \cdots a^{n-1}, \tag{17}$$

откуда получаем $a^1 = a^2 = \cdots = a^n$. Следовательно, $(n-1)$-я поляра вектора a совпадает с подпространством π_{n+1} распределения Δ_{n+1}, если и только если (с точностью до множителя) $a \equiv (1, 1, \ldots, 1)$.

Итак, в каждом касательном пространстве T_pM получили $n+1$ инвариантных направлений, определяемых базисными векторами e_i и вектором a. Интегральные кривые соответствующих векторных полей и дадут нам криволинейную $(n+1)$-ткань, связанную с упорядоченной неголономной $(n+1)$-тканью NW.

Обратно, пусть задана криволинейная $(n+1)$-ткань. Упорядочим эту ткань, т. е. будем считать, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ направлены по касательным к соответствующим слоям этой ткани. Плоскость π_i распределения Δ_i ткани NW определим всеми базисными векторами, кроме e_i, а плоскость π_{n+1} определим как $(n-1)$-ю поляру вектора e_{n+1} относительно определенной выше полилинейной формы Φ. $\square$

Неголономную $(n+1)$-ткань и соответствующую ей криволинейную $(n+1)$-ткань будем называть *ассоциированными*.

Замечание. Неголономную $(n+1)$-ткань можно упорядочить $(n+1)$-м способом, поэтому ей соответствуют $n+1$ ассоциированных криволинейных $(n+1)$-тканей в зависимости от выбора координатных направлений.

Выясним геометрический смысл вектора a. Для этого проективизируем касательное пространство T_pM, поставив в соответствие каждому одномерному подпространству из T_pM точку проективного пространства P_p размерности $n-1$. Базисным векторам e_i в P_p будут соответствовать базисные точки A_i, которые являются вершинами некоторого симплекса Σ. Подпространству π_{n+1} будет соответствовать в P_p гиперплоскость, обозначим ее π. Отметим, что уравнение этой гиперплоскости в проективном репере A_i будет иметь вид $x^1 + \cdots + x^n = 0$.

Гиперплоскость π пересекает каждое ребро $A_i A_j$ симплекса Σ в точке $A_i - A_j$. Тогда на этом ребре определится инвариантная точка $A_i + A_j$, которая вместе с точкой $A_i - A_j$ гармонически делит пару инвариантных точек A_i, A_j.

Рассмотрим теперь двумерную грань $A_i\,A_j\,A_k$ симплекса Σ. На каждом ребре $A_i\,A_j$ этой грани есть инвариантная точка A_i+A_j. Соединив каждую из этих точек с противоположной вершиной A_k, найдем, что полученные три прямые пересекаются в точке $A_i+A_j+A_k$. Далее продолжаем по индукции: в каждой трехмерной грани $A_i\,A_j\,A_k\,A_l$ соединяем инвариантную точку $A_i+A_j+A_k$ с противоположной вершиной A_l, тогда полученные четыре прямые пересекутся в точке $A_i+A_j+A_k+A_l$ и т. д. В результате придем к точке $A_1+A_2+\cdots+A_n$, которой в касательном пространстве T_pM отвечает вектор a.

Если теперь гиперплоскость π удалить в бесконечность, то проективное пространство P_p превращается в аффинное пространство, а инвариантные точки A_i+A_j, $A_i+A_j+A_k$ и т. д. — соответственно в середины ребер и центры тяжести двумерных, трехмерных и т. д. граней симплекса Σ. Таким образом, получаем так называемое барицентрическое подразделение симплекса Σ.

4. Пусть многообразие M, на котором задана неголономная ткань NW, является аффинным пространством A размерности n, а распределения ткани Δ_i образованы гиперплоскостями. Обозначим такую ткань ANW. Поместим векторы e_i подвижного репера в пересечения всех гиперплоскостей распределений кроме плоскости π_i, а всевозможные разности e_i-e_j — в плоскость π_{n+1}. В этом репере плоскости распределений Δ_i будут задаваться уравнениями $x^i=0$, $x^1+\cdots+x^n=0$. Интегральные кривые векторных полей e_i образуют ассоциированную криволинейную $(n+1)$-ткань.

Найдем структурные уравнения аффинной неголономной $(n+1)$-ткани ANW.

Запишем деривационные уравнения аффинного пространства в обычном виде [6]:

$$dp=\omega^i e_i,\quad de_i=\omega_i^j e_j.$$

Формы ω^i, ω_j^i удовлетворяют известным структурным уравнениям

$$\begin{aligned} d\omega^i&=\omega^k\wedge\omega_k^i,\\ d\omega_j^i&=\omega_j^k\wedge\omega_k^i. \end{aligned}\tag{18}$$

Фиксируем точку p, положив $\omega^i{=}0$. Тогда в силу инвариантности направлений e_i и e_i-e_j выполняются соотношения

$$\delta e_i=\theta_i e_i,\tag{19}$$

$$\delta(e_i-e_j)=\theta_{ij}(e_i-e_j),\tag{20}$$

где δ — дифференцирование по вторичным параметрам, и по индексам i и j суммирование не производится. Отсюда получаем $\theta_i=\theta_j=\theta_{ij}\equiv\widetilde{\theta}$, поэтому $\delta e_i=\widetilde{\theta}e_i$.

С другой стороны, из деривационных уравнений при фиксированной точке получаем $\delta e_i=\pi_i^j e_j$. Сравнивая последние равенства с (19), находим, что $\pi_i^j=\delta_i^j\widetilde{\theta}$. Отсюда следует, что в аффинном пространстве также должны выполняться уравнения (3):

$$\omega_j^i=\delta_j^i\theta+\widetilde{c}_{jk}^i\omega^k.\tag{21}$$

Повторяя рассуждения, проведенные в [1], находим, что структурные уравнения ткани ANW, как и в общем случае, примут вид (5)–(11). Далее, дифференцируя равенство (21), находим

$$d\omega_j^i=\delta_j^i d\theta+\nabla\widetilde{c}_{jk}^i\wedge\omega^k+\widetilde{c}_{jk}^i c_{lm}^k\omega^l\wedge\omega^m,\tag{22}$$

где $\nabla\widetilde{c}_{jk}^i\equiv d\widetilde{c}_{jk}^i-\widetilde{c}_{jk}^i\theta$.

С другой стороны, подставляя (21) во вторую группу структурных уравнений (18), получим

$$d\omega_j^i=(\delta_j^k\theta+\widetilde{c}_{jm}^k\omega^m)\wedge(\delta_k^i\theta+\widetilde{c}_{kl}^i\omega^l)=\widetilde{c}_{jm}^k\widetilde{c}_{kl}^i\omega^m\wedge\omega^l.\tag{23}$$

Сравнивая (22) и (23), с учетом (7) имеем

$$\delta^i_j\mu_{lm}\,\omega^l\wedge\omega^m+\nabla\widetilde{c}^i_{jm}\wedge\omega^m+(\widetilde{c}^i_{jk}c^k_{lm}-\widetilde{c}^k{}_{j[l}\widetilde{c}^i{}_{|k|m]})\omega^l\wedge\omega^m=0$$

или

$$(\nabla\widetilde{c}^i_{jm}+B_{jlm}\omega^l)\wedge\omega^m=0,$$

где $B_{jlm}=-B_{jml}\equiv\delta^i_j\mu_{lm}\,\omega^l+\widetilde{c}^i_{jk}c^k_{lm}-\widetilde{c}^k{}_{j[l}\widetilde{c}^i{}_{|k|m]}$. Отсюда $\nabla\widetilde{c}^i_{jm}+B_{jlm}\omega^l=A^i_{jml}\omega^l$, где $A^i_{jml}=A^i_{jlm}$ — некоторые новые функции. Последнее соотношение запишем в виде

$$\nabla\widetilde{c}^i_{jm}=\widetilde{c}^i_{jml}\omega^l, \tag{24}$$

при этом $\widetilde{c}^i_{j(ml)}=A^i_{jml}$, $\widetilde{c}^i{}_{j[ml]}=B_{jml}$.

Альтернируя (24), в силу сделанных выше обозначений получим $\nabla c^i_{jm}=\widetilde{c}^i{}_{[jm]l}$. Сравнивая с (6), находим $\widetilde{c}^i{}_{[jm]l}=c^i_{jml}$.

Повторяя рассуждения, проведенные в п. 1, получается, аналогичная теореме 1,

Теорема 4. *Формы*

$$\Omega^i_j=\delta^i_j\theta+t\widetilde{c}^i_{jk}\omega^k \tag{25}$$

на аффинном пространстве A определяют аффинную связность при любом $t\in\mathbb{R}$.

Заметим, что в аффинном случае формы ω_i и ω^i_j являются инвариантными формами аффинной группы и допускают только замены переменных с постоянными коэффициентами. Следовательно, величины $\widetilde{c}^i_{jk}$ нельзя, как в общем случае, сделать кососимметричными с помощью замены форм ω^i_j. Поэтому связности пучка $\Gamma(t)$ для ткани ANW не будут, вообще говоря, проективны.

Рассмотрим частный случай, когда $\widetilde{c}^i_{jk}=-\widetilde{c}^i_{kj}$, т. е. $\widetilde{c}^i_{jk}\equiv c^i_{jk}$.

Теорема 5. *Следующие утверждения эквивалентны*:
1) *формы $\widetilde{c}^i_{jk}$, входящие в уравнения* (25), *кососимметричны по нижним индексам*;
2) *все связности пучка $\Gamma(t)$ проективны*;
3) *геодезические линии связности Γ являются прямыми.*

Доказательство. Эквивалентность предложений 1) и 2) теоремы доказывается так же, как в общем случае (см. п. 2).

Докажем эквивалентность предложений 2) и 3). Действительно, геодезические определяются соотношениями (14): $\omega^i=c^i\omega$, $c^i=\mathrm{const}$. Вычислим дифференциал точки вдоль произвольной геодезической:

$$dp=\omega^ie_i=(c^ie_i)\omega.$$

Дифференциал касательного вектора $\xi=c^ie_i$ к геодезической с учетом (21) и (14) запишется в виде

$$d\xi=d(c^ie_i)=c^i\omega^j_ie_j=c^i(\delta^j_i\theta+c^j_{ik}\omega^k)e_j=c^ie_i\theta+c^j_{ik}c^ic^k\omega e_j.$$

Сумма $c^j_{ik}c^ic^k$ равна нулю тогда и только тогда, когда тензор c^j_{ik} кососимметричен по двум нижним индексам. Тогда получим $d\xi=\theta\xi$. В этом случае геодезические являются прямыми, так как дифференциал касательного вектора пропорционален этому вектору. □

Литература

[1] Кабанова М.И. *λE-структуры*, Тр. междунар. геом. центра **5** (1), 25–30 (2012).

[2] Лаптев Г.Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии*, Тр. геом. семин. **1**, 139–189 (1966).

[3] Норден А.П. *Пространства аффинной связности* (Наука, М., 1976).

[4] Восканян В.К. *Криволинейные $(n+1)$-ткани на многообразии M^n*, Межвуз. сб. науч. тр. Матем. **3**, 163–175 (1985).

[5] Савелов А.А. *Плоские кривые: систематика, свойства, применения.* Справочное руководство. 3-е изд. (Эдиториал УРСС, М., 2010).

[6] Картан Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1962).

М.И. Кабанова

аспирант, кафедра геометрии,
Московский педагогический государственный университет,
ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1, Москва, 119991, Россия,

e-mail: luinel@list.ru

M.I. Kabanova

On differential-geometric structures on a manifold of nonholonomic $(n+1)$-web

Abstract. We consider nonholonomic $(n+1)$-web NW consisting of $n+1$ distributions of codimension 1 on n-dimensional manifold M. We prove that an invariant pencil of projective connections exists on the manifold M. A unique curvilinear $(n+1)$-web corresponds to the ordered nonholonomic $(n+1)$-web and vice versa. The correspondence is defined by the polarity with respect to an invariant multilinear n-form or barycentric subdivision of an $(n+1)$-dimensional simplex. In conclusion we consider nonholonomic $(n+1)$-webs in affine space. The invariant pencil of affine connections is generated by every affine web. We also consider the case when the connections of the pencil are projective.

Keywords: nonholonomic $(n+1)$-web, curvilinear $(n+1)$-web, affine connection, affine nonholonomic $(n+1)$-web, projective connections, geodesic line.

M.I. Kabanova

Postgraduate, Chair of Geometry,
Moscow Pedagogical State University,
1 Malaya Pirogovskaya str., Bld. 1, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: luinel@list.ru